S. 1310.c.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SECHZEHNTER BAND.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LVI. BAND.

MÜNCHEN 1888.
VERLAG DER K. AKADEMIE
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB IN MÜNCHEN.

Inhalt des XVI. Bandes.

I. Abtheilung (1886—1887). Seite

Monographiae Generis Serjaniae Supplementum. Ergänzungen zur Monographie der Sapindaceen-Gattung Serjania. Von *L. Radlkofer*. Mit 8 Tafeln und 1 Karte 1

Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. (Zweite Abhandlung.) Von *J. Lüroth* 197

II. Abtheilung (1887).

Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n. Ordnung. Von *A. Voss* 243

Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunktionen. Von *A. v. Braunmühl* 325

Ueber künstlich deformirte Schädel und Gehirne von Südseeinsulanern (Neue Hebriden) von *N. Rüdinger*. Mit 3 Tafeln, enthaltend 11 Figuren . . 369

Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten insbesondere des Saturn. Von *H. Seeliger* 403

III. Abtheilung (1888).

Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion von *Carl Max von Bauernfeind*. Dritte Mitteilung, enthaltend einen Rückblick auf frühere Mitteilungen, Darstellung der Beobachtungen des Jahres 1885 und Schlussbetrachtungen über die Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Mit einer Steindrucktafel 517

Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Von *Andreas Miller* 569

Ueber den absoluten elektrischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Von *Friedrich Kohlrausch*. Mit 3 Tafeln 627

20 DEC 1888

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SECHZEHNTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LVI. BAND.

MÜNCHEN 1887.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

MONOGRAPHIAE GENERIS SERJANIAE SUPPLEMENTUM.

ERGÄNZUNGEN

ZUR

MONOGRAPHIE DER SAPINDACEEN-GATTUNG

SERJANIA.

Von

L. Radlkofer.

Vorwort.

Die hier folgenden Ergänzungen zu der im Jahre 1875 erschienenen Monographie von *Serjania* beziehen sich ebensowohl auf deren allgemeinen, wie auf deren speciellen Theil.

Die Ergänzungen zum allgemeinen Theile enthalten vorzugsweise die näheren, durch Zeichnungen erläuterten Ausführungen zum Gattungscharacter. So namentlich die in Begründung der anatomischen Methode aus der Untersuchung der Zweig- und Blattstructur gewonnenen Resultate, welche früher, um die auf sie sich stützende Erledigung des systematischen Details nicht aufzuhalten, nur in dem erweiterten Gattungscharacter und in den Artcharacteristiken kurz berührt worden sind, wie ausserdem noch in vorläufigen Mittheilungen bei der Versammlung englischer Naturforscher zu Norwich im Jahre 1868 und auf dem internationalen botanischen Congresse zu Florenz i. J. 1874. Andere dieser erläuternden Ausführungen beziehen sich auf den Blüthenbau. Ergänzungen zur Gattungslitteratur und Gattungsgeschichte mit Einschluss der chronologischen Art-Tabellen vervollständigen das dem allgemeinen Theile Beizufügende und geben Gelegenheit, auch für einige Pflanzen aus anderen Familien Ergebnisse aus neueren, unter Anwendung der anatomischen Methode gepflogenen Untersuchungen vorzulegen.

Die Ergänzungen zum speciellen Theile, welche durch einen erweiterten Conspectus Specierum eingeleitet werden, berichten über die in der neueren Zeit erschienene (theilweise auch schon in den chronologischen Tabellen berührte) Litteratur und den an neuerem und älterem Untersuchungsmateriale gewonnenen Zuwachs, aus welchem sich eine Anzahl neuer Arten und eine Vermehrung der nunmehr als authentisch erscheinenden Belegstücke ergeben hat, sowie, was namentlich von grossem Werthe ist, eine Ausfüllung der in der Interpretation anderer Autoren, namentlich Grisebach's (s. die Anmerk. auf p. XII und p. 392 der Monographie), früher gebliebenen Lücken durch die Erlangung der betreffenden kritischen Originalien.

Für die Mittheilung der eben berührten kritischen Materialien aus dem Herbarium von Grisebach bin ich dessen Nachfolger, Herren Grafen zu Solms-

Lenbach zu grossem Danke verpflichtet. Andere der kritischen Sichtung bedürftig gewesene Materialien (aus dem Herb. Turczaninow) verdanke ich den gütigen Bemühungen des Herrn Dr. Batalin in Petersburg und dem freundlichen Entgegenkommen des Herren Professor Cienkowski in Charkow; wieder andere den Herren Asa Gray und Watson in Nordamerica.

Neue Materialien gingen mir namentlich aus dem Museum zu Stockholm zu in der reichen Sammlung von Mosén aus Brasilien und in den Ergänzungen zu den früher schon erhaltenen Sammlungen von Regnell, Widgren und Lindberg aus dem gleichen Lande; ferner die Fortsetzung des Herb. Glaziou aus Rio de Janeiro durch die Herren Eichler und Warming.

Eine erhebliche Bereicherung ergab sich ferner aus neuerdings unternommenen Reisen nach den botanischen Centren von Holland, Belgien und Frankreich im Frühjahre 1877, sowie nach Belgien, England und Frankreich im Herbste 1885. Durch die letztere Reise wurde es mir zugleich ermöglicht, ein vollkommen sicheres, weil auf Autopsie gestütztes Urtheil über die in der Biologia Centrali-Americana von Hemsley aufgeführten Pflanzen zu gewinnen.

In ihrer Reihenfolge schliessen sich all diese Ergänzungen enge an den Inhalt der Monographie von *Serjania* an.

München im Juli 1886.

L. Radlkofer.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

I. Litteratur und Synonymie der Gattung 1

II. Characteristik der Gattung 2

A. Ueber die Zweig- und Stammstructur 2

Anatomische Methode, S. 2; zusammengesetzter, getheilter, umstrickter, zerklüfteter, gelappter Holzkörper, S. 2; umkleideter, bündelbelegter Holzkörper, S. 4; cambiumwechselnder Holzkörper, S. 5; zweierlei Hauptgruppen der Arten mit zusammengesetztem Holzkörper, S. 6; Modificationen innerhalb dieser Gruppen, S. 8; Uebersicht über diese Modificationen nach den Sectionen der Gattung, S. 9; tabellarische Uebersicht, S. 14; histiologische Verhältnisse, S. 15; der Sclerenchymring ein Theil der primären Rinde, S. 15; kein markständiges Bastgewebe, S. 16; Zerklüftung des Sclerenchymringes, S. 16; Entstehungsweise der neuen, secundären Holzringe, S. 17; Arten mit getheiltem Holzkörper, S. 18; der umstrickte Holzkörper von *Thinouia* und die darauf bezügliche Litteratur, S. 19; Entwicklung desselben, S. 20; Verwechselung desselben mit dem zusammengesetzten Holzkörper (bei De Bary etc.), S. 22; der zerklüftete Holzkörper von *Urvillea laevis* und die darauf bezügliche Litteratur, S. 22; Entwicklung desselben, S. 23; der gelappte Holzkörper, S. 24; der unterbrochene Holzkörper der Bignoniaceen, S. 25.

Würdigung der auf die Stammanomalieen der Sapindaceen bezüglichen Litteratur, S. 25–34: Gaudichaud, S. 25, 26; Richard, S. 25; Treviranus, S. 25, 27; Jussieu, S. 27; Martius, S. 27; Schleiden, S. 27; Mettenius, S. 27; Crüger, S. 27; Schacht, S. 28; Netto, S. 28; Naegeli, S. 29; Fritz Müller, S. 30; Duchartre, S. 30; Clos, S. 30; Bureau, S. 30; Licopoli, S. 31; Lestiboudois, S. 31; Dutailly, S. 33; De Bary, S. 34.

B. Ueber die Blattstructur 34

a. Ueber die Gefässbündelanordnung im Blattstiele . . . 34

Hauptsystem, S. 34; rindenständige und markständige Gefässbündel, S. 35; tabellarische Uebersicht, S. 36.

Seite

b. Ueber die Structur der Blattspreite 37

Bifacialer Bau, Spaltöffnungen, Epidermis, Drüsen und Haare, Pallisadengewebe, schwammförmiges Gewebe, Secretzellen und Secretschläuche, durchsichtige Punkte und Strichelchen, S. 37, 38; Gefässbündel, Hartbast, Gefässbündelenden, S. 39; Epidermiszellen, Verschleimung ihrer Innenwandung, S. 39; Gestaltungsmodificationen der Drüsen, S. 40; Uebersicht der Arten nach den besonderen Verhältnissen der Blattstructur, S. 41—44.

C. Ueber den Bau der Blüthe 44

Grundriss, S. 44; Kelchblätter, Blumenblätter, Staubgefässe, S. 45; unterdrückte Staubgefässe, S. 46; Fruchtblätter, S. 47.

D. Ueber die geographische Verbreitung 47

III. Gattungsgeschichte 48

Arten von Linné, Materialien von Surian, S. 48; Bestimmung der schon früher aufgezählten ausgeschlossenen, weder zu *Serjania*, noch zu *Paullinia* gehörigen Arten, S. 49; durch Schomburgk ohne Characteristik veröffentlichte Artnamen von Klotzsch, S. 49; Bemerkung über *Sapindus surinamensis Poir.* und *Sapindus tomentosus Kurz*, S. 48, 49; zur Geschichte der cultivirten Arten, S. 50.

IV. Chronologische Tabellen 51

Neue Arten, S. 51; neue Synonyme, S. 52, 53; über die Priorität von *Serjania atrolineata* der Flora Cubana von Sauvalle & Wright vor *Serjania scatens Radlk.*, S. 54; die übrigen Arten der „Flora Cubana“ S. 55.

Angefügte Erörterungen über die auch in der „Flora Cubana“, wie von Grisebach, als Sapotaceae betrachtete *Daphnopsis cuneata Radlk.*, S. 55; über die Vulgärnamen einiger Sapotaceen Cuba's, S. 55; über das zu *Pouteria dictyoneura Radlk.* (Sapotac.) gehörige Synonym *Bumelia nigra A. Rich.*, S. 55; über die Zugehörigkeit von *Bumelia pentagona Sw.* zu *Dipholis salicifolia A. DC.* (Sapotac.), S. 55, 56; über die Arten von *Roemeria Thunb. (Heeria Meisn.)* und die Zugehörigkeit der bisher als Sapotaceae aufgefassten *Roemeria inermis Thunb.* zu der Celastrineae *Scytophyllum laurinum Eckl. & Zeyh.*, S. 56—59; über die Umänderung von *Atalaya coriacea Radlk.* in *Guioa coriacea Radlk.* (Sapindac.), S. 59, 60; über die mittelst der anatomischen Methode gewonnene Bestimmung von *Schleichera sp. Beddome* als *Protium serratum Engl. forma pallidula Radlk.* (Burserac.), S. 60, 61.

V. Conspectus sectionum specierumque auctus 62

Conspectus sectionum 62

Conspectus specierum 64

VI. Species 80

Sectio I. Platycoccus (Species n. 1—19) 80

Subsectio I. (Species n. 1—7) 80

Serjania tenuis Radlk. 80

„ Regnellii Schlecht. 80

„ cuspidata Camb. 80

„ communis Camb. 80

Zusatz über durchsichtige Punktirung 81

„ viridissima Radlk. spec. nov. 81

Seite

Subsectio II. (Species n. 8—19) 82
Serjania decemstriata Radlk. spec. nov. 82
Zusatz über die unrichtigen Angaben Grisebach's für eine nahe verwandte und andere Arten: Viertheiligkeit des Kelches etc. 83
„ foveata Griseb. spec. nov. 84
Zusatz über die wechselnde Auffassung dieser Art durch Grisebach 85
„ cardiospermoides Schlecht. & Cham. 86
„ Ampelopsis Planch. & Lind. 87
„ areolata Radlk. spec. nov. 87
„ chartacea Radlk. 88
Zusatz über die mangelhafte Auffassung der Art durch Sagot 88
„ confertiflora Radlk. 89

Sectio II. Ceratococcus (Species n. 20—21) 89
Serjania cornigera Turcz. 89
Zusatz über die falsche Bestimmung der Pflanze durch Grisebach 89

Sectio III. Eurycoccus (Species n. 22—43) 90
Serjania Salzmanniana Schlecht. em. 90
„ pedicellaris Radlk. 90
„ altissima Radlk. 90
„ deflexa Gardn. 91
„ elegans Camb. em. 91
„ corrugata Radlk. 91
„ gracilis Radlk. 91
„ macrostachya Radlk. 91
„ depauperata Radlk. spec. nov. 92
„ diversifolia Radlk. 93
Zusatz über die Vulgärnamen der Pflanze . . . 93

Sectio IV. Eucoccus (Species n. 44—54) 94
Serjania dentata Radlk. 94
„ caracasana Willd. 94
Zusatz über die von Schomburgk nach Regionen für Guiana aufgeführten wirklichen und vermeintlichen Sapindaceen und die Deutung der letzteren: *Sapindus surinamensis Poir.* = *Picraena excelsa Lindl.*, *Matayba Patrisiana DC.* = *Swartzia alata Willd.*; ferner über die hiebei von Schomburgk veröffentlichte Benennung verschiedener Sapindaceen durch Klotzsch, darunter eine als neue Art von *Paullinia* zu betrachtende Pflanze: *Paull. conduplicata* Radlk. 95
„ grandiflora Camb. 102
„ crenata Griseb. 103
Zusatz über die irrige Auffassung der Pflanze durch Sauvalle & Wright 103
„ Laruotteana Camb. 104
„ pyramidata Radlk. 104
„ Seemanni Tr. & Pl. 104

Seite

Sectio V. Pachycoccus (Species n. 55—58) 104
Serjania reticulata Camb. 104
„ marginata Casar. 105
Zusatz über die Missdeutung der Pflanze durch Grisebach . 105
„ erecta Radlk. 106
Sectio VI. Holcococcus (Species n. 59—64) 106
Serjania membranacea Splitg. 106
„ grandifolia Sagot 106
„ glabrata Kunth 107
Zusatz über wiederholte Missdeutung der Pflanze durch Grisebach 108
Sectio VII. Dictyococcus (Species n. 65—71) 110
Serjania sinuata Schum. 110
„ polyphylla Radlk. 110
„ crassinervis Radlk. 112
„ subdentata Juss. 112
Ergänzung der früheren Uebersicht und Deutung der in den Schriften von Grisebach aufgeführten wirklichen und angeblichen *Serjania*-Arten 113
„ paniculata Kunth 115
„ atrolineata Sauv. & Wr. (S. scatens Radlk.) 116
„ equestris Macf. 117
Sectio VIII. Simococcus (Species n. 72—80) 117
Serjania oblongifolia Radlk. 117
„ subrotundifolia Radlk. spec. nov. 118
„ fuscifolia Radlk. 118
„ clematidifolia Camb. 119
„ pinnatifolia Radlk. 119
Sectio IX. Oococcus (Species n. 81—90) 119
Serjania perulacea Radlk. 119
Zusatz über Missdeutung der Pflanze durch Grisebach und über Schmalblättrigkeit der südlichen Exemplare . . . 120
„ lethalis St. Hil. 120
„ ichthyoctona Radlk. 120
„ paucidentata DC. 121
Zusatz über besondere anatomische Blattcharactere, auch der cultivirten Exemplare, und Modification der Zweigstructur . . 121
„ acutidentata Radlk. 122
„ obtusidentata Radlk. 122
„ lamelligera Radlk. spec. nov. 123
Sectio X. Phacococcus (Species n. 91—96) 124
Serjania mexicana Willd. 124
Zusatz über die Berichtigung einer theilweise hieher gehörigen Stelle der Flora Jamaicensis von Linné 125
Zusatz über die irrige Auffassung einer hieher gehörigen Pflanze von Wullschlaegel aus Jamaica durch Grisebach . . 126
Zusatz über die Auffassung der hieher gehörigen *Serj. samydea Griseb.* von Duchassaing aus Panama durch Hemsley . 128

Seite

Zusatz über die Auffassung dieser und der übrigen zu *Serjania* und *Paullinia* gehörigen fünf Pflanzen von Duchassaing aus Panama durch Grisebach und Andere 129
Serjania longipes Radlk. 133
„ brevipes Benth. 134
„ brachycarpa A. Gray 134
Zusatz über das Verhältniss dieser Art zu *Serj. racemosa Schum.* 134
Sectio XI. Physococcus (Species n. 97—116) 134
Serjania Grosii Schlecht. 134
„ emarginata Kunth 134
„ racemosa Schum. 135
„ incisa Torrey 136
„ sphenocarpa Radlk. 136
„ cystocarpa Radlk. spec. nov. 136
Zusatz über das Verhältniss von *Cardiospermum* zu *Serjania* und eine neue Art ersterer Gattung (*C. dissectum Radlk.*) . . 137
„ californica Radlk. spec. nov. 139
„ macrococca Radlk. 140
Zusatz über wiederholte Verwechslung dieser Art mit einem *Cardiospermum* 140
„ sordida Radlk. 141
„ subtriplinervis Radlk. 142
„ acuta Tr. & Pl. 142
„ polystachya Radlk. 143
„ vesicosa Radlk. 143
„ mucronulata Radlk. 143
„ sufferruginea Radlk. 144
„ inflata Poepp. 145
Sectio XII. Syncoccus (Species n. 117—145) 145
Serjania meridionalis Camb. 145
Zusatz über mehrfache Missdeutung der Pflanze durch Grisebach 145
„ Cambessedeana Schlecht. & Cham. 150
„ orbicularis Radlk. 150
„ tristis Radlk. 150
„ hebecarpa Benth. 151
Zusatz über die Formen der Pflanze 152
Zusatz über mehrfache Missdeutung der Pflanze durch Grisebach 152
„ grandis Seem. 153
„ peruviana Radlk. spec. nov. 154
„ diffusa Radlk. 154
„ Schiedeana Schlecht. 155
„ triquetra Radlk. 155
„ goniocarpa Radlk. 156
„ brachystachya Radlk. 156
„ curassavica Radlk. 156
„ impressa Radlk. 157
„ rhombea Radlk. 157
„ clematidea Tr. & Pl. 158

Seite

Serjania trachygona Radlk. 158
„ insignis Radlk. 158
Zusatz über die Missdeutung der Pflanze im Herb. Grisebach 158
„ noxia Camb. 159
„ multiflora Camb. 159
Species sedis omnino dubiae (Species n. 146—155) 159
Serjania setulosa Radlk. 159
Zusatz über das eigentliche Sammelgebiet von Friedrichsthal 159
„ piscatoria Radlk. 160
„ nodosa Radlk. 160
„ inebrians Radlk. 160
Zusatz über fischvergiftende Pflanzen 161
„ nutans Poepp. 161
Species exclusae 161
Nachtrag (*Serj. confertiflora Radlk. var. Hooibrencki Radlk.*; Synonyme von *Serj. hebecarpa Benth.*) 161

VII. Geographische Verbreitung der Gattung *Serjania* 163
A. Tabellarische Uebersicht 163
B. Kartographische Uebersicht 173

VIII. Materialienverzeichniss 179

IX. Figurenerklärung 183

Register der Pflanzennamen 189
A. Wissenschaftliche Namen 189
B. Vulgärnamen 195

I. Litteratur und Synonymie der Gattung.

Bezüglich des in der Gattungslitteratur p. 1 angeführten Artikels von J. Edw. Smith über *Serjania* im XXXII. Bande der Cyclopaedia von Rees ist zu bemerken, dass derselbe, entsprechend der chronologischen Ordnung der Litteraturangaben, eine frühere Stelle als die ihm nach der Jahreszahl des Titels, 1819, angewiesene einzunehmen hat. Die gleiche Jahreszahl ist nämlich allen Bänden vorgedruckt, so dass dieselbe nur das Jahr, in welchem die sämmtlichen Titelblätter zum Drucke kamen, nicht aber das, in welchem der betreffende Band erschien, angibt. Erst zwei Jahre nach dem Erscheinen der Monographie von *Serjania* hat Jackson (Journ. Bot. XV, 1877, pag. 108) für mehrere der betreffenden Bände die Zeit ihrer Herausgabe näher ermittelt. Der Band XXXII stammt nach seiner Angabe aus dem Jahre 1816. An die diesem Jahre entsprechende Stelle ist demnach hier wie in der Litteratur der von Smith berührten Arten die Bezugnahme auf den erwähnten Artikel desselben zu versetzen. Aehnliches gilt für den auf p. 3 erwähnten Band XXVI mit dem Artikel *Paullinia* von Smith, für welchen Band die Angaben von Jackson das Jahr 1814 als Zeit des Erscheinens annehmen lassen. —

Den p. 4 unter „Paullinia spec." angeführten Stellen ist beizufügen: Sandmark, resp. Linné, Pasquale, Grisebach, Gray et Hemsley locis infra (sub IV) in Supplementi tabulis specierum et synonymorum novorum indicatis. Ferner mit dem gleichen Hinweise auf die eben erwähnten, unter IV folgenden Tabellen der neuen Arten und Synonyme unter „Urvillea spec." Grisebach und unter „Cardiospermum spec." Gray. —

Vor Corindum etc. mag p. 4 zur Herstellung der Uebereinstimmung mit der Specieslitteratur p. 312 eingefügt werden:

Cururu spec. Rand Hort. Chelsean. (1739) p. 65 n. 1, excl. syn.; cfr. Serj. curassavica Radlk. —

Der Stelle auf p. 5 „Non Serjania Vellozo Flor. Fluminens. I (1825); Icon. I (1827) tab. 53 ist am Schlusse beizufügen: Lantana spec.? t. Oliver in lit. —

Auf p. 5 ist zu „Non Serjania spec. autor. plur.; cf. spec. excl." noch beizufügen: nec non quoad species partim excludendas indicationes et observationes partibus hic vel in Supplemento receptis (in indice quaerendis) adjectas. —

II. Characteristik der Gattung.

A. Ueber die Zweig- und Stamm-Structur.

Was die Zweig- und Stammstructur in der Gattung *Serjania* betrifft, von welcher sich zahlreiche Arten durch mannigfach modificirte, eigenthümliche Anomalieen, wie in ähnlicher Weise auch die Arten von *Paullinia*, *Urvillea* und *Thinouia*, unter den Sapindaceen auszeichnen, so dass sie mir als geeigneter Ausgangspunkt zur Geltendmachung der anatomischen Methode in der botanischen Systematik erschienen sind, so erachte ich es für angemessen, hier unter kurzer Hinweisung auf das an anderen Stellen darüber bereits Mitgetheilte die mannigfachen Vorkommnisse ihrer dauernden Verwerthung für die Systematik halber in übersichtlicher Weise und von einer Auswahl entsprechender Zeichnungen begleitet dem Leser vorzuführen, so dass die darin gelegenen Charactere, ebenso wie sie in der Monographie von *Serjania* zur Characterisirung der Arten in Bethätigung der anatomischen Methode ihre Verwendung gefunden haben, so auch bei der Bestimmung der Arten in Zukunft mit wünschenswerther Leichtigkeit und Sicherheit für Jedermann benutzbar sein mögen.

Ueberblicken wir die bei den genannten Sapindaceen-Gattungen, welche allein in dieser Familie Kletterpflanzen (Lianen) mit Ranken und holzigem Stamme in sich schliessen, während die ebenfalls meistentheils mit Ranken versehenen Arten der Gattung *Cardiospermum* nicht eigentliche Holzgewächse, sondern höchstens halbstrauchartige Gewächse darstellen, vorhandenen Anomalieen im Baue des Stammes, der aber nicht bei jeder der in Rede stehenden Arten mit lianenartigem Wuchse auch eine dieser Anomalieen besitzt, so lassen sich, deren hauptsächlich 4 unterscheiden, die ich in meinen bisherigen Mittheilungen darüber[1]) durch die Bezeichnungen: zusammengesetzter Holzkörper (corpus lignosum compositum), getheilter Holzkörper (c. l. divisum), umstrickter Holzkörper (c. l. circumseptum) und zerklüfteter Holzkörper (c. l. fissum) hervorgehoben habe. Diesen lässt sich sodann noch als leichtere Anomalie der früher ebenfalls schon erwähnte gelappte Holzkörper (c. l. lobatum) hinzufügen.

Die ersteren beiden Anomalien beruhen auf einer eigenthümlichen Anordnung der Gefässbündel und nehmen unmittelbar mit der Entstehung der Gefässbündel

---

1) Sieh Radlkofer: On the structural peculiarities of certain Sapindaceous plants; Report of the British Association for the Advancement of Science, held at Norwich, 1868, p. 109—111. — Sopra i varii tipi delle anomalie dei tronchi nelle Sapindacee; Atti del Congresso botanico internazionale tenuto in Firenze nel mese di Maggio 1874 (1876) p. 60—65 (Sep.-Abdr., 1875, p. 3—8). — Monographie der Sapindaceengattung Serjania, 1875, p. 5. — Ueber die Entstehung der secundären Holzkörper im Stamme gewisser Sapindaceen; Bericht über die 50. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in München im September 1877, p. 194—197.

ihren Anfang. Sie finden sich, die erste bei zahlreichen (89)[1]) Arten von *Serjania* in verschiedenen Modificationen und bei ungefähr einem Dutzend Arten von *Paullinia;* die zweite bei 5 Arten von *Serjania*, aus der Section *Eurycoccus*, welche auch nach ihrem übrigen Verhalten als einander nächst verwandt erscheinen. Etwas der ersten Aehnliches scheint übrigens nach einem vorliegenden, leider nicht sicher bestimmten Stammstücke auch bei einer Pflanze aus anderem Verwandtschaftskreise (Familie der Leguminosen?) vorzukommen.[2])

---

1) Die früher (Atti etc. 1874, p. 62) von mir angegebene Zahl von 84 *Serjania*-Arten mit zusammengesetztem Holzkörper unter den in der Monographie aufgeführten 145 Arten erhöht sich durch Einrechnung von *Serjania nutans* (s. bei dieser im später Folgenden) und durch Hinzutreten von 4 neuen Arten (aus 10 in diesem Supplemente aufgestellten), nämlich *Serj. viridissima, subrotundifolia, lamelligera* und *peruviana,* auf 89 unter 155 Arten.

2) Ich meine hier ein Stammstück aus Rio de Janeiro in der Sammlung von Martius, n. 254, das ich aber auch in den Sammlungen von Paris und Kew, wahrscheinlich aus derselben Quelle stammend, gesehen zu haben glaube. Dasselbe ist bandartig verbreitert, an der Oberfläche dicht mit Lenticellen besetzt, 8,5 cm breit, aus drei in derselben Richtung neben einander liegenden Holzkörpern von ungefähr 3 cm Durchmesser bestehend, und macht auf den ersten Anblick den Eindruck, als ob es aus 3 mit einander verwachsenen Stämmen (den Holzkörpern) gebildet wäre. Der mittlere Holzkörper ist seicht vierlappig, jeder der seitlichen sehr ungleich zweilappig, der kleinere Lappen je gegen einen (seitlichen) des mittleren Holzkörpers gerichtet; auf beiden Flächen des Stammes entsprechen diesen kleineren Lappen je zwei tiefe Längsfurchen. Zwischen den letzteren findet sich auf der einen Seite (über dem mittleren Holzkörper also) eine Blatt- und Zweignarbe. Das Mark des mittleren Holzkörpers stellt ein Rechteck dar, dessen längere Seiten sich mit dem grossen Querdurchmesser des ganzen Stammes rechtwinklig kreuzen; das Mark der seitlichen Holzkörper ist kleiner und von Gestalt einer Ellipse, deren längere Axe ebenfalls mit dem grossen Querdurchmesser des Stammes sich kreuzt. Das Mark ist in allen drei Holzkörpern von einer 1,5—2 mm starken Schichte dichten, an der Grenze gegen das Mark Spiralgefässe führenden Holzes umgeben, von welchem sich die äussere, mit zahlreichen weiten Gefässen versehene Holzmasse scharf abhebt. Letztere enthält viel Holzparenchym und Gruppen dickwandiger Prosenchymzellen mit einer das Lumen fast ganz verdrängenden sogenannten Gallert- oder Knorpelschichte im Inneren. Diese Beschaffenheit und die rechteckige Gestalt des Markes, weiter das Fehlen der Secretschläuche in der Rinde stehen der Deutung der Pflanze als einer *Serjania* oder *Paullinia* entgegen; zugleich ist dieselbe noch dadurch ausgezeichnet, dass der Sclerenchymring auch zwischen die Holzringe sich fortzieht. Im Marke des mittleren Holzkörpers endlich finden sich Gruppen von Prosenchymzellen, wie in der dichten Holzpartie, ohne Gallertschichte.

Ein aus mehreren Holzringen zusammengesetzter Holzkörper wird auch für die Bignoniaceen-Gattungen *Anisostichus* und *Jacaranda* angegeben (sieh Solereder, über den systematischen Werth der Holzstructur, 1885, p. 196).

Bei *Jacaranda* beruht das auf einer Verwechselung der starken Blattspindel des doppelt gefiederten Blattes von *J. filicifolia* mit einem Zweige. Die Blattspindel ist es, in welcher sich gesonderte Holzkörper finden, in den vorspringenden Rändern neben der oberseits befindlichen Furche von Fiedertheil zu Fiedertheil herabziehend.

Bei *Anisostichus* Bureau (*Bignonia capreolata* L.) weiter scheint die Sache auch nicht ähnlich wie bei *Serjania* zu sein, obwohl Bureau selbst diese Gattungen mit einander vergleicht: „Les vieilles tiges du genre *Anisostichus* ont dans l' épaisseur de l' écorce des corps ligneux cylindriques, comme on en voit dans les *Serjania*“ Bull. Soc. bot. d. France, XIX, 1872, p. 16, und ebenda

Die folgenden beiden entstehen erst in dem schon mehrere Jahre alten Stamme. Die dritte bei *Thinouia* und in Combination mit den ersteren beiden auch, mehr oder minder ausgeprägt, bei *Serjania* und *Paullinia*; die vierte, welche gewisse Beziehungen zur zweiten zeigt, bei *Urvillea (U. laevis)*. Beide kommen auch bei Gewächsen aus anderen Familien vor, wenn auch in verschiedener Weise modificirt. Der zerklüftete Holzkörper namentlich auch bei der Familie der Malpighiaceen, Bignoniaceen und bei den Bauhinien (sieh De Bary p. 618 ff.). Der umstrickte scheint in dem Sinne, wie ich die Bezeichnung angewandt habe, für einen später durch besondere secundäre Holzringe (Halz-Bastringe) umzogenen Holzkörper (sieh weiter unten) nicht sehr verbreitet zu sein, wohl aber, was als eine Modification desselben aufgefasst und etwa mit dem Namen beschienter oder umkleideter Holzkörper (c. l. vestitum) bezeichnet werden kann, nämlich das Auftreten secundär gebildeter Holzpartien in Form von Strängen oder von breiteren Lagen und Strangschichten am Umfange des ursprünglichen, fortwachsenden Holzkörpers, welche nur an ihrer Aussenseite, nicht ringsum sich fortentwickeln, wie bei *Wistaria (Glycine) chi-*

---

in der Uebersicht der Bignoniaceen-Gattungen p. 19 unter *Anisostichus:* „Faisceaux ligneux d'abord en éventail, tres-promptement arrondis, au milieu du liber." Mit diesen Worten schon und noch mehr nach der Darstellung von Bureau, Monographie des Bignoniacées, 1864, p. 138, woselbst sich der Autor auf die Angaben von Jussieu, Monogr. des Malpighiacées, 1843, p. 119 bezieht, handelt es sich hier vielmehr um erst spät auftretende Bildungen, um äusserste, durch Gewebeneubildungen abgetrennte Partien des Holzes, welche durch die Thätigkeit des neuen cambialen Gewebes allseitig fortgebildet werden und theilweise wohl auch aus solchem ihre Entstehung nehmen. Die Darstellung von De Bary, Anatomie der Vegetationsorgane, 1877, p. 591 (in der Uebersicht der Bignoniaceen-Gattungen nach Bureau) und p. 619 steht damit in Einklang. An Herbarmaterial mit kaum 2 mm dicken Zweigen (coll. Curtiss n. 1831) sehe ich die bekannten Bastkeile an den Ecken bereits deutlich entwickelt, von peripherischen Holzkörpern aber und somit von einer Aehnlichkeit mit *Serjania* ist nichts zu bemerken.

Am nächsten stehend und am meisten mit *Serjania* und *Paullinia* vergleichbar erscheinen ausser der oben erwähnten fraglichen Leguminose immer noch die zuerst von Mirbel (Ann. Scienc. nat. XIV, 1828, p. 367) untersuchten Calycantheen (vergleiche De Bary a. a. O. p. 601), deren Rindenbündel schon Gaudichaud (Arch. de Bot. II, 1833, p. 493) mit den äusseren Holzringen der Sapindaceen verglichen hat, wie Woronin (Bot. Zeit. XVIII, 1860, p. 177) berichtet. Doch sind bei den Calycantheen die pheripherischen Holzstränge nicht Holzringe, sondern sie werden von einzelnen umgekehrt orientirten, unter gleichzeitiger Verbreiterung nur nach innen fortwachsenden, einfach collateral gebauten Gefässbündeln gebildet, den lateralen Blattspursträngen, welche überdiess hauptsächlich nur unter sich, mit dem centralen Holzringe aber nur durch schwache, später (nach Woronin a. a. O. p. 178) verschwindende Anastomosen zusammenhängen. Sie sind aber wenigstens wie die peripherischen Holzkörper der Sapindaceen, primär entstanden und mit Spiralgefässen versehen. Markgewebe begleitet sie (entgegen der Angabe von Mirbel) nicht; die Spiralgefässe stossen vielmehr an ein wohl der primären Rinde zuzurechnendes Bündel bastfaserartiger Sclerenchymzellen. Man kann dem Gesagten gemäss den Holzkörper der Calycantheen, um seine Eigenthümlichkeit gegenüber dem zusammengesetzten Holzkörper der Sapindaceen hervorzuheben als bündelbelegten (c. l. fasciculis ornatum) oder schlechthin als belegten (verzierten) Holzkörper (c. l. ornatum) bezeichnen.

nensis und anderen Leguminosen, ferner älteren Stämmen gewisser Bignoniaceen (sieh De Bary p. 606). Eine strenge Scheidung scheint übrigens hier kaum durchführbar, da beiderlei secundäre Bildungen bei älteren Stämmen von *Serjania*, wie weiter unten zu erwähnen sein wird, sich gleichzeitig finden. Von dem umstrickten und umkleideten Holzkörper bleiben dann wieder jene Stämme zu unterscheiden, bei welchen eine Umlagerung des ursprünglichen Holzringes (Gefässbündelringes) durch neu entstehende Gefässbündel in Folge der Thätigkeitsunterbrechung des ursprünglichen Cambiums und Auftreten eines neuen an weiter nach aussen gerückter Stelle stattfindet, wie bei den Menispermaceen (sieh De Bary p. 606). Man kann diese Stämme, respective ihren Holzkörper, als cambiumwechselnd (c. l. cambiotropum) bezeichnen.

Die leichtere Anomalie des gelappten Holzkörpers endlich kann sich früher oder später zeigen, je nachdem sie durch die Stellung der Gefässbündel eingeleitet wird oder nicht. Das erstere ist der Fall bei mehreren *Serjania*-Arten aus der Verwandtschaft derer, welche die zweite Anomalie zeigen. Im übrigen findet sie sich ausser bei *Serjania* auch bei *Paullina* und *Urvillea*. In der letzteren Gattung wird durch sie, wie das auch bei anderen Familien der Fall ist, die vierte Anomalie (bei einer Art) eingeleitet.

Die erste der hier in Rede stehenden Anomalieen, welche für die Gattung *Serjania* eine ganz besondere Wichtigkeit besitzt und desshalb hier besondere Aufmerksamkeit verdient, der zusammengesetzte Holzkörper, corpus lignosum compositum, ist jene allbekannte, zuerst von Gaudichaud, 1833 (Archiv. de bot. II) beschriebene Anomalie, bei welcher auf dem Querschnitte des Stammes ausser einem centralen Holzkörper noch 1 oder mehrere, am häufigsten 3, oft aber 8 bis 10, in diesem Falle einen vollständigen Kranz um den centralen bildende peripherische Holzkörper (Holzringe) innerhalb eines gemeinschaftlichen, bastartigen Sclerenchymringes wahrzunehmen sind (sieh Taf. I, III, IV, V und VI und die Figurenerklärung), jeder mit seinem besonderen Cambiumringe und seinem besonderen Marke, das gewöhnlich von 2 oder mehreren Gefässbündeln mit abrollbaren Gefässen (Spiralgefässen) an der Markseite, sowie von zwischen den Gefässbündeln entwickelter Holzmasse umstellt ist (sieh Tafel V, Fig. 1); nur selten gibt 1 Gefässbündel Veranlassung zur Bildung eines Holzringes.

Diese Anomalie hat, seitdem Gaudichaud die Aufmerksamkeit auf sie gelenkt, stets in hohem Masse das Interesse der Botaniker erregt und verschiedenartige Deutungen erfahren.[1])

1) Sieh darüber die theilweise schon von Oliver, the structure of the stem in Dicotyledons, being references to the Literature of the subject, in Natural History Review, II, 1862, p. 307, weiter in De Bary, vergleichende Anatomie, in Hofmeister, Handbuch der physiologischen Botanik, III, 1877, p. 598 aufgeführten Schriften und Bemerkungen von Gaudichaud, Richard, Treviranus, Jussieu, Martius, Schleiden, Mettenius, Crüger, Schacht, Netto, Naegeli, Fr. Müller, Duchartre, Clos, Bureau, Licopoli, Lestiboudois und Dutailly, bezüglich welcher ich am Ende noch die näheren Citate und kurzen Bericht geben werde.

Namentlich sind wiederholt die peripherischen Holzkörper als mit dem centralen, als Hauptstamm angesehenen Theile verwachsene, oder als innerhalb der Rinde am centralen Hauptstamme fortwachsende Zweige aufgefasst (so von Martius, Schacht, Fritz Müller), ist wiederholt deren Mark übersehen (so von Richard, Gaudichaud 1841, p. 110, Tab. XIII, Fig. 2, 3, Schleiden, Duchartre, Lestiboudois) und wiederholt ihren Gefässbündeln das Vorhandensein von Spiralgefässen, das schon Jussieu, 1841, und Mettenius, 1847, constatirt hatten, abgesprochen worden (so selbst noch von Netto, 1863).

Ich kann bezüglich ihrer jetzigen, schon bei Treviranus, 1847, sich findenden Auffassung auf die nach Naegeli's und meinen eigenen Untersuchungen referirende Darstellung von De Bary (a. a. O.) verweisen[1]) und begnüge mich, wie an anderen Stellen (sieh die oben citirten Schriften) hervorzuheben, dass diese Anomalie auf einer von Anfang an, d. h. von der Gewebedifferenzirung im Stammscheitel an, sich feststellenden eigenthümlichen Anordnung der Gefässbündel beruht, welche dem Stamme die Vortheile eines Drahtseiles gegenüber einem gestreckten Cylinder gleichen Materiales gewährt (sieh Atti etc. p. 64, 65) und vor einem Drahtseile rücksichtlich der Sicherung der gegenseitigen Lage seiner Theile noch den Vortheil voraus hat, dass die einzelnen Holzringe durch in bestimmter Ordnung an den Blattknoten auftretende Anastomosen unter einander verkettet sind.[2])

Man kann unter den Arten, welche diese Anomalie besitzen, zwei Hauptgruppen unterscheiden, welchen sich dann die übrigen als minder wesentliche Modificationen, als Zwischen- und Uebergangsstufen anschliessen lassen.

Die eine dieser Hauptgruppen bilden diejenigen Arten, bei welchen ziemlich regelmässig 3, auf dem Querschnitte nach den Ecken eines gleichseitigen Dreieckes vertheilte peripherische Holzkörper vorkommen, an scharf dreikantigen Zweigen (mit $^1/_3$ Stellung der Blätter) die schief nach abwärts ziehenden Kanten bildend und seitlich an den Ursprungsstellen der Blätter, welche die ober ihnen besonders deutlich entwickelten, unter ihnen aber nicht selten selbst in eine Kante sich vordrängenden Flächen besetzt halten, vorbei ziehend (sieh Taf. I, Fig. 1, 2, 4). Es sind die seitlichen der gewöhnlich zu dritt von einem Blatte in den Stengel übertretenden Gefässbündel (Blattspurstränge), welche, indem sie sich in einem schon äusserlich wahrnehmbaren Bogen durch die Rinde den Kanten zuwenden, an jedem Blattknoten in diese Holzkörper übertreten und ihre Bildung vermitteln, während der mittlere Blattspurstrang und die von den Achselproducten des Blattes (Rankenzweig und Innovationsknospe) herkommenden

---

1) Eine Berichtigung hiezu bezüglich der aus Schleiden entlehnten Figur n. 231, welche nicht auf *Serjania*, sondern auf *Thinouia* sich bezieht, und der Angaben in Betreff von *Thinouia* überhaupt sieh bei Betrachtung der dritten Anomalie.

2) Ueber noch weitere Vortheile, welche die Lianen für ihre Lebensweise aus ihrer Structur ziehen, vergleiche Westermaier und Ambronn, Beziehungen zwischen Lebensweise und Structur der Schling- und Kletterpflanzen, Flora LXIV, 1881, p. 417 ff.

Gefässbündel in den centralen Holzring eintreten. Die neu eingetretenen seitlichen Blattspurstränge bilden die äussere Seite des peripherischen Holzkörpers, wenden sich aber, sobald dieser einen tieferen Blattknoten seitlich streift, auf die innere Seite des Holzkörpers, um den neueintretenden Platz zu machen, und gehen in einem folgenden, indem sich centraler und peripherischer Holzkörper an den zugekehrten Seiten öffnen und mit den Rändern an einander legen, so dass hier auch ein Zusammenhang der beiden Markkörper stattfindet, in den centralen Holzkörper über, die Verkettung der beiderlei Holzkörper vermittelnd und allmälig nach unten sich auskeilend und unter Anlegung an benachbarte Gefässbündel verschwindend.

Die andere Gruppe bilden jene Arten, bei welchen im regelmässigen Falle 8 peripherische Holzkörper den centralen vollständig umschliessen. An der Bildung der peripherischen Holzkörper nehmen hier auch die mittleren Blattspurstränge Antheil, oder, wie man die Sache zur stärkeren Hervorhebung des Unterschiedes auch ausdrücken kann, die Bildung der peripherischen Holzkörper geht hier unter Betheiligung der seitlichen Blattspurstränge gerade von den mittleren Blattspursträngen und ihren von den Achselproducten der Blätter herkommenden Begleitern aus, indem alle diese Stränge zwar zunächst in den centralen Holzkörper eintreten, alsbald aber, häufig schon in der Mitte oder selbst ober der Mitte desselben Internodiums oder in einem nächst tieferen als vorspringende Falte sich hervordrängen und nach Ablösung und Schliessung der Falte als peripherischer Holzkörper nach abwärts ziehen, welcher da, wo er an einem Blatte vorbeistreift, einen seitlichen Strang desselben in sich aufnimmt und andere nach innen abgibt, bis er endlich hart über einem Blatte auf dessen Mitte er trifft, im regemässigsten Falle dem acht-unteren, ganz in den centralen Holzkörper übergeht. Hier ist die Fläche, auf welcher das Blatt sitzt, unter demselben deutlicher als ober ihm entwickelt.

Es mag ein specieller Fall mit Maassangaben angeführt sein.

An einem regelmässig gewachsenen, 1,5 cm im Durchmesser haltenden, macerirten Stammstücke von *Serjania grandiflora* Camb., mit 16 cm langen Internodien, ist 8 cm über dem Ursprung eines Blattes, respective Seitenzweiges, der centrale Holzring von 8 peripherischen Ringen gleichmässig umstellt. Hart über dem Seitenzweige endet der gerade auf diesen herabziehende peripherische Holzkörper, indem er sich mit dem centralen Holzkörper verbindet, zugleich mit der Zweigbasis und durch diese mit den beiden benachbarten, in das nächst untere Internodium sich fortsetzenden peripherischen Holzkörpern (namentlich dem der anodischen Seite) zusammenhängend. Zwischen den letzteren liegt unter der Blattinsertion der centrale Holzkörper in einer Vertiefung, unbedeckt von einem peripherischen, bis sich in der Mitte dieses Internodiums ein neuer peripherischer Holzkörper aus ihm erhebt und frei macht, so dass für die untere Hälfte des Internodiums die Zahl der peripherischen Holzkörper nun wieder auf 8 erhöht erscheint. An der Basis des Internodiums trifft dann über dem hier stehenden, um $^3/_8$ des Stengelumfanges seitswärts gegen das obere verschobene Blatt die Verschmelzung den nach der gleichen Seite hin (nach dem kurzen Wege) drittnächsten (nach dem

langen Wege fünftnächsten) der peripherischen Holzkörper. So auch bei *Serj. fuscifolia*, wie die Figur 7 Tafel I ersichtlich macht, bei welcher aber das Hervortreten eines peripherischen Holzkörpers unter dem Blatte ganz nahe diesem, über der Mitte des Internodiums, stattfindet. In jedem Internodium findet man also bei *Serj. grandifolia* über der Mitte 7, unter der Mitte 8 peripherische Holzkörper, und jeder peripherische Holzkörper läuft als solcher durch $7^1/_2$ Internodien fort, nur da wo er an einer Blatt- respective Zweigbasis seitlich hart vorüberzieht, unter Aufnahme der seitlichen Blattspur mit dieser Basis und durch sie mit dem darüber endigenden peripherischen und dem den letzteren aufnehmenden centralen Holzkörper eine kurze Verbindung eingehend, bis er endlich selbst in diesen übergeht.

Verlaufen die peripherischen Holzkörper bei $^2/_5$ Stellung der Blätter anstatt durch einen Cyclus durch deren 2, also durch 10 Internodien, so sind in jedem Internodium 10 derselben zu finden. Das kann, da die Blattstellung an demselben Zweige wechselt, neben dem vorhin betrachteten Verhalten an einem Zweige sich finden.

Die mannigfachen Modificationen, Zwischen- und Uebergangsstufen, treten nun, wie die Figuren auf Tafel III und IV vergegenwärtigen, im Anschlusse an die erste, wie die zweite Gruppe in der Weise auf, dass bei gewissen Arten die Bildung und die Endigung der peripherischen Holzkörper im Zusammenhange mit der Blattstellung mit minder grosser Regelmässigkeit oder eben nach etwas anderen Regeln erfolgt, die Zahl derselben also verringert, oder umgekehrt durch gesondertes Herabziehen derselben auf längere Strecken vermehrt sein kann. Beides kann auch bei derselben Art, ja derselben Pflanze und an demselben Zweige stattfinden, und namentlich ist häufig in dem unteren Theile der Zweige, an deren Basis der Holzkörper, wie an der Basis der Hauptaxe, durch Verschmelzung aller gesonderten Ringe zu einem einfachen wird, eine Verminderung der peripherischen Holzkörper anzutreffen, so dass stets am besten die Mitte eines Zweiges und hier wieder die Mitte eines Internodiums zur Untersuchung gewählt wird. [1]) Weiter kann durch Verschmelzen benachbarter Holzkörper ausser ihrer Zahl auch ihre Gestalt verändert sein.

Um auf einige bestimmte Fälle hinzuweisen, so ist in der Regel der eine oder der andere der 3 peripherischen Holzkörper durch ein Paar dicht nebeneinander stehender ersetzt bei *Serj. glabrata* (Taf. III, Fig. 12), *polyphylla*, *paniculata* u. s. w. (sieh weiter unten die Zusammenstellung der Arten in engere Gruppen), mitunter auch bei *Serj. lethalis* (s. Taf. I, Fig. 3 im Vergleich mit 4), *grandis*, *triquetra* und anderen Arten mit $^2/_5$ Stellung der Blätter. Stark verbreiterte, aus der Verschmelzung zweier hervorgegangene peripherische Holzkörper finden sich namentlich bei *Serj. atrolineata*

---

1) Schon Crüger hat hierauf aufmerksam gemacht (Bot. Zeitung 1851, p. 488), sowie auf ähnliche Abweichungen bei nicht rankenden Individuen, zu welchen in der Regel cultivirte Pflanzen zählen. Bei cultivirten Exemplaren der *Serj. caracasana* findet man häufig nicht mehr als 2—3 peripherische Holzkörper, statt 8—10, bei solchen von *Serj. paucidentata* (siehe diese) statt 3 stellenweise 1—2, stellenweise keinen.

(*scatens*, Taf. IV, Fig. 15). Eine Verminderung der peripherischen Holzkörper auf zwei oder auf einen zeigen gelegentlich *Serj. trichomisca* (Taf. III, Fig. 7), *marginata*, *piscatoria* und andere.

Bei *Serj. Laruotteana* aus der zweiten Gruppe (sieh Taf. I, Fig. 8—11) tritt oft sehr tief erst unter einem Blatte und nicht unter allen Blättern der peripherische Holzkörper hervor, so dass die Zahl derselben sehr verringert und der Querschnitt des Stammes zu einem gänzlich unregelmässigen und gelegentlich dem einer Art aus der ersten Gruppe ähnlich wird.

Solche Besonderheiten lassen sich, wo sie als Unregelmässigkeiten auftreten, bei einiger Erfahrung leicht als solche erkennen, und ein wesentliches Hilfsmittel dabei bildet die Beachtung solcher Eigenthümlichkeiten der Gestaltung, der gegenseitigen Grösse und der Lagerung der einzelnen Holzkörper, ferner der gesammten Zweiggestalt und der Ausbildung einzelner Theile, z. B. des Sclerenchymringes, wie sie in den beifolgenden Figuren der Tafeln III und IV zur Darstellung gebracht sind.

Diese Figuren (1—28) sollen eine Uebersicht über die bei *Serjania* vorkommenden Verhältnisse anomaler Stammstructur gewähren.

Es bedürfen dieselben im Einzelnen kaum einer weiteren Erklärung, als sie in der Characteristik der betreffenden Arten schon enthalten ist.

Sie sind bei 15 facher Vergrösserung nach Zweigdurchschnitten mit dem Prisma von meinem früheren Assistenten Sebald gezeichnet. Da es sich in denselben wesentlich nur um die Darstellung des Holzkörpers handelte, so ist auch nur dieser durch die Andeutung der Gefässe besonders hervorgehoben, die übrigen Theile sind nur durch Linien gegen einander abgegrenzt, oder nur da und dort, wo er mächtiger entwickelt ist, der (weiter unten näher zu betrachtende) Sclerenchymring durch Punktirung gekennzeichnet, wie bei *Serj. cuspidata* (Taf. III, Fig. 3), *Serj. confertiflora* (Taf. III, Fig. 8) etc. Nach diesen und der noch weiter ausgeführten Figur von *Serj. caracasana* (Taf. III, Fig. 10), deren histologische Einzelheiten bei stärkerer Vergrösserung die Tafeln V und VI, von welchen noch weiter die Rede sein wird, wiedergeben, ist die entsprechende Orientirung über die Bedeutung der von diesen Linien abgegrenzten Zonen leicht zu gewinnen. Es umgrenzt die innerste Linie das dünnwandige Mark oder die an dessen Stelle bei manchen Arten, was nicht weiter von Belang ist, auftretende Markhöhle; eine nächste die Markscheide, wo dieselbe als mächtigere Zone dickwandigen, dem Holze fast mehr als dem eigentlichen Marke ähnlichen Gewebes deutlich entwickelt erschien; nun folgt der Holzkörper; dann die durch zwei hart neben einander laufende Linien oder bei geringerer Entwicklung auch nur durch die Grenzlinie des Holzes selbst angedeutete, meist dunkler gefärbte, secundäre Rinde; dann der Sclerenchymring; endlich die parenchymatöse äussere Rinde. Das Grundgewebe ist in der Zeichnung von *Serj. caracasana*, Taf. III, Fig. 10, schematisch durch kleine Strichelchen angedeutet, in den übrigen Figuren lediglich durch einen leeren Raum oder bei geringer Entwicklung überhaupt gar nicht. Das Mark der peripherischen Holzkörper ist meist nur durch die

von Gefässen freie Stelle angedeutet und nur in einzelnen Fällen besonders abgegrenzt oder durch Schattirung gekennzeichnet.

Die in den Figuren dargestellten Arten sind auf den beiden Tafeln III und IV in fortlaufender Nummerirung von Figur 1—28 nach ihrer systematischen Stellung geordnet, um das Wiederkehren bestimmter Typen in verschiedenen Sectionen, aber in mehr oder minder weit gehenden Variationen, hervortreten zu lassen. Alle Arten, welche lediglich Wiederholungen ohne sie charakterisirende Eigenthümlichkeiten dargeboten hätten, sind weggelassen, sollen aber hier in Zusammenhang mit den ihnen ähnlichen — die des Supplementes am Schlusse — namhaft gemacht werden.

Um in entsprechender Ordnung mit der ersten Section zu beginnen, so sind bei gleichem Grundtypus *Serjania tenuis* (Taf. III, Fig. 1), *S. Regnellii* (Fig. 2), *S. cuspidata* (Fig. 3) und *S. communis* (Fig. 4) doch genügend unterschieden, um die Darstellung aller als angemessen erscheinen zu lassen, indem bei *S. tenuis* eine geringe Einsenkung der peripherischen Holzkörper in den centralen, bei *S. Regnellii* die Verdeckung der inneren Structur durch stärkere Rindenbildung, bei *S. cuspidata* die Hervorwölbung der Seitenflächen unter Rundung des centralen Holzkörpers, bei *S. communis* die ungleich sechsseitige Gestalt des centralen Holzkörpers und die Verbreiterung der 3 dieser Seiten aufgesetzten peripherischen und, wie der centrale, sich später mehr und mehr abrundenden Holzkörper (sieh Tafel I, Fig. 2 nach Materialien von Méllo n. 6, var. *α. mollis* der Monogr.) als besondere Eigenthümlichkeit hervortritt.[1]) Dagegen ist eine Darstellung der *Serj. hirsuta*, *stenopterygia*, *cardiospermoides* und *paludosa* als überflüssig erschienen, da die erste und die letzteren beiden sich ganz an *Serj. communis*, die zweite aber an *Serj. tenuis* anschliesst. Ebenso schliesst sich *Serj. dumicola* mit stumpferen Kanten an *Serj. leptocarpa* (Fig. 5) an, welche ihrerseits in der Gestalt des centralen Holzkörpers gleichsam die Mitte hält zwischen *Serj. communis* und *cuspidata* und vor beiden durch Rundung der peripherischen, als stumpfe Rippen vorspringenden Holzkörper ausgezeichnet ist. *Serj. chartacea* (Fig. 6) ist durch die 5 kantigen Zweige mit peripherischen Holzkörpern in dreien dieser Kanten, den stumpferen, und scheinbaren peripherischen Holzkörpern[2]) an den beiden schärferen

---

1) Diese Abrundung ist ebenso bei dem unter Gaudichaud (in den am Ende folgenden Litteraturnachweisen) erwähnten, an der breitesten Seite 3 cm messenden Stammstücke n. 23 (Mus. n. 1309) zu sehen, während der mittlere Holzkörper bei einem von Duchartre (a. ebendort a. O.) abgebildeten, fragweise auf *Serj. cuspidata* bezogenen, vielleicht aber ebenfalls zu *Serj. communis*, und nur zu einer anderen Varietät (var. *glabra*?) gehörigen Stammstücke von Claussen, n. 76, Mus. n. 2230, von 4 cm Seite, die Gestalt eines regelmässigen Sechseckes sich erhalten hat.

2) Die scheinbaren peripherischen Holzkörper stellen sich bei näherer Betrachtung als einzelne, über den Kreis der übrigen stärker vorgeschobene und durch stärkere Markstrahlen von den übrigen seitlich deutlicher abgegrenzte, kräftiger entwickelte Gefässbündel unter den Kanten des Zweiges dar, hinter welchen auch das der Dickwandigkeit seiner Zellen halber dem Holze mehr als dem Marke gleichsehende Markscheidegewebe weiter gegen die Peripherie herausgerückt erscheint.

Kanten gekennzeichnet, darnach gleichsam in die Mitte zwischen *Serj. leptocarpa* und *Serj. ichthyoctona* tretend. Bei *Serj. trichomisca* (Fig. 7) kommt Verminderung der peripherischen Holzkörper auf 2 (wenn auch nicht immer) vor, worin ihr *Serj. squarrosa* und die der V. Section angehörigen *Serj. marginata, erecta* und *dibotrya* in der Regel gleich oder noch zuvor kommen, wie unter den Arten Sedis dubiae die *Serj. piscatoria. Serj. confertiflora* tritt durch die seitlich zusammengedrückten, leistenartig vorspringenden peripherischen Holzkörper hervor und die Entwicklung der Zweigseiten zwischen ihnen zu scharfen Kanten; beides zeigt sich in noch gesteigertem Masse auch bei *Serj. thoracoides*, Sect. VI (Fig. 13), und *S. lamelligera*, Sect. IX.

Serj. mollis aus der II. Section steht einzig in ihrer Art da durch die starke Entwicklung des Sclerenchymringes über den peripherischen Holzkörpern und den dazwischen liegenden Zweigrippen, welche dadurch eine beträchtlich stärkere Abrundung und Wulstung erfahren als bei der sonst nahe kommenden *Serj. chartacea.*

In der III. Section ist der zusammengesetzte Holzkörper gar nicht vertreten, dafür aber der später zu betrachtende getheilte und der gelappte.

In der IV. Section schliessen sich *Serj. grandiflora, crenata, sphaerococca* und *Laruotteana* (letztere bei regelmässiger Entwicklung — unregelmässige stellt die Taf. I, Fig. 8—11 dar) mit bald mehr (*S. Laruotteana*) bald minder ausgesprochener Einbuchtung der peripherischen Holzkörper auf ihrer Aussenseite (*S. crenata*), ferner Serj. *adusta* und *Seemanni* an *Serj. caracasana* (Fig. 10) an, bei welcher ich an Kulturexemplaren die peripherischen Holzkörper auf 3 und selbst 2 reducirt gesehen habe. *Serj. pyramidata* (Fig. 11) ist durch die starke Verflachung der peripherischen Holzkörper ausgezeichnet. *Serj. aculeata* mit in den centralen etwas eingesenkten peripherischen Holzkörpern lässt sich, abgesehen von dem grösseren Durchmesser der Zweige, mit *Serj. tenuis* (Fig. 1) vergleichen.

Aus der V. Section sind *Serj. marginata, erecta* und *dibotrya* schon neben *Serj. trichomisca* (Fig. 7) erwähnt worden, der bei ihnen gewöhnlichen Verminderung der peripherischen Holzkörper halber.

Durch *Serj. glabrata* in der VI. Section, bei welcher die rundlichen, peripherischen Holzkörper an einer oder an zwei Seiten des centralen, stumpf dreieckigen paarweise aufzutreten pflegen, sind auch die gewöhnlichen Verhältnisse von Arten der VII. Section, *Serj. polyphylla* und *Serj. paniculata*, bei welchen eine Vermehrung der peripherischen Holzkörper bis auf 7 vorkommt, vergegenwärtigt, während *Serj. plicata* aus Section VI und *Serj. sinuata, crassinervis* und *equestris* aus Section VII gewöhnlich ohne Ver-

---

Solche scheinbare peripherische Holzkörper treten mit grosser Deutlichkeit auch bei gewissen Arten mit nicht zusammengesetztem Holzkörper auf, welchem sie dann das täuschende Ansehen eines zusammengesetzten verleihen: so bei *Serjania gracilis, dura, macrostachya, laxiflora, grandifolia, sordida, subtriplinervis, acuta, serrata* und *hamuligera* (sieh in der Monographie von *Serjania* Zusatz n. 2 zu *Serj. laxiflora* nebst dem Nachtrage hiezu, in welchem *Serj. nutans* zu streichen ist, ferner die Zusätze n. 1 zu *Serj. serrata* und *Serj. hamuligera*).

doppelung eines der 3 peripherischen Holzkörper ähnliche Verhältnisse wie *Serj. leptocarpa* (Fig. 5) zeigen. *Serj. thoracoides* aus Sect. VI (Fig. 13) ist schon neben *Serj. confertiflora* erwähnt worden, Sect. I (Fig. 8).

Serj. subdentata aus der Section VII ist ausgezeichnet durch die nicht selten in gleichen Abständen um den rundlichen centralen Holzkörper vertheilten 5 peripherischen Holzkörper, worin ihr nur *Serj. paniculata* gelegentlich gleichkommt; *Serj. atrolineata* (*S. scatens*) (Taf. II, Fig. 15) ferner durch die starke Verbreiterung der in flachen Mulden des dreischneidigen centralen eingelagerten peripherischen Holzkörper, von denen die zwei breiteren aus der Verschmelzung eines Paares hervorgegangen erscheinen, und der eine oder der andere gelegentlich auch durch ein solches ersetzt sein kann.

In der VIII. Section, in welcher alle Arten einen Kranz von peripherischen Holzkörpern besitzen, wie viele der um *Serj. caracasana* in der IV. Section sich gruppirenden Arten und wie weiter eine Artengruppe der XII. Section, macht sich im Vergleich mit Serj. caracasana und ihren Verwandten, einschliesslich Serj. pyramidata, eine Neigung zu stärkerer radialer Entwicklung der peripherischen Holzkörper geltend und damit zusammenhängend zur Entwicklung derselben als mehr oder minder vorspringender Rippen, während bei den analogen Arten der IV. Section die cylindrische Oberfläche des Zweiges kaum durch schwach eingedrückte Linien zwischen den peripherischen, mit breiter Aussenfläche versehenen Holzkörpern unterbrochen ist. Bei *Serj. oblongifolia* (Fig. 16) und der ihr sehr ähnlichen *Serj. ovalifolia* zeigen sich dem Gesagten nach die peripherischen Holzkörper auf dem Querschnitte nicht selten geradezu quadratisch und ihre Zahl ist in der Regel zugleich auf 10 vermehrt. Bei *Serj. amplifolia* ist unter Verkleinerung des centralen Holzkörpers die radiäre Streckung der peripherischen am bedeutendsten, die 10-Zahl derselben aber in der Regel nicht erreicht, sondern nur durch tiefe Einkerbung einzelner angebahnt. An sie schliessen sich wieder in stufenweise geringerer Ausprägung dieser Eigenthümlichkeiten *Serj. fuscifolia* (vergleiche Fig. 6, Taf. I) und *Serj. tenuifolia* an, die erstere nicht selten ausgezeichnet durch eine ebenso deutliche Entwicklung des Markes in den peripherischen, wie im centralen Holzkörper. Durch Ausbildung der peripherischen Holzkörper zu scharf hervorragenden Rippen ist *Serj. clematidifolia* ausgezeichnet. *Serj. crassifolia* (wie auch bisweilen *Serj. fuscifolia*) nähert sich ihr durch kräftige Entwicklung der Rippen. *S. pinnatifolia* zeigt im Gegensatze hiezu eine weit gehende Verflachung der Rippen an der Oberfläche des Zweiges und Verdeckung der inneren Structur dadurch.

Serj. perulacea (Fig. 19) aus der IX. Section ist einzig in ihrer Art durch die ungleiche Grösse der peripherischen Holzkörper und durch die Verflachung der grösseren, in welch letzterer Hinsicht sie nur noch von der später zu erwähnenden *Serj. insignis*, Sect. XII (Fig. 26), übertroffen wird. *Serj. lethalis* (sieh Taf. I, Fig. 3 und 4) mag mit Serj. tenuis wegen Einsenkung der peripherischen Holzkörper in den centralen verglichen werden, nur dass die peripherischen Holzkörper hier häufig, wie bei *Serj. glabrata*, verdoppelt sind. *Serj. scopulifera* wiederholt in derberer Form

die *Serj. leptocarpa*. *Serj. ichthyoctona* (Fig. 20) ist ausgezeichnet durch die nicht bloss über den peripherischen Holzkörpern sondern auch zwischen denselben zur Ausbildung kommenden scharfen Zweigkanten, so dass sie gleichsam in die Mitte zwischen *Serj. cuspidata* und *Serj. confertiflora* sich einschiebt; Gleiches gilt von *Serj. paucidentata*, *acutidentata*, *obtusidentata* und *lamprophylla*. *Serj. oxytoma* (Fig. 21) erinnert an *Serj. Regnellii* und *Serj. communis*, ist aber eigenthümlich durch die deutliche Sonderung der peripherischen Holzkörper in einen kleineren äusseren und einen grösseren inneren Theil mittelst stärker ausgebildeter Markstrahlen, wie sie auch bei *Serj. ichthyoctona* zu bemerken sind und wie sie bei anderen Arten wohl auch an älteren Stämmen, noch nicht aber mit gleicher Deutlichkeit an den Zweigen hervortreten.

Der X. Section gehören nur Pflanzen mit einfachem Holzkörper an.

Von den Arten der XI. Section mit zusammengesetztem Holzkörper mag *Serj. parvifolia* mit *Serj. glabrata* verglichen sein, während *Serj. mucronulata* und *inflata*, mit je 3 peripherischen Holzkörpern, durch schärfere Kantenbildung eine Hinneigung zu *Serj. ichthyoctona* zeigen. *Serj. rigida* ist mit *Serj. communis* zu vergleichen. *Serj. sufferruginea* (Fig. 22), welche in diese Section aus der XII. zu versetzen ist (sieh im später Folgenden), kommt durch Verbreiterung der übrigens nur in der Dreizahl vorhandenen peripherischen Holzkörper ohne gleichzeitige Einsenkung der *Serj. perulacea*, Sect. IX (Fig. 19), und *Serj. insignis*, Sect. XII (Fig. 26), nahe.

In der XII. Section sind mehrere Arten durch tangentiale Dehnung und Verflachung der peripherischen Holzkörper und stärkere oder geringere Einsenkung derselben in den centralen ausgezeichnet. So *Serj. curassavica* (Fig. 23) und *deltoidea* (Fig. 24). An *Serj. deltoidea* schliesst sich *S. Schiedeana*, *triquetra* und *brachystachya* an, wie auch noch *S. diffusa*, mit geringerer Verbreiterung, und *S. grandis*. Die stärkste Verflachung zum Theile paarweise gruppirter peripherischer Holzkörper (in der Zahl von 5) findet sich bei der neben *Serj. perulacea* in Sectio IX schon genannten *S. insignis* (Fig. 26). Die übrigen zeigen Verhältnisse wie bei *S. leptocarpa*, nämlich *S. dasyclados*, und wie bei *S. glabrata*, nämlich *S. peruviana* und *goniocarpa* (letztere mit 3 Paaren); ferner annähernd wie bei *S. ichthyoctona* — so *S. impressa*, *rufa*, *rhombea*, *clematidea* (Fig. 25, mit 3 Paaren) und *trachygona*, gelegentlich unter Verdoppelung eines oder zweier oder selbst aller 3 peripherischen Holzkörper (letzteres, wie schon angegeben, bei *Serj. goniocarpa* und *S. clematidea*). Eine Abbildung von *Serj. clematidea* soll das veranschaulichen.

Es bleiben noch die Arten der Section XII mit einem Kranze von peripherischen Holzkörpern zu erwähnen: *Serj. noxia*, *multiflora*, *purpurascens* und *nigricans*. Von diesen nähert sich die erstgenannte durch die drehrunden, nicht gerippten, nur feingestreiften Zweige der *Serj. caracasana*; die nächsten beiden sind kaum zu unterscheiden von *Serj. oblongifolia*, *ovalifolia* und *fuscifolia*; *Serj. nigricans* nähert sich durch stärkere seitliche Isolirung der peripherischen Holzkörper an der Oberfläche des Zweiges der *Serj. clematidifolia*.

Aus der Reihe der Arten zweifelhafter Stellung schliesst sich, wie schon erwähnt, *Serj. piscatoria*, mit gewöhnlich nur zwei Holzkörpern, an *Serj. trichomisca*, *marginata* etc. an; *Serj. nodosa* und *inebrians*, mit 3 peripherischen Holzkörpern, an *Serj. leptocarpa* und die dieser ähnlichen Arten; *Serj. circumvallata* an *Serj. lethalis*; *Serj. nutans* vielleicht mehr an *Serj. rhombea* mit schärferer Kantenbildung. *Serj. acuminata* gleicht vollständig der *S. glabrata*. *Serj. brachyphylla* endlich mag mit *S. atrolineata* oder auch mit *S. caracasana* verglichen sein, obwohl nur 5 peripherische Holzkörper an dem übrigens sehr mangelhaften Materiale wahrzunehmen waren.

Von den in diesem Supplemente erst aufgestellten Arten schliesst sich *Serj. viridissima* an *Serj. tenuis* und *stenopterygia* an; *S. subrotundifolia* an *oblongifolia*; *S. lamelligera* an *thoracoides*; *S. peruviana* an *glabrata*.

Soll ich, obwohl die Gefahr nahe liegt, dass daraus Missnahmen sich ergeben möchten, die Arten mit zusammengesetztem Holzkörper nach dem gewöhnlichen Verhalten desselben in Gruppen ordnen, so ergibt sich folgende Uebersicht:

A. Peripherische Holzkörper scharfkantig vorspringend, 3—6:
   a. Zu dritt vorhanden: Sect. I: S. Regnellii, cuspidata, communis, hirsuta, cardiospermoides, paludosa; Sect. IX: S. oxytoma; Sect. XI: S. rigida.
   b. „ ; ausserdem noch weitere scharfe Kanten vorhanden: Sect. IX: S. ichthyoctona, paucidentata acutidentata, obtusidentata, lamprophylla;' Sect. XI: S. mucronulata, inflata; Sect. XII: S. impressa, rhombea, trachygona; Spec. sed. dub.: S. nutans?
   c. „ ; „ ; die peripher. Holzkörper leistenartig: Sect. II: S. confertiflora; Sect. VI: S. thoracoides; Sect. IX: S. lamelligera.
   d. Meist mehr als drei; „ : Sect. XII: S. rufa, clematidea.

B. Peripherische Holzkörper minder scharfkantig, meist stumpfe Rippen bildend, 3—7:
   a. Drei oder gewöhnlich drei: Sect. I: S. dumicola, leptocarpa; Sect. VI: S. plicata; Sect. VII: S. sinuata, crassinervis, equestris; Sect. IX: S. scopulifera; Sect. XII: S. dasyclados; Spec. sed. dub.: S. nodosa, inebrians.
   b. „ ; daneben noch weitere stumpfe Kanten: Sect. I: S. dura; Sect. II: S. mollis.
   c. Gewöhnlich mehr als drei: Sect. VI: S. glabrata; Sect. VII: S. polyphylla; Sect. XI: S. parvifolia; Sect. XII: S. peruviana, goniocarpa; Spec. sed. dub.: S. acuminata.
   d. Nicht selten 5 gleichmässig vertheilte: Sect. VII: S. subdentata, paniculata.

C. 3(—5) mehr oder minder in den centralen eingesenkte peripherische Holzkörper (mitunter verbreitert):
   Sect. I: S. tenuis, viridissima, stenopterygia; Sect. IV: S. aculeata; Sect. VII: S. atrolineata; Sect. IX: S. lethalis; Sect. XII: S. grandis, diffusa, Schiedeana, triquetra, brachystachya, curassavica; deltoidea; Spec. sed. dub.: S. circumvallata.

D. Gewöhnlich nur 1—2 peripherische Holzkörper vorhanden (öfters etwas eingesenkt):
   Sect. I: S. trichomisca, squarrosa; Sect. V: S. marginata, erecta, dibotrya; Spec. sed. dub.: S. piscatoria.

E. Stark verbreiterte, nicht eingesenkte peripherische Holzkörper:
a. Drei: Sect. XI: S. sufferruginea.
b. Meist fünf: Sect. IX: S. perulacea; Sect. XII: S. insignis.

F. Gewöhnlich 8—10 (mitunter wenigere) in einen Kranz gestellte peripherische Holzkörper (in Sect. VIII und XII öfters als Rippen vorspringend):
Sect. IV: S. caracasana, grandiflora, crenata, sphaerococca, Laruotteana, pyramidata, adusta, Seemanni; Sect. VIII: S. ovalifolia, oblongifolia, subrotundifolia, tenuifolia, fuscifolia, amplifolia, clematidifolia, crassifolia, pinnatifolia; Sect. XII: S. noxia, multiflora, purpurascens, nigricans; Spec. sed. dub.: S. brachyphylla?

Was die histiologischen Verhältnisse der Zweige und Stämme von *Serjania*-Arten mit zusammengesetztem Holzkörper betrifft, so sind dieselben aus den nach Quer- und Längsschnitten von *Serj. caracasana* bei 250 facher Vergrösserung gefertigten Zeichnungen der Tafel V, Figur 1—3 und der Tafel VI Fig. I, zu welchen die Figurenerklärung zu vergleichen ist, zu ersehen.

Ich bemerke darüber Folgendes.

Jeder Holzring ist ringsum von Cambium und Bast umgeben, in welchem je nach den verschiedenen Arten bald reichlicher, bald spärlicher Bastfasern (b) mit bald mehr, bald weniger verdickten Wandungen neben zahlreichen Siebröhren (si), gerbstoffführenden, langgestreckten Bastparenchymzellen (bp) und Reihen krystallführender Zellen (k) enthalten sind.

Der Bast erscheint verstärkt durch einen an der Grenze von primärer und secundärer Rinde parallel mit der Oberfläche der Axe sich hinziehenden Ring sclerenchymatischer Fasern (sc) und zwischen diese, namentlich an den eingebuchteten Stellen zwischen den Holzringen, eingelagerter Gruppen von Steinzellen (Taf. V, Fig. 1 st). Derselbe überdeckt nur die äussere Seite der verschiedenen Holzringe, soweit sie der Stammperipherie nahe liegen, und zieht sich nicht zwischen dieselben fort. Zwischen ihm und dem Baste der Holzringe findet sich noch, wie auch zwischen den beiderseitigen Basttheilen da, wo die Holzringe (mit ihrer Bastbedeckung) einander zugekehrt sind, ein dort oft nur einschichtiges, hier mehrschichtiges, kurzgliedriges Gewebe, welches sich als fortbildungsfähig erweist (Taf. V und VI, bi), und welchem, wie auch dem Baste, zahlreiche Gerbstoffschläuche (bei manchen Arten in concentrischen Zonen) eingebettet sind, sowie langgestreckte Secretzellen (Milchsaftschläuche, s) mit gummiharzartigem, in der lebenden Pflanze als Milchsaft erscheinendem Inhalte.

Dieses Gewebe, in welchem später Neubildungen auftreten, ist wohl als ein Theil des Grundgewebes zu betrachten, gleichwie auch der aussen ihm angeschlossene Sclerenchymring, mit dem es den innersten Theil der primären Rinde darstellt. [1]) Der äussere

1) Es entspricht diese Auffassung derjenigen, welche abweichend von De Bary in neuerer Zeit Krüger (Beiträge zur Kenntniss der anomalen Holzbildungen, Diss. Leipzig 1884) rücksichtlich des Gewebes ausgesprochen hat, in welchem bei Gnetum (p. 17) — innerhalb des Sclerenchymringes zwar, aber nicht in „äusseren, älteren Zonen des Secundärbastes“ (wie De Bary annahm), „sondern in der innersten Schichte der Aussenrinde“ — die neuen Gefässbündel ihre Entstehung nehmen. (Ebenso vielleicht auch bei *Phytolacca?*)

Theil dieser besteht aus wenig Parenchym (p) und Collenchym (co), das zum Theile aus gestreckten, faserartigen Zellen gebildet ist (f). Die an die Aussenseite des Sclerenchymringes sich anlehnende Parenchymschichte der primären Rinde enthält in zahlreichen Zellen Krystalle von oxalsaurem Kalk. Die zugespitzten Faserzellen des Sclerenchymringes führen zum Theil Gerbstoff (auf den Tafeln durch Schattirung angedeutet), ebenso die Markstrahlzellen und viele Markzellen.

Von den Markzellen erscheinen die der peripherischen Ringe gestreckt, ähnlich denen der Markscheide im centralen Ringe.

Das Holz des centralen und der peripherischen Ringe zeigt keine bemerkenswerthe Verschiedenheit. Es ist reich an weiten, mit Hoftüpfeln, oder da, wo sie mit Holzparenchym in Berührung stehen, mit einfachen Tüpfeln versehenen Gefässen (g) mit ziemlich horizontal gelegenen Rändern der vollständig resorbirten Scheidewände und enthält in gekammerten Fasern Krystalle (kh). Die viel reichlicher als das Holzparenchym entwickelten Prosenchymzellen (pr) besitzen schief spaltenförmige Tüpfel. In den peripherischen Ringen ist das Holz gewöhnlich an der dem Centrum der Axe zugekehrten Seite gefässreicher und stärker als an der äusseren entwickelt, das Mark hier also excentrisch, etwas nach aussen geschoben. Markständiges Bastgewebe habe ich nirgends deutlich entwickelt gefunden. Es finden sich wohl auf der inneren Seite der Gefässbündel Gruppen dünnwandiger, gestreckter Zellen (Taf. V, d), doch waren in diesen Gruppen deutliche Siebröhren nicht aufzufinden. Die von Naegeli p. 70, in der Figurenerklärung zu Tab. VI, Fig. 16, als Siebröhre bezeichnete weitere Zelle mit dunklem Inhalte war wohl nur eine gerbstofführende Zelle. Ob solche Gruppen dünnwandigen Gewebes als Rudimente markständigen Bastgewebes aufgefasst werden dürfen, bleibt dahingestellt (s. die Untersuchungen von Solereder über die Holzstructur, 1875, p. 30, 31; p. 122).

In dem Sclerenchymringe bilden sich in Folge des Anwachsens des von ihm umschlossenen Zweiginneren Klüfte, in welche die äusseren und inneren ihm anliegenden Parenchymzellen (wie die Figuren 2 und 3 der Tafel V veranschaulichen) Fortsätze einschieben. Durch Umbildung dieser zu gesonderten Zellen, welche früher oder später die Natur von Steinzellen annehmen, werden die Klüfte wieder geschlossen, indem zugleich die Zahl der Steinzellen stetig vermehrt wird.

Das fortbildungsfähige Grundgewebe an der Grenze des Bastes wird bei vielen der betreffenden Gewächse nach einer grösseren oder geringeren Zahl von Jahren sowohl zwischen den verschiedenen Holzringen als besonders an deren äusserer, gegen die Gesammtperipherie gewendeten Seite zum Bildungsherd neuer, secundärer Holzbündel und Holzringe, welche als Verstärkungen zu den gleichzeitig durch die Thätigkeit ihres Cambiums sich verdickenden primären (centralen und peripherischen) Holzringen (resp. Gefässbündelringen) hinzutreten, ohne mit diesen eine directe Verbindung einzugehen (sieh Taf. I, Fig. 11, in welcher der centrale und die peripherischen Holzringe an der grösseren Querschnittsfläche und an der radiären Anordnung der Markstrahlen leicht von den secundären zu unterscheiden sind).

Ueber ihre Entstehung kann ich nur wiederholen, was ich darüber schon früher mitgetheilt habe (sieh den oben citirten Bericht der 50. Versammlung deutscher Naturforscher). Nach vorausgehender Erfüllung des betreffenden Grundgewebes mit Amylum tritt in einer beschränkten Partie desselben Zelltheilung auf und diese führt zur Bildung einer cambialen Zellgruppe, eines Procambiums, wenn man es so nennen will, welches durch farblose Wandungen vor dem umgebenden Gewebe ausgezeichnet ist. Die Bildung dieses Procambiums schreitet nun (wie bei *Serj. Laruotteana* beobachtet wurde), zunächst einseitig, und zwar für die an der Peripherie des Stammes auftretenden secundären Holzringe oder Holzkörper nach aussen vor. Aus seinen innersten, zuerst gebildeten Zellen geht hier nicht ein Mark, sondern unmittelbar Holz, aus den äusseren Bast und zwischen beiden Reihencambium hervor, aus welchem sich Holz und Bast, zunächst bis zur Erreichung eines Durchmessers von 2—3 mm, fortbilden. Bis dahin stellt sich somit der secundäre Holzkörper nicht als Holzcylinder, sondern als Holzplatte dar. Erst jetzt entsteht ein neues Procambium, und daraus eine neue solche Platte nach innen von der ersteren. Zwischen beiden bleibt an Stelle eines eigentlichen Markes eine Partie des hier ziemlich mächtigen und wohl auch durch gelegentliche Theilung einzelner Zellen vermehrten Grundgewebes übrig. Erst allmälig nähern sich die seitlichen Ränder beider Platten, um mehr oder weniger zu einer Art Holzcylinder zusammenzuschliessen. Andere Theile des Grundgewebes erhalten sich als Anfänge primärer Markstrahlen, welche in radialer Richtung die beiden Platten durchsetzen, oder wenn man es so lieber ausdrücken will, die innere sowohl als die äussere Platte geht aus mehreren neben einander liegenden und durch schmale Streifen des Grundgewebes getrennt bleibenden, isolirt auftretenden Procambium-Partien (Gefässbündeln) hervor. Das dem Marke entsprechende Gewebe dieser secundären Holzkörper ist also nicht eine vollständige Neubildung.

Später bleibt die äussere, mit ihrem Baste gegen die Peripherie des Stammes gekehrte Partie des secundären Holzkörpers — entgegen ihrem früheren Verhalten — im Wachsthume hinter der inneren zurück, so dass das Mark schliesslich excentrisch nach aussen zu liegen kommt.

In Folge reichlichen Auftretens solcher secundärer Holzkörper ordnen sich dieselben hier in eine den Stamm rings oder doch auf beträchtliche Strecken umziehende Zone. An der Aussenseite der ersten kommt später eine zweite solche Zone u. s. f. zur Entstehung, wobei aber die erst gebildeten Bündel oder Platten nicht immer mehr durch nachfolgende innere zu Ringen ergänzt zu werden scheinen (sieh Figur 11, Taf. I und die Figuren 16 und 20 von Crüger auf Taf. VIII der Bot. Zeitung von 1851, welche wahrscheinlich auf *Serj. paucidentata* DC. sich beziehen).[1])

---

1) In Hofmeister's Handbuch III, resp. De Bary's Vergleichender Anatomie, 1877, p. 600 wird diese Abbildung Crüger's auf *Thinouia* bezogen, was unrichtig ist, wie auch die dortige Darstellung der weiter unten darzulegenden Anomalie dieser Gattung überhaupt.

Die nicht an der Peripherie des Stammes, sondern im Grundgewebe zwischen dem centralen und den peripherischen primären Holzkörpern auftretenden secundären Holzkörper zeigen eine andere Orientirung ihrer Wachsthumsrichtung. Hier ist es eine innere mit ihrem Baste dem centralen Holzkörper zugekehrte Holzplatte, welche zuerst entsteht und die folgende an Intensität des Wachsthums längere Zeit übertrifft. Niemals übrigens erreichen diese intermediären (secundären) Holzkörper die gleiche Grösse, wie die an der Peripherie des Stammes gelegenen. Ihr Wachsthum wird durch die geringere Nachgiebigkeit ihrer Umgebung auf ein verhältnissmässig geringes Maass beschränkt.

Die an der Peripherie gelegenen secundären Holzkörper anastomosiren wenigstens seitlich unter einander, wie schon äusserlich an den von ihnen gebildeten vorspringenden Wülsten zu erkennen ist, mit denen sie den inneren Theil des Stammes wie mit einem Netzwerke umziehen, so dass dann der zusammengesetzte Holzkörper mit dem der dritten Anomalie, dem „umstrickten Holzkörper", combinirt erscheint oder in manchen Fällen noch mehr mit der als „umkleideter Holzkörper" oben (p. 4) bezeichneten Anomalie.

In histiologischer Beziehung zeichnen sich die secundären vor den primären Holzringen dadurch aus, dass ihnen, da sie erst nach vollendeter Streckung des Stammes entstehen, ebenso gut, wie den in dieser Hinsicht analogen secundären Gefässbündeln der Menispermaceen oder der baumartigen Liliaceen (*Dracaena* etc.) abrollbare Gefässe fehlen; sie besitzen nur Tüpfelgefässe, welche sich, wenigstens die inneren, auch durch Kürze der sie zusammensetzenden Gefässzellen auszeichnen.

Die zweite der bei den Sapindaceen vorkommenden Anomalieen ist diejenige, welche ich bei nur 5 einander nahe verwandten Arten gefunden und durch die Bezeichnung getheilter Holzkörper, corpus lignosum divisum, hervorgehoben habe (a. d. oben ang. Orten, 1868 und 1874). Bei den betreffenden Arten, *Serjania deflexa* Gardner, *S. elegans* Camb., *S. paleata* m., *S. corrugata* m. (Taf. IV, Fig. 27) und *S. paradoxa* m. (Taf. IV, Fig. 28) sind die Gefässbündel in 5 annähernd gleich grosse, das Mark umgebende und gegen dieses offene Ringe oder Falten geordnet, die mit ihren äusseren Theilen die 5 gleich grossen Rippen, in welche die Zweigoberfläche gegliedert ist, bilden, wenn nicht, wie bei *Serj. paradoxa* (sieh Taf. IV, Fig. 28) durch Ausfüllung der spitzwinkelig einspringenden Buchten oder Furchen zwischen den Rippen von Seite des Rindengewebes diese Gliederung verdeckt wird und die Oberfläche des Zweiges cylindrisch gestaltet ist. Ein centraler Holzring oder Holzkörper ist nicht vorhanden. Die in $^2/_5$ Stellung befindlichen Blätter stehen mit der Mitte ihrer Basis je über einer solchen Zweigrippe, in welche der mittlere Blattspurstrang und die von den Achselproducten der Blätter (Rankenzweig und Innovationsknospe) kommenden Gefässbündel eintreten, während die seitlichen Blattspurstränge in Bögen unter der Rinde nach den benachbarten Rippen, welche von der Mitte höher stehender Blätter nach abwärts ziehen, sich wenden und in diese eintreten. Jede Rippe läuft durch 5 Internodien nach abwärts und endet über dem sechst- unteren Blatte, indem sie sich verflacht

und ihre Gefässbündel theils an die benachbarten Rippen, theils an die unter diesem Blatte neu auftretende Rippe abgibt. Andere Anastomosen als in den Blattknoten, zwischen den hier dem Blattursprunge zunächst liegenden Rippen, finden nicht statt. Es lassen sich diese Rippen demnach den peripherischen Holzringen oder Holzkörpern bei jenen Arten vergleichen, bei welchen sie den centralen Holzkörper im Kranze umgeben, jeder unter vorzugsweiser Antheilnahme eines mittleren Blattspurstranges unter einer Blattinsertion entspringend und über dem entsprechenden Blatte des nächst unteren Cyclus endend. In ihrem Innern sind diese Rippen (Falten) oder partiellen Holzkörper, wie sie füglich zu nennen sind, von Mark oder Markscheidegewebe erfüllt, welches, auf dem Querschnitte betrachtet, durch eine Art Stiel oder Isthmus mit dem Hauptmarke des Zweiges zusammenhängt. Bis auf diese Stelle sind die partiellen Holzkörper von Cambium, Bast und zwischen die Bastringe eingeschobenem Grundgewebe umgeben, welches auch unter dem sie alle an der Zweigperipherie überdeckenden Sclerenchymringe sich fortzieht. Durch Neubildung in den Markscheide- und Markzellen an der als Isthmus bezeichneten Stelle ergänzt sich nun das Cambium für jeden partiellen Holzkörper alsbald zu einem vollständigen Ringe, den Isthmus durchschneidend und durch Holz- und Bastbildung auch an der durchschnittenen Stelle jeden partiellen Holzkörper nun zum vollständigen Holz- und Bastringe ausgestaltend. Das Mark kann dabei in einzelne, den einzelnen Holzkörpern zuwachsende Parzellen durchschnitten werden, oder es kann ein Rest desselben in der Mitte des Zweiges und in Verbindung mit dem Grundgewebe sich erhalten. Ein stellenweiser Zusammenhang desselben mit den Mark-Portionen der Holzkörper ist dabei nicht ausgeschlossen, wie mir ein Abschnitt eines älteren Stammstückes von elliptisch gewordenem Querschnitte und 6 auf 3 cm Querdurchmesser zeigt, Mus. n. 2221, Claussen n. 67 aus Brasilien, welches wohl zu *Serjania paradoxa* (oder *S. elegans*) gehört.

Es übrigt noch hinzuzufügen, dass auch hier an der Zweigperipherie unter dem starken Sclerenchymringe, wie in dem Grundgewebe zwischen den partiellen Holzkörpern bald früher bald später, und schon an Federkiel dicken Zweigen, secundäre Holzbündel auftreten können, die als solche, und ohne zu secundären Holzringen sich ergänzt zu haben, auch an dem erwähnten älteren Stammstücke sich finden, 2—3 mm stark.

Die histiologischen Verhältnisse sind ganz ähnliche wie bei den übrigen *Serjania*-Arten; namentlich finden sich reichlich, auch beim älteren Stammstücke, die charakteristischen Milchsaftschläuche.

Die dritte Anomalie bei den Sapindaceen, den umstrickten Holzkörper, corpus lignosum circumseptum, habe ich bei der Gattung *Thinouia* nachzuweisen Gelegenheit gehabt.

Es ist dieselbe, welche Netto (1863, sieh die Litteraturangaben am Ende) als zweite Anomalie, aber für eine vermeintliche *Serjania*, wie auch Lestiboudois und Andere, welche auf Netto's Angaben fussten, erwähnt hat, und auf welche sich schon Mittheilungen von Richard (1838) und Abbildungen von Gaudichaud (1841, Tab. XIII, Fig. 1, Tab. XVIII, Fig. 14), sowie eine von De Bary 1877 unter 231,

p. 598 wiedergegebene Figur Schleiden's (1846, Fig. 150) und eine Abbildung von Duchartre (Fig. 83, 1867) bezieht (sieh die betreffenden Litteraturangaben am Ende).

Ich konnte sie am vollständigsten an jüngeren und älteren Zweig- und Stammstücken von *Thinouia ventricosa* m. (sieh Radlkofer in Atti etc. 1874, p. 63 und über *Sapindus*, in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie 1878, p. 282) verfolgen, welche in Brasilien Correa de Méllo (*Sapindacea* n. 7) gesammelt und Bureau mir mitgetheilt hat (sieh Taf. II, Fig. 12—14). Sie findet sich auch bei *Thinouia mucronata* m. (über *Sapindus*, l. c. p. 282, coll. Mosén n. 3953); ferner bei *Thinouia scandens* Tr. et Planch. (*Thouinia scandens* Camb.), wenn ich anders mit Recht dahin ein der Fig. 15, Taf. II zu Grunde liegendes Stammstück mit schwächerer Ausbildung des Bastes rechne, welches Warming in Brasilien bei Lagoa Santa, wie auch Fruchtexemplare der gleichen Art, forma *caudata* m. (neben Exemplaren von *Thinouia ternata* m. l. c.) gesammelt hat, und überhaupt wahrscheinlich bei allen Arten dieser Gattung. Entsprechende Stammstücke, wahrscheinlich zu *Th. ventricosa* gehörig (mit starker Bastentwicklung) liegen noch vor aus der Sammlung von Gaudichaud, n. 48, Mus. n. 1314 und aus der Holzsammlung von Martius (aber kaum von ihm selbst gesammelt) n. 163 (Rio de Janeiro).

Es besteht diese Anomalie darin, dass nach mehreren Jahren in der Umgebung des bis dahin regelmässig entwickelten Holzkörpers, welcher in Folge zonenweise gehäufter Gefässe eine Art Jahresringe bald mehr bald weniger deutlich erkennen lässt, secundäre Holzringe als Neubildungen der Rinde auftreten, welche von Markstrahlen durchzogen sind und ein quergedehntes, schmal halbmondförmiges, mit seiner Convexität der Stammperipherie zugekehrtes, neuentstandenes Markgewebe umschliessen (sieh Taf. II, Fig. 14, 15 und die schon oben erwähnten Figuren Gaudichaud's, Schleiden's, De Bary's und Duchartre's). Sie werden auf ihrer äusseren Seite durch frühere oder spätere Wiederholung solcher Neubildung von weiteren Holzringen überlagert (Taf. II, Fig. 15), während sie selbst durch das rings sie umgebende Cambium, gleichwie der von ihnen umgebene ursprüngliche Holzkörper, dauernd in die Dicke wachsen. Diese Holzringe, welchen selbstverständlich Spiralgefässe in der Umgebung des Markgewebes fehlen, umziehen in bald senkrechter bald schiefer Richtung und mehrfach seitlich mit einander anastomosirend den ursprünglichen, fortwachsenden Holzkörper, so dass der letztere förmlich von denselben umstrickt erscheint. Die ersten Spuren dieser Neubildungen zeigen sich bereits an 7,5 mm dicken Axen mit 6,5 mm dickem Holze.

Ihre Entwicklung habe ich schon früher, wie folgt, geschildert (sieh Bericht der 50. Naturforscherversammlung, 1877 p. 195, 196).

Im Grundgewebe des Stammes, innerhalb eines der primären Rinde zuzurechnenden bastartigen Sclerenchymringes, tritt, wie bei der Bildung der secundären Holzbündel der *Serjania*-Arten, in einer beschränkten Partie des Gewebes Zelltheilung auf und führt zur Bildung einer Art Procambiumstranges, dessen Ausbildung sich bei *Thinouia* etwas anders als bei *Serjania* vollzieht. Bei *Thinouia* nämlich wird der centrale Theil

des neuen Gewebestranges zu krystallerfüllten Markzellen, während an der Peripherie Zellvermehrung durch Theilung stattfindet, und nun alsbald die vom neuen Marke entfernteren Zellen zu Elementen des Bastes (Siebröhren etc.) sich umbilden. Wenig später oder fast gleichzeitig gelangen in der nächsten Umgebung des neuen Markes kurzgliedrige, mit Hoftüpfeln versehene Gefässe und Holzzellen zur Ausbildung. Abrollbare Gefässe werden nicht gebildet und ebenso wenig ist eine Sonderung einzelner Gefässbündel ersichtlich, wenn man nicht die sich bildenden Markstrahlen als Grenzen solcher auffassen will.[1]) Zwischen dem neuen Baste und Holze bleibt ein wenigschichtiges sogenanntes Reihencambium thätig. In all diesen Vorgängen eilt die äussere Seite der inneren und beide wieder beträchtlich den Partien seitlich vom zuerst gebildeten Markgewebe voraus, so dass das Mark allmälig zu einer tangential gestellten Platte, statt zu einem Cylinder wird, und eine seitliche Verschmelzung mehrerer ursprünglich isolirt auftretender Procambium-Stränge zu einem einzigen secundären Holzkörper durch Hereinziehen der dazwischen liegenden Zellgruppen in die Procambiumbildung stattfinden kann.

An der äusseren Seite bleibt das Wachsthum des secundären Holzkörpers stets ein stärkeres, entsprechend dem geringeren Widerstande des ihn aussen umgebenden Gewebes.

Der Sclerenchymring wird während dieser Vorgänge allmälig erweitert durch Hereindrängen der parenchymatischen Zellen des Grundgewebes an seiner äusseren und inneren Seite zwischen das Sclerenchym und durch allmälige Umwandlung derselben in Steinzellen. Er wird, wie es scheint, nie abgeworfen.

Die Elemente des Holzes und Bastes der secundären Holzkörper sind, abgesehen von der geringeren Länge der zuerst gebildeten, die nämlichen wie im ursprünglichen Holzkörper ausserhalb der Markscheide, nur unterbleibt die Bildung von Harz- oder Milchsaftbehältern, welche an der äusseren Grenze des zum ursprünglichen Holzkörper gehörigen Bastes sich finden. Holz-Prosenchym und -Parenchym sind deutlicher in wechselnde Zonen oder Bänder geordnet als im ursprünglichen Holzkörper. Neben den primären bilden sich später auch secundäre Markstrahlen aus.

---

1) Eine Nöthigung zur Auffassung dieser secundären Holzkörper als einer Zusammenfassung einzelner Gefässbündel, ähnlich wie bei dem primären Holzkörper, scheint mir um so weniger vorzuliegen, als bei einzelnen Arten von *Serjania* und *Paullinia* (z. B. *Paull. pinnata* L.) auch der Fall vorkommt, dass ein einziger Gefässbündel einer Blattspur Veranlassung zur Bildung eines vollständigen Holzcylinders, eines peripherischen Holzkörpers nämlich, gibt. Man kann sich die Sache wohl so zurecht legen. Im primären Holzkörper werden die noch anderen Zwecken dienenden Blattspurstränge zugleich als Ausgangspunkte für das mechanische System und für die Anordnung des eigentlichen Festigungsgewebes benützt. Die secundären Holzkörper erscheinen lediglich als eigenthümliche und, wie ich am Schlusse einer früheren Mittheilung (sieh Atti etc. 1874, p. 64, 65) hervorgehoben habe, besondere Vortheile sichernde Verstärkungen des ursprünglichen mechanischen Systemes, und desshalb ist für sie eine Analogie mit dem primären Holzkörper über den eigentlichen Anfang zur Lösung seiner mechanischen Aufgabe hinaus nicht mehr zu suchen.

Thinouia besitzt also nicht einen von Anfang an (und somit auch nicht einen aus primären Holzkörpern) zusammengesetzten Stamm, wie *Serjania* und *Paullinia*, und ihr Verhalten darf desshalb nicht mit dem dieser Gattungen identificirt werden, wie es in De Bary, Vergleichende Anatomie, 1877, p. 598 (Fig. 231) geschehen ist, woselbst auch p. 600 und p. 601 mit Unrecht wesentlich ihr das nachträgliche Auftreten rindenständiger Holzzonen in der Peripherie eines zusammengesetzten Holzkörpers, welches den *Serjania*- und *Paullinia*-Arten zukommt, zugeschrieben wird, unter irriger Hieherbeziehung der dieses Verhältniss für zwei „*Serjania*"-Arten darstellenden Abbildungen von Crüger in der Botanischen Zeitung 1851, Taf. VIII, (Fig. 10 für *Serj. caracasana*, Fig. 16, 17, 19, 20 für *Serj. paucidentata*). Wollte man auch den umstrickten Holzkörper von *Thinouia*, dem ja eine (wiederholte) Bildung rindenständiger Holzkörper allerdings zukommt, als zusammengesetzten bezeichnen, so müsste man ihn als secundär zusammengesetzten von dem der *Serjania*- und *Paullinia*-Arten, bei denen er als primär zusammengesetzter auftritt, unterscheiden. Auf Arten von *Thinouia* endlich ist es zu beziehen, wenn p. 600 erwähnt ist, dass nach Netto „auch bei Arten mit ursprünglich einfachem Holzringe nachträglich erneute peripherische auftreten".

Dass Netto und, ihm folgend, Duchartre und Lestiboudois die Anomalie von *Thinouia* als eine Anomalie von *Serjania* aufgefasst haben, und dass Duchartre, Schleiden und Richard Stammstücke von *Thinouia* und darnach gegebene Abbildungen auf *Serjania*- (oder *Paullinia*)-Arten bezogen haben, ist schon vorausgehend erwähnt, und mag Weiteres darüber in dem Litteraturberichte am Ende nachgesehen werden.

Die vierte Anomalie, den zerklüfteten Holzkörper, corpus lignosum fissum, der, wie schon oben erwähnt, namentlich in der Familie der Malpighiaceen, der Bignoniaceen und bei den Bauhinien sich findet, habe ich in der Familie der Sapindaceen nur in der Gattung Urvillea (sieh Atti etc., 1874, p. 63) und zwar bisher nur bei *Urvillea laevis* m. (sieh am a. O. und über *Sapindus*, 1878, p. 264) zu beobachten Gelegenheit gehabt, namentlich an Materialien von Correa de Méllo (*Sapindacea* n. 3), deren Mittheilung ich Bureau verdanke, und welche den Figuren 16 und 17 der Tafel II zu Grunde liegen; ausserdem auch an Materialien von Mosén n. 1818. Materialien derselben Pflanze aus der Sammlung von Gaudichaud („n. 11", vielleicht auch n. 52, Mus. n. 3903 aus Rio de Janeiro, sieh unten in den Litteraturberichten) sind es ohne Zweifel, auf welche sich eine allem Anscheine nach hieher gehörige Mittheilung von Richard (1838, sieh unten) und eine Abbildung von Gaudichaud (1841, Tab. XVIII, Fig. 20, sieh unten) beziehen.

Von einer anderen *Urvillea*-Art, von *U. ulmacea* Kunth liegen entsprechende ältere Stammstücke, ebenfalls von Correa de Méllo gesammelt (*Sapindacea* n. 2),[1])

1) Es erscheint angemessen, die Materialien von Correa de Méllo, welche speciell behufs Untersuchung der eigenthümlichen Structurverhältnisse bei Lianenstämmen auf Veranlassung von

vor, an welchen der Holzkörper zwar dreilappig geworden ist durch stärkere Entwicklung an den Kanten des Stammes als an den die Blätter tragenden Seiten, welch letztere stark einspringende Furchen bilden (sieh die Abbildung Taf. II, Fig. 18—21 nebst der Figurenerklärung, sowie Tab. XVIII, Fig. 17 bei Gaudichaud, 1841); aber von einer Zerklüftung des Holzkörpers ist hier noch nichts zu bemerken. Sie mag übrigens später und mag auch bei anderen Arten auftreten. Genügend entwickelte Materialien von solchen, welche das ersehen liessen, liegen jedoch zur Zeit nicht vor.

Auch diese Anomalie ist, wie die dritte, keine ursprüngliche, sondern eine später, wenn auch schon im zweiten oder dritten Jahre auftretende.

Wie ich schon früher mitgetheilt habe (sieh Atti etc. 1874, p. 63 und den Bericht darüber in De Bary „vergleichende Anatomie", 1877, p. 623), wird dieselbe eingeleitet durch ein stärkeres Wachsthum des Holzes an 3 Stellen, welche den stumpfen Kanten des an seinen Flächen die Blätter tragenden und hier mit seichten Längs-Furchen (einer ober den Blättern, zwei unter den Blättern) versehenen Stengels oder Zweiges entsprechen. Es bilden sich so drei bogig vorspringende, von Cambium umgebene Holzpartieen, zwischen welchen das Rindengewebe reichlicher entwickelt wird. Der Zuwachs an den einander zugekehrten Seiten dieser Lappen bedingt, dass sie unter

---

Bureau (s. dessen Mittheilung darüber in Bull. Soc. bot. de France, XIX, 1872, p. 15) im Jahre 1868 bei Campinas in der Brasilianischen Provinz São Paulo gesammelt wurden und einerseits aus blühenden oder fructificirten Herbarmaterialien, andererseits aus älteren Zweig- und Stammstücken je derselben Pflanze, zum Theil macerirt und der Rinde entkleidet, bestehen, hier übersichtlich aufzuführen. Sie umfassen folgende 8 Pflanzen, bei deren Bezeichnung ich die von dem Sammler beigefügten Gattungsnamen übergehe, um keine Veranlassung zur Vermehrung der Synonymie zu geben:

Sapindacea n. 1.: Paullinia rhomboidea m.
2.: Urvillea ulmacea Kunth.
3.: Urvillea laevis m.
4.: Serjania fuscifolia m.
5.: Serjania grandiflora Camb.
6.: Serjania communis Camb., var. *α.* mollis m.
7.: Thinouia ventricosa m.
8.: Serjania Laruotteana Camb.

Die unter 2, 3, 4, 6, 7 und 8 bezeichneten Materialien sind zu den auf Tafel I und II gegebenen Darstellungen benützt worden. *Serj. grandiflora*, n. 5, welche in ihrem Verhalten sich der *S. Laruotteana* und *S. fuscifolia* ähnlich zeigt, ist im Vorausgehenden, p. 7—8, näherer Betrachtung unterworfen worden. *Paullinia rhomboidea*, n. 1, zeigt in den vorliegenden, bis zu 9 mm Durchmesser besitzenden Zweigen keine anomalen Verhältnisse. Sie gehört mit *Paull. weinmanniaefolia* Mart. und *P. micrantha* Camb., sowie mit der hinsichtlich der Fruchtgestalt ihr nahe stehenden *P. thalictrifolia* Juss. einer Gruppe an, in welcher überhaupt solche nicht vorzukommen scheinen.

Sie mag als neue, hier zum ersten Male genannte Art im Folgenden kurz charakterisirt sein:

Paullinia rhomboidea m.: Rami e subfusco cinerascentes, lenticellis parvis notati, glabrescentes; folia impari-pinnata, 4—6-juga, jugo infimo ternato; foliola rhomboidea, supra medium serrato-dentata, sessilia, subchartacea; sepala 2 exteriora tertiam interiorum partem aequantia; fructus trialatus, obverse pyramidatus.

Lösung ihres Zusammenhanges im Centrum sich mit ihren Mittellinien von einander zu entfernen streben. Diese Lostrennung wird unter Vermeidung einer Zerreissung dadurch ermöglicht, dass sich im Parenchym der Markstrahlen und des Markes selbst neues cambiales Gewebe bildet, welches von den Einsenkungsstellen der Rinde aus das innere ältere Holz und das Mark durchsetzt, so dass nun der Holzkörper aus drei, so zu sagen freien Theilen besteht. Jedem dieser Theile fällt ein Drittel des ursprünglichen Markes zu, überdeckt von Cambium, welches letztere nun in centripetaler Richtung vorschreitende Holzbildung vermittelt, so dass nach Kurzem jede dieser Markpartieen von Holz und dem dazu gehörigen Baste umgeben ist, und der Stamm nun, so zu sagen, aus drei Theilstämmen gebildet erscheint (s. Taf. II, Fig. 17, sowie die schon erwähnte Fig. 20 der Tafel XVIII von Gaudichaud, in welcher aber fehlerhafter Weise zwischen die Theilkörper ein unverändertes Mark mit Markscheide eingezeichnet ist).

Diese Zerklüftung scheint sich später an den einzelnen Theilen zu wiederholen, wie die erneut auftretende Lappenbildung an der Peripherie derselben zu erkennen gibt (sieh Taf. II, Fig. 17 an den beiden vorderen Theilkörpern). Ob in dem Gewebe zwischen den Theilkörpern später auch secundäre Holzbündel auftreten, wie zwischen den Holzkörpern der Stämme mit der ersten und zweiten Anomalie, darüber liegt keine Andeutung vor.

In der das Mark durchschneidenden Cambiumbildung gibt sich bis zu einem gewissen Grade eine Analogie mit der zweiten Anomalie zu erkennen; doch tritt dieser Vorgang hier viel später ein und ist nicht mit der eigenartigen Gefässbündelanordnung verknüpft, welche dort der eigenthümlichen Anomalie zu Grunde liegt.

Die als letzte (fünfte) noch zu erwähnende Anomalie endlich, der gelappte Holzkörper, corpus lignosum lobatum, geht aus einer rücksichtlich der Holzbildung quantitativ ungleichen Thätigkeit neben einander liegender Stellen des Cambiums hervor und kann durch die Stellung der Gefässbündel in nach aussen vorspringende Bogen schon sehr früh eingeleitet werden.

Sie findet sich in Verbindung mit solcher Bogenstellung, welche hier zur Bildung von fünf gerundeten Lappen führt, bei mehreren *Serjania*-Arten aus der dritten Section, *Eurycoccus*, welche mit den einen getheilten Holzkörper besitzenden Arten derselben Section zunächst verwandt sind, nämlich bei *Serjania Salzmanniana* Schlecht., *subimpunctata* m., *pedicellaris* m., *altissima* m., *glutinosa* m., *comata* m., *acoma* m. und *cuneolata* m.

Mit nur drei gerundeten Lappen, welche an den dreikantigen Zweigen durch Begünstigung der Kanten im Dickenwachsthum sich bilden, tritt sie bei *Urvillea*-Arten auf, wovon schon bei Betrachtung der vierten Anomalie die Rede war, da bei *U. laevis* dadurch eben diese, die Zerklüftung des Holzkörpers, eingeleitet wird, während es bei *U. ulmacea* (s. Taf. II, Fig. 18—21) bei der Lappenbildung zu verbleiben scheint.

Mit in der Regel fünf, den Zweigkanten entsprechenden, aber nicht bogig, sondern gegen die im Wachsthum zurückgebliebenen, schmäleren, zwischen je zwei stärkere Markstrahlen eingeschlossenen Partieen stufenartig vorspringenden Lappen, ähnlich wie

bei *Clematis* also und an die bekannten Verhältnisse bei den *Bignoniaceen* auch durch eine etwas stärkere Bastproduction über den zurückgebliebenen Stellen sich annähernd [1]), findet sich der gelappte Holzkörper besonders bei *Serjania reticulata*, *brevipes* und *tristis*, welch letztere Art auch noch durch Bildung stark vorspringender Korkleisten über den Zweigkanten sich auszeichnet. —

Es übrigt noch, die schon oben, p. 5, Anmerkung 1, erwähnten und theilweise bereits von Oliver und De Bary, wie dortselbst angegeben, aufgeführten Erörterungen und Bemerkungen Anderer, welche sich in der Litteratur über die Anomalieen der Sapindaceen-Stämme finden, hier zu verzeichnen und kurz darüber, sowie über die darin wahrscheinlich gemeinten Pflanzen zu berichten.

Gaudichaud, Observations sur quelques points de physiologie et d' anatomie comparée des végéteaux et spécialement sur l' accroissement des tiges, adressées à M. de Mirbel, in Guillemin Archives de Botanique, II, 1833, p. 489, Tab. XIX, Fig. 5 und 6. Gaudichaud hat zuerst die anomalen Lianen-Stämme aus der Familie der Sapindaceen auf seiner Reise um die Welt des Näheren ins Auge gefasst. Er gibt hier die erste Notiz darüber, begleitet von den angegebenen Figuren, ohne aber auch nur der Gattung nach, geschweige denn der Art nach, die betreffenden Pflanzen zu bezeichnen. Ich möchte die erstere derselben, mit 3 peripherischen Holzkörpern, auf *Serjania communis*, die andere mit 7 peripherischen, als Rippen vorspringenden Holzkörpern auf *Serj. clematidifolia* beziehen, nach Anhaltspunkten, welche im Folgenden unter Gaudichaud und Schacht berührt werden sollen. Diese Bestimmungen sind übrigens hier, wie im Folgenden, natürlich nur als beiläufige, mit Rücksicht auf die Verbreitung und Häufigkeit der Arten versuchte anzusehen. Statt *Serj. clematidifolia* kann z. B. für die letztere Figur (6) sehr wohl auch die nahe verwandte *Serj. fuscifolia*, oder die im Stammbau sehr ähnliche *Serj. multiflora* in Betracht kommen.

Richard Nouv. Elém. d. Bot., 1838, p. 136 — übersetzt von Kittel, 3. Aufl. 1840, p. 167. Richard bezieht sich auf die Mittheilungen und Materialien von Gaudichaud. In der p. 168 (der Uebersetzung) erwähnten Pflanze mit schmal streifenartigem Marke in den „Nebenstengeln" ist unschwer eine *Thinouia* zu erkennen; die mit angeblich darin fehlendem Marke, „coll. Gaud. n. 53", mag auf *Serj. ichthyoctona* zu beziehen sein; die auf p. 169 erwähnte Pflanze, „coll. Gaud. n. 11", aber dürfte *Urvillea laevis* sein. Man vergleiche das im Folgenden unter Gaudichaud Angegebene.

Treviranus, Physiologie der Gewächse, II, 1838, p. 174, Tab. I, Fig. 6. Die Figur stellt den Querschnitt einer von Morren in Lüttich dem Verfasser mitgetheilten, fragweise als *Paullinia* bezeichneten, brasilianischen *Serjania*-Art mit 10 peripherischen

---

1) Der Bast bildet übrigens hier nicht förmliche Unterbrechungen des Holzkörpers, wie bei den Bignoniaceen, deren Holzkörper darnach als „unterbrochener", corpus lignosum interruptum, von dem bloss gelappten Holzkörper unterschieden werden kann.

Holzkörpern dar, vielleicht der *Serj. clematidifolia*, da die peripherischen Holzkörper als „durch gerundete“ (in der Zeichnung vielleicht zu stark gerundete) „Ecken etwas hervortretend“ beschrieben werden.

Gaudichaud Recherches sur l' Organographie etc. des Végéteaux, 1841, p. 35, Tab. XIII, Fig. 1—4, Tab. XVIII, Fig. 14—21, „tiges fasciculées des Sapindacées“. Wenn ich eine Deutung der von Gaudichaud gegebenen Figuren versuchen soll, wobei ich mich auf die Autopsie der im Pariser Museum zum Theile noch vorhandenen, und zum Theile auch in kleinen Abschnitten mir durch Herrn Bureau gütigst mitgetheilten Materialien desselben stützen kann, und wobei dessen Angabe über die Herkunft dieser Materialien aus Brasilien (sieh Figurenerklärung p. 130) und der Umstand, dass dort Gaudichaud besonders in der Umgebung von Rio de Janeiro gesammelt hat, zu berücksichtigen ist, so sind Tab. XIII, Fig. 1 und Tab. XVIII, Fig. 14 unzweifelhaft auf Arten von *Thinouia* zu beziehen; es liegt mir ein entsprechender Stammabschnitt aus der Sammlung von Gaud. n. 48 (Musée, coll. d. Bois n. 1314) vor. In Tab. VIII, Fig. 2, 3 und 4 ist nach der angeblichen Marklosigkeit der peripherischen Holzkörper (sieh die Figurenerklärung p. 110) dieselbe Pflanze zu erblicken, deren schon Richard Erwähnung gethan hat, coll. Gaud. n. 53 (Mus. n. 3902), die mir in einem kleinen Abschnitte vorliegt und die mit ziemlicher Sicherheit auf *Serj. ichthyoctona* Radlk. zu beziehen ist, mit soviel Sicherheit nämlich, als sich aus der Untersuchung älterer Stammstücke allein und ihrer Vergleichung mit Herbarmaterial anderer Herkunft gegenwärtig, wo uns ältere und jüngere Theile ein und derselben Pflanze zur Beurtheilung der während des Wachsthums auftretenden Veränderungen nur in äusserst spärlichem Maasse zur Verfügung stehen, gewinnen lässt. Tab. VIII, Fig. 15 stellt *Serj. Laruotteana* dar; Fig. 16 mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit *Serj. multiflora*; Fig. 17 *Urvillea ulmacea*; Fig. 18 wohl *Serj. grandiflora*; Fig. 19 höchst wahrscheinlich *Serj. clematidifolia*; Fig. 20 *Urvillea laevis*, wohl nach der von Richard als coll. Gaudichaud n. 11 erwähnten Pflanze (sieh oben) gezeichnet, welche mir unbekannt geblieben ist, während ich eine vielleicht ebenfalls hieher zu beziehende unter Gaud. n. 52 (Mus. n. 3903) in Paris gesehen, aber nicht erhalten habe, so dass ich die Frage offen lassen muss, ob dieselbe nicht vielleicht eine *Malpighiacee* sei; Fig. 21 endlich ist höchst wahrscheinlich auf *Serj. fuscifolia* R. zu beziehen. Was noch andere Materialien von Gaudichaud betrifft, so gehört n. 23 (Mus. n. 1309), aus Tejuca, wahrscheinlich zu *Serj. communis*, welche eingangs, in dem über die erste Mittheilung Gaudichaud's Gesagten, Erwähnung gefunden hat; Sapindacea A (Mus. n. 1310) aus Guayaquil, n. 191 (Mus. n. 1311) aus La Puna (Ecuador) und n. 21 (Mus. n. 1312) ebendaher gehören zu *Serj. brevipes*. Eine von Lestiboudois (sieh unter diesem) unter Mus. n. 1318 als „Sapindacée de Cochinchine“ erwähnte Pflanze Gaudichaud's ist zweifellos eine Leguminose mit secundären, nur nach aussen sich fortbildenden Holzmassen (nicht Holzringen), wie bei *Wistaria (Glycine) chinensis* und wie bei dieser mit Gruppen von 3—7 gestreckten, zu Längszügen in der Rinde und im Marke an einander gereihten, mit dunkelbraunem Inhalte (Gerbstoff) erfüllten Zellen.

Alle die nach den Abbildungen von Gaudichaud hier angeführten Pflanzen sind von demselben lediglich als Lianen aus der Familie der Sapindaceen bezeichnet, über welche kaum Weiteres im Texte mitgetheilt ist.

Jussieu, Adr. de, in Ann. Scienc. nat. 2. sér., XV, 1841, p. 242 und 246. Eine frühere Veröffentlichung der gleichlautend in der Monographie der Malpighiaceen niedergelegten Beobachtungen über die Stämme der Lianen (sieh im Folgenden).

Martius in Münchener gelehrte Anzeigen XIV, 1842, p. 390. Er bezieht sich lediglich auf Gaud. Arch. und Juss. Ann. Bericht darüber befindet sich in der Botanischen Zeitung I, 1843, p. 502. Die Anschauung des Autors über die Zweignatur der peripherischen Holzkörper ist schon oben, p. 6, erwähnt.

Jussieu, Adr. de, Monographie des Malpighiacées, 1843, p. 110 und 116. Er erwähnt nur *Serj. cuspidata* und die Vereinigung ihrer 4 Holzkörper in einen an der Basis der Zweige, sowie das Vorkommen von Spiralgefässen in der Umgebung des Markkörpers in jedem derselben.

Schleiden, Grundzüge der Botanik II, 1843, p. 158; 2. Aufl. II, 1846, p. 161, Fig. 149 und 150; 3. Aufl. II, 1850, p. 166 mit den gleichen Figuren. Die erstere Figur entspricht ganz, auch der Grösse nach, dem mir vorliegenden Stammstücke der schon unter Richard erwähnten n. 53 der Sammlung von Gaud., *Serj. ichthyoctona* (?); die zweite Figur stellt eine *Thinouia* dar, wohl auch aus der Sammlung von Gaud. (sieh unter diesem). Beide sind wiedergegeben in De Bary, Anatomie der Vegetationsorgane p. 598, als Fig. 230 und 231, als „Querschnitte durch Stämme von nicht näher bestimmten *Serjania*- oder *Paullinia*-Arten", wie bei Schleiden, bezeichnet.

Treviranus, über einige Arten anomalischer Holzbildung bei Dicotyledonen, in Botanische Zeitung V, 1847, p. 393 (Bericht in Ann. Nat. Hist. 2. sér. I, 1848, p. 126). Untersuchungen an *Paullinia pinnata*, *Serj. polyphylla* („*Serj. triternata* W.") und *Serj. Laruotteana* („*Serj. Selloviana* Klotzsch"), welche unter Rücksichtnahme auf die Entwicklungsgeschichte zu richtigen Anschauungen führten. Als nicht anomale Arten von *Serjania* und *Paullinia* werden genannt *Serj. rubifolia* K. und *Paull. obliqua* K., worunter wohl, wie ich anderwärts dargelegt (Monogr. von Serjania p. 54; über Sapindus p. 282), *Serj. rubicaulis* Benth. und *Thinouia obliqua* Radlk. zu verstehen sind.

Mettenius in Linnaea XIX, 1847, p. 582. Er untersuchte im Anschluss an seine Beobachtungen über den Bau der Bignonien *Serjania paniculata* Kunth und wies in den peripherischen Holzkörpern die Spiralgefässe nach. Eine noch weiter erwähnte Sapindacee aus dem Besitze von Kunth, angeblich ohne centralen, aber mit drei peripherischen Holzkörpern, scheint eine irrig aufgefasste Art mit nur 2 peripherischen Holzkörpern gewesen zu sein, von welcher der centrale, „in seiner Mitte markführende" Holzkörper auch als peripherischer gedeutet wurde. Vielleicht *Paull. Cururu?* (Sieh die nächstfolgende Litteraturstelle.)

Crüger, einige Beiträge zur Kenntniss von sogenannten anomalen Holzbildungen des Dicotyledonenstammes, III, B Sapindaceen, in Bot. Zeit. IX, 1851, p. 481, Taf. VIII, Fig. 1—20. Er vermuthet in der letzterwähnten Pflanze von Mettenius „eine *Paullinia*

mit runder Frucht und gelegentlich nur 2 peripherischen Holzkörpern, Fig. 1—6, die einzige ihm bekannt gewordene Pflanze mit solchem Stamme", wohl *Paull. Cururu*, deren Frucht, abgesehen von ihrem Stiele, mitunter fast kugelig erscheint. In Fig. 13 bis 20 gibt derselbe die Darstellung des Zweig- und Stammbaues einer „*Serjania*", allem Anscheine nach der *Serj. paucidentata*, mit 3 peripherischen Holzkörpern (deren Zahl an der Basis der Zweige auf 1, im hypokotylen Stengelgliede und, dem entsprechend, an der Basis des Stammes auf 0 reducirt ist) und mit „secundären Holzbündeln" (p. 487) in mehreren Schichten im alten Stamme (entsprechend den für *Serj. Laruotteana* bekannten). Ein der Figur 20 sehr nahe kommender Stammabschnitt liegt mir von der n. 3880 des Pariser Museums vor, von Melinon aus französisch Guiana im Jahre 1845 übersandt (sieh darüber später unter Lestiboudois). Aehnliche Structur schreibt er auch Arten von *Paullinia* zu (p. 483), worunter hier wohl *Paull. pinnata* L. und *Paull. leiocarpa* Griseb. zu verstehen sind. In Fig. 7—11 und pag. 483—484 betrachtet derselbe als von ihm besonders unterschiedene (im wesentlichen aber zusammengehörige) Fälle den Holzkörper einer *Serjania* mit 8 und den einer solchen mit 10 peripherischen und später durch secundäre vermehrten Holzkörpern. Es kann darunter wohl nur die aus dem benachbarten Venezuela wie aus Britisch Guiana vorliegende *Serj. caracasana* mit ihren Varietäten gemeint sein (kaum die nur aus britisch und holländisch Guiana bekannte und dort anscheinend nur spärlich vorkommende *Serj. oblongifolia*).

Crüger hatte weiter auch Gelegenheit, das ausnahmsweise Fehlen peripherischer Holzkörper bei nicht rankenden Individuen zu constatiren, sowie den Bau der Wurzel zu untersuchen, deren Holzkörper er stets einfach fand (p. 488). Auch den zerklüfteten Holzkörper von *Urvillea* hat Crüger flüchtig berührt (p. 487), ohne aber diese Gattung anders als durch Hinweisung auf die Figuren 17 und 20 der Tafel XVIII von Gaudichaud anzudeuten.

Schacht, Lehrbuch der Anatomie und Physiologie der Gewächse, II, 1859, p. 58, 59, Fig. 112, 113. Der Autor kommt, wie schon oben, p. 6, angegeben, auf die Zweignatur der peripherischen Holzkörper zurück. Die erste seiner Figuren, welche fälschlich auf *Paullinia* bezogen wird, stellt den Querschnitt einer *Serjania* mit 7 peripherischen Holzkörpern, wahrscheinlich der *Serj. clematidifolia* dar und sieht wie eine freie Copie der am Anfang hier erwähnten Figur 6 von Gaudichaud (aus dem Jahre 1833) aus, so dass sie vielleicht als eine Darstellung nach einem in den Besitz von Schleiden übergegangenen Stammstücke aus Gaudichaud's Sammlung anzusehen ist; die zweite, fälschlich auf eine *Serjania* bezogene, ein von Crüger übersandtes macerirtes Zweigstück mit 2 peripherischen Holzkörpern, ohne Zweifel von *Paull. Cururu*, in Längsansicht (mit Durchschnittsfiguren aus verschiedener Höhe).

Netto sur la structure anomale des tiges des Lianes, in Ann. Scienc. natur., 4. sér., XX, 1863, p. 167—179 (Extrait par l'auteur in Comptes-rendus LVII, 21. Sept. 1863, p. 554—557 und in Bullet. Soc. bot. de France, XII, 1865, p. 106—115). Netto unterscheidet bei den Sapindaceen und Lianen überhaupt 3 Classen von Stammanomalien. Für die erste und zweite werden nur Beispiele aus der Familie der

Sapindaceen angeführt; für die dritte aber, welche er den Sapindaceen ebenfalls zuschreibt, nur Beispiele aus anderen Familien. Zu der ersten rechnet Netto die Stämme wie von „*Serj. Dombeyana*“ d. i. *S. caracasana*, und „*Serj. cuspidata*“ mit peripherischen, primären Holzringen, denen er vergeblich die Spiralgefässe abspricht, und zu denen später auch secundäre hinzukommen können, wie bei einer (vielleicht mit Recht) als „*Paullinia*“ bezeichneten Pflanze. Die zweite Klasse Netto's bilden diejenigen Stämme, bei welchen primäre peripherische Holzkörper nicht vorkommen, sondern nur secundäre. Damit ist die Anomalie gemeint, welche ich für *Thinouia* unter der Bezeichnung „umstrickter Holzkörper“ nachgewiesen habe und welche Netto irriger Weise einer *Serjania* zugeschrieben hat (p. 172 l. c.). Für die dritte Klasse wird angegeben, dass zu ihr die grösste Anzahl von Lianen mit anomaler Structur gehöre: Die Menispermaceen, die Malpighiaceen, die Convolvulaceen, und eine grosse Anzahl von Leguminosen, besonders *Bauhinia*-Arten; auch mehrere Sapindaceen. Es geht schon aus der Nennung dieser verschiedenen Familien hervor, dass hier ein einheitlicher „Typus“, wie ihn Netto an einer kletternden, baumartigen, nicht näher bestimmten *Acacia* und einer *Bauhinia* zu demonstriren sucht, nicht vorliegen kann. Was sich aus Netto's Angaben entnehmen lässt, ist, dass es sich hier um sehr verstärkte Holzproduction an bestimmten Stellen (4 bei *Acacia*, 2 bei *Bauhinia*) des Zweigumfanges handelt (vergleiche das hierüber unter Lestiboudois im Folgenden Gesagte).

Eine in Pritzel Thes. Lit., Ed. II, p. 232 unter gleichem Titel erwähnte, angeblich 20 Octavseiten starke, im Jahre 1865 in Paris erschienene Abhandlung Netto's ist mir, wenn sie nicht etwa eine Wiedergabe der obigen ist, unbekannt geblieben. Eine ebenso betitelte Mittheilung in Ann. scienc. nat., 5. sér., VI, 1866, p. 317—322 bezieht sich nicht auf Pflanzen aus der Familie der Sapindaceen, vielmehr auf *Cissus*, *Bauhinia* und *Schnella*.

Erwähnt seien ferner noch dessen „Estudos sobre a evolução morphologica dos tecidos nos caules sarmentosas“ in Archivos do Museu Nacional Vol. I (Rio de Janeiro 1876) p. 27, wovon ich nur die ersten 4 Seiten kenne, welche mir mit dem ersten Hefte des bezeichneten Bandes durch den Autor selbst zugekommen sind.

Naegeli, Dickenwachsthum des Stengels und Anordnung der Gefässstränge bei den Sapindaceen, München, 1864. Ueber den Hauptinhalt der hier niedergelegten eingehenden Untersuchungen verweise ich auf die schon oben angezogene referirende Darstellung von De Bary. Die Pflanzen mit anomalem Stammbau, auf welche sich die Untersuchungen und Abbildungen Naegeli's beziehen, sind: *Serj. cuspidata* Camb. („*Urvillea ferruginea*“) Taf. 2 und 3; *Serj. caracasana* Taf. 6 und 7, Fig. 15—17, Taf. 8, 9, 10; eine als *Paull. alata* aus dem Pariser Garten erhaltene Pflanze Taf. 7, Fig. 1—8, unter welcher wahrscheinlich *P. pinnata*, kaum das hier im später Folgenden unter *S. paucidentata* erwähnte, abweichende Culturexemplar dieser Art zu verstehen ist; von *Serjanien* mit nicht anomalem Holzkörper reihen sich weiter an *S. mexicana* Taf. 7 Fig. 9 und Taf. 6 Fig. 14 und die als *Paull. sp.* bezeichnete *Serj. grammatophora* m. des Münchener Gartens Taf. 4, 5 und 6 (Fig. 12, 13).

Müller, Fritz, über das Holz einiger um Desterro wild wachsender Kletter-Pflanzen in Botan. Zeitung XXIV, 1866, p. 57—69, Taf. III. Nur die Figuren 19 und 20 beziehen sich auf p. 67 besprochene Sapindaceen. Die erste davon, als *Serjania* bezeichnet, ist wahrscheinlich *Serj. communis*, die zweite, deren Bestimmung als *Serjania* oder *Paullinia* offen gelassen wird, da Blüthen und Früchte dem Autor nicht zu Gesichte gekommen waren, kaum zweifelhaft *Serj. Laruotteana*. Mit der Bezeichnung der peripherischen Holzkörper als „Nebenaxen" scheint Müller zur Anschauung von der Zweignatur derselben zurückzukehren.

Duchartre, éléments de botanique 1867, p. 170, Fig. 82 „*Serj. cuspidata*??", Fig. 83 „*Serj. Dombeyana*??". Die erste Figur mit 3 peripherischen Holzkörpern, welchen irriger Weise das Mark abgesprochen wird, und welche unrichtiger Weise, wenigstens wenn damit ihre Entwicklung bezeichnet sein soll, secundäre Holzkörper genannt werden, entspricht vollständig einem von Claussen herrührenden Stammstücke n. 76, Mus. n. 2230, welches mir in einem kleinen Abschnitte vorliegt und welches als *Serj. cuspidata* richtig bestimmt sein oder vielleicht zu der nahe verwandten *Serj. communis* gehören mag, wie das sehr ähnliche, früher erwähnte Stammstück von Gaudichaud, n. 23, Mus. n. 1309 (s. ob. p. 10, Anm., u. 26). Die zweite Figur bezieht sich nicht auf *Serj. Dombeyana*, das ist *S. caracasana*, sondern auf eine *Thinouia* und scheint nach dem schon unter Gaudichaud erwähnten Stammstücke n. 48 desselben, Mus. n. 1314 gefertigt zu sein, wie wahrscheinlich auch die analoge zweite Figur bei Schleiden (sieh dort), welche De Bary (a. o. a. O.) als Figur 231 wiedergegeben hat. Auf diese Figur ist das von Duchartre über Netto's zweiten Typus auf p. 171 im zweiten Absatz Gesagte zu beziehen. Hier sind die in späteren Jahren (nicht schon im zweiten, wie Duchartre angibt) in der Umgebung des centralen entstehenden Holzkörper in der That secundäre und die in ihrer Umgebung entstehenden kann man mit Duchartre als tertiäre u. s. w. bezeichnen, wenn man sie nicht lieber secundäre zweiter etc. Ordnung nennen will (man vergleiche hiezu meine Angaben über *Thinouia*). Was endlich die Darstellung des angeblich ebenfalls bei einer *Serjania* beobachteten 3. Typus nach Netto betrifft, so scheint es sich hier, wenn nicht eine mir unbekannte Mittheilung Netto's inzwischen liegt, um eine ungerechtfertigte Uebertragung des von Netto über eine *Bauhinia* Angegebenen auf *Serjania* zu handeln.

Clos, sur la tige des Serjanias, in Bullet. Soc. bot. de France, XIX, 1872, p. 57. Der Autor bringt neue Untersuchungen nicht bei. Er bezieht sich vielmehr nur auf die Angaben von Netto und knüpft daran die Meinung, dass die Structur von *Serjania* als ein Fall von Dédoublement zu betrachten sei, „vermöge dessen 2 oder mehrere Organe den Platz einnehmen, an dem nach den Gesetzen der Symmetrie nur eines auftreten sollte".

Bureau, ebenda, p. 61 bringt gelegentlich der Mittheilung von Clos in Erinnerung, dass nach den Untersuchungen von Netto und den von Corréa de Méllo

eingesandten Materialien die von dem centralen gesonderten peripherischen Holzkörper nach einer gewissen Strecke wieder in denselben eintreten.

Licopoli, Gaetano, sulla struttura del fusto della Wisteria chinensis e del Cissus acida, Napoli 1872, 4° (berichtet in Nuovo Giornale bot. ital. V, 1873, p. 141). Licopoli glaubt den Stamm von *Wistaria* (glycine) *chinensis*, in welchem secundäre, nur nach aussen sich fortbildende Holzpartieen, nicht wirkliche Holzringe, auftreten, mit keiner Pflanze besser vergleichen zu können als mit *Paullinia pinnata* und *Serj. Dombeyana* unter Bezugnahme auf die eben erwähnte Abbildung in Duchartre, éléments de botanique. Der Vergleich mit *Paull. pinnata* und *Serj. Dombeyana*, d. i. *S. caracasana* ist natürlich nur ganz obenhin, rücksichtlich der allgemeinen Configuration des Querschnittes zutreffend. Besser schon ist der Vergleich mit Duchartre's Figur, da diese, wie schon erwähnt, nicht die *Serj. Dombeyana*, sondern eine *Thinouia* darstellt, deren peripherische Holzkörper in der That auch secundäre sind. Doch bleibt der wesentliche Unterschied, dass die secundären Holzkörper von *Thinouia* ringsum fortwachsende Ringe darstellen.

Lestiboudois, Dicotylédonés hétérogènes, in Comptes rendus LXXV, 1872, p. 336 etc., Sapindacées p. 1456—57; ferner: Sur quelques lianes anomales, l. c. LXXVI, 1873, p. 754—57. Lestiboudois, welcher als „heterogene Dicotyledonen", wie er eingangs darlegt, diejenigen bezeichnet, deren Zuwachs nicht ausschliesslich aus dem Cambium zwischen Holz und Rinde entsteht, sondern auf anomale Weise (l. c. 1872, p. 342) auch in Form von Gefässbündeln im Marke („entogènes") oder im Zellgewebe der Rinde („ectogènes"), schildert unter der Ueberschrift „Sapindacées" (l. c. p. 1456) das Verhalten dreier Pflanzen, von denen aber nur die ersten zwei wirkliche Sapindaceen sind. Die dritte, um diese zuerst zu erledigen, als „*Sapindacée de Cochinchine*, Mus. n. 1318" bezeichnet, welche mir in einem von Bureau gütigst mitgetheilten Stammabschnitte vorliegt und welche von Gaudichaud gesammelt wurde (wie schon unter diesem erwähnt), ist ohne Zweifel eine Leguminose und zeigt in ihrem anatomischen Verhalten Aehnlichkeit mit der schon unter Licopoli berührten und von Lestiboudois, wie es scheint nach lebendem Material a. a. O., 1873, p. 200—202 ebenfalls geschilderten *Wistaria (Glycine) chinensis*. Es finden sich namentlich im Baste die charakteristischen Gerbstoffschläuche, wie bei *Wistaria* (nach Herbarmaterial), welche auch bei *Rhynchosia* und wahrscheinlich bei noch verschiedenen anderen Leguminosen (auch im Marke) wahrzunehmen sind und deren auch schon Licopoli, p. 7, Erwähnung gethan hat als Zellen, welche eine amorphe Farbmasse von bald gelber, bald in's Braune ziehender Farbe absondern („cellule ... secernanti una materia colorante amorfa ora gialla ora tendente al brunastro"). Lestiboudois hat sie sowohl für die in Rede stehende, vermeintliche Sapindacee als auch für *Wistaria chinensis* in übereinstimmender Weise als in Mark und Rinde vorkommende eigenartige Gefässe („vaisseaux propres", „vaisseaux propres articulées") beschrieben. Bei dem in Rede stehenden Stammabschnitte sind die Gerbstoffschläuche, ganz ähnlich wie bei *Wistaria*, zu 3—7 in Gruppen und der Länge nach zu Zellenzügen geordnet,

welche schon dem unbewaffneten Auge als schwarzbraune Punkte auf dem Querschnitte, als ebensolche Linien auf dem Längsschnitte sich bemerklich machen. Die Gerbstoffreaction ihres Inhaltes mit Eisenalaun tritt erst nach vorhergehender Behandlung derselben mit Kalilauge deutlich hervor. Ebenso bei *Wistaria*. Bei *Rhynchosia reticulata* (von Eggers aus S. Thomas, mit noch reichgliedrigeren Gruppen) habe ich sie direct auftreten sehen. Es mag das von dem Alter des Objectes abhängen. Wenn Lestiboudois angibt, dass diese „eigenartigen Gefässe" auch „bei den anderen Arten", d. h. bei den von ihm untersuchten, gleich zu besprechenden Sapindaceen sich finden, so sind darunter offenbar die diesen eigenen Milchsaftschläuche gemeint.

Die unmittelbar vorausgehend von Lestiboudois betrachtete Sapindacee aus Brasilien, welche er von Guillemin erhalten zn haben angibt, stimmt der Beschreibung nach überein mit Guillemin n. 33, Mus. n. 1316 (4316?), welche mir in einem kleinen Abschnitte vorliegt und welche sehr nahe Beziehungen zu *Serj. multiflora* (übrigens auch zu *Serj. fuscifolia*) zu erkennen gibt.

Endlich die an erster Stelle von Lestiboudois erwähnte Pflanze, welche er als „*Sapindacée indeterminée*, Mus. n. 33" bezeichnet, leider ohne Angabe des Vaterlandes und des Sammlers, stimmt der Beschreibung nach so sehr mit einem von Melinon im Jahre 1845 in Guiana gesammelten Stammstücke, Mus. n. 3880, von welchem mir ein Abschnitt vorliegt, überein, dass ich anzunehmen geneigt bin, die von Lestiboudois angegebene Nummer beruhe auf einer Verwechslung mit jener der vorigen Pflanze und sei hier in der That durch die n. 3880 zu ersetzen. Was allein von den Angaben Lestiboudois' nicht auf die letztere Pflanze passt, ist, dass er den 3 peripherischen Holzkörpern derselben das Mark abspricht. Aber das beruht wohl, wie bei Schleiden und anderen, nur auf einer nicht genügend genauen, nämlich nicht an Schnitten unter dem Mikroskope durchgeführten Untersuchung, ohne welche dasselbe leicht übersehen werden kann. Diese Pflanze aus Guiana stimmt so sehr mit der Zeichnung Crüger's von dessen „*Serjania*", welche ich als *Serj. paucidentata* gedeutet habe, überein, dass wohl auch diese dafür zu halten ist, wenn nicht für eine der nach Crüger ebenso beschaffenen *Paullinia*-Arten, das wäre unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Zweigstructur und des Vaterlandes *P. pinnata* L. oder *P. leiocarpa* Griseb. (s. ob. unter Crüger).

In einer letzten Mittheilung (l. c. 1873, p. 754) bespricht Lestiboudois die 3 Klassen Netto's, zuerst dessen 3. Klasse, welche ihm ebenso, wie ich es unter Netto hervorgehoben habe, einen gemeinschaftlichen Typus nicht darzustellen scheint, sondern seiner Meinung nach heterogene und nicht heterogene Gewächse umschliesst. Zu den letzteren rechnet er namentlich die von Netto des Näheren geschilderte *Acacia* und *Bauhinia*, erstere mit 4, letztere mit 2 vorspringenden Kanten oder Seiten, die von auf einander folgenden „Holzbögen" gebildet seien, ohne dass Zwischenlagerung von Rinde angegeben werde, so dass er diese Holzbögen nicht als ausserhalb des Bastes entstanden betrachten kann.

Was die erste Klasse Netto's betrifft, so versteht Lestiboudois (wozu auch schon Duchartre neigt) die Darstellung Netto's dahin, dass die peripherischen Holzkörper nicht bloss gleichzeitig mit dem centralen bei *Serjania* und *Paullinia* ihre Entstehung nehmen, sondern sogar früher, und bemüht sich das letztere zu negiren. Wer die Entstehung der peripherischen Holzkörper, so gut wie die des centralen, als abhängig von der Bildung der Blattspurstränge erkannt hat, für den ist diese Auffassung an und für sich ferne gerückt.

Der zweiten Klasse Netto's, in welcher auch hier natürlich wieder *Thinouia* als „*Serjania*" figurirt, wie bei Schleiden, Netto, Duchartre und De Bary an den schon bezeichneten Stellen, will Lestiboudois seine vermeintliche Sapindacee aus Cochinchina beizählen, bei der es sich aber nicht wie bei *Thinouia* um secundäre Holzringe, sondern um einseitig nach aussen sich fortbildende secundäre Holzbündel handelt, um einen umkleideten Holzkörper somit, wie ich ihn oben (p. 4) genannt habe, nicht um einen umstrickten.

In einer Erörterung über die Entstehung neuer Holzbündel ausserhalb oder innerhalb des Bastes kommt Lestiboudois nicht zu vollständiger Klarheit, da er den zur primären Rinde zu rechnenden besonderen Sclerenchymring (s. oben p. 15), innerhalb dessen die Neubildung stattzufinden pflegt, wie er selbst bei Gnetum und den Convolvulaceen beobachtet hat, nicht von dem eigentlichen Bündelbaste, (ausserhalb dessen die Neubildungen sich finden) unterscheidet.

Ein Referat in der Botan. Zeitung XXXI, 1873, p. 655 über diese letzte Mittheilung Lestiboudois', in welchem dessen obenerwähnte Auffassung geradezu als Character der betreffenden (1.) Klasse Netto's hingestellt ist, wird erst verständlich, wenn man diess, sowie die Verschiebung, welche die Nummerirung der Klassen Netto's darin gemäss der Reihenfolge ihrer Besprechung durch Lestiboudois erfahren hat, in Berücksichtigung zieht. Ausserdem ist das über die dritte Klasse Netto's Gesagte, dass sie keine Heterogenen enthalte, nach dem Obigen zu modificiren.

Dutailly, des modifications anatomiques de la tige dans une même plante, Bullet. de la Société Linnéenne de Paris n. 3., Juillet 1874, p. 20. Derselbe betrachtet nicht so fast die Anomalie des Stammes von *Serj. cuspidata* („*Urvillea ferruginea*") als den dagegen abweichenden Bau der Inflorescenz-Axe und ihrer Rankenzweige. Die Werthlosigkeit einer daraus für die Systematik gezogenen Folgerung, dass man nämlich zwei, auch bedeutende anatomische Differenzen zeigende Pflanzen nicht desshalb allein in 2 verschiedene Gattungen stellen dürfe, da bei derselben Pflanze die verschiedenen Axen so sehr verschiedenen Bau zeigen können, bedarf keiner näheren Beleuchtung.

In einer späteren Mittheilung, sur la structure des racines tubéreuses des Cucurbitacées, ibid. n. 5, Janvier 1875, p. 36, verglich derselbe die Structur von *Ecbalium Elaterium* mit der der Zweige von *Serj. cuspidata* und *Serj. Dombeyana*, i. e. *Serj. caracasana*, dabei übrigens natürlich nur die gröberen Structurverhältnisse im Auge haltend.

De Bary, vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane, in Hofmeister's Handbuch der physiologischen Botanik III, 1877, p. 598—601, Fig. 230, 231, 232 und p. 623 unter Bezugnahme auf Gaudichaud's Figur 20, Taf. XVIII. De Bary referirt über die bei den Sapindaceen vorkommenden Anomalieen nach Naegeli's und meinen eigenen Untersuchungen, unter Beifügung zweier Figuren, 230 und 231, nach Schleiden und einer auf *Serj. caracasana* bezüglichen Figur, 232, nach Naegeli. Es ist davon bereits eingangs (p. 6) die Rede gewesen, wie unter Schleiden (p. 27), ferner was die Verhältnisse bei *Thinouia* und die auf diese Gattung zu beziehende Figur 231, gleichwie die Berichtigung der betreffenden Angaben auf Seite 598 und 600 betrifft, bei Betrachtung der dritten Anomalie (im Vorausgehenden p. 22), endlich bezüglich der auf Seite 601 und 623 von De Bary erwähnten *Urvillea laevis* bei Betrachtung der vierten Anomalie (s. ob. p. 23). Ueber die Erhöhung der von De Bary auf Seite 600 nach meiner Angabe angeführten Zahl von 84 *Serjania*-Arten mit zusammengesetztem Holzkörper auf 89 habe ich schon oben p. 3, Anmerkung 1, berichtet.

B. Ueber die Blattstructur.

a. Ueber die Gefässbündelanordnung im Blattstiele.

Bei dem günstigen Resultate, welches die Untersuchung der Zweig- und Stammstructur für die Systematik bei der Gattung *Serjania* ergeben hat, lag es nahe, auch die Structur des Blattstieles in gleicher Hinsicht einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen. Dieselbe ist von meinem früheren Assistenten, Herrn Dr. Bokorny, so weit das Material es gestattete, durchgeführt worden.

Es haben sich dabei belangreiche Resultate ergeben, wie im Folgenden sich darstellt.

Querschnitte durch den Blattstiel von *Serjanien* zeigen im allgemeinen ein geschlossenes Hauptsystem von Gefässbündeln (Gefässbündelring) mit continuirlichem Sclerenchymringe und Bastringe. Die Gefässbündel, resp. die Holzkörper derselben, treten in verschiedener Zahl auf und erscheinen bald weit von einander abstehend, bald nahe an einander gerückt; der in der Mediane nach oben liegende ist immer durch seine Grösse ausgezeichnet. Milchsaftzellen finden sich fast überall, meist in Rinde und Mark, öfters aber auch im Baste. Gerbstoff findet sich sehr häufig, namentlich in Rinde, Bast und Markscheide; doch ist sein Vorkommen nicht constant bei derselben Art (z. B. *S. clematidifolia*).

Neben dem Hauptsysteme treten auch rindenständige oder markständige Gefässbündel, oder beide gleichzeitig auf.

Rindenständige Gefässbündel, entweder in Ausbuchtungen des Hauptsystemes, in Falten, oder vollständig frei liegend, finden sich fast überall; von 130 untersuchten Arten besassen 122 rindenständige Gefässbündel. Ob diese Gefässbündel vollständig frei oder in Falten liegen, ist systematisch nicht von Belang, da oft Exemplare derselben Art (z. B. *S. marginata*) das einemal freie, das anderemal in Falten liegende rindenständige Gefässbündel zeigen. Desswegen wurden auch diese beiden Fälle in der nachfolgenden Tabelle nicht unterschieden. Acht Arten, die sich in verschiedene Sectionen vertheilen, zeigten keine Andeutung von rindenständigen Gefässbündeln. Sehr selten und zerstreut finden sich Arten mit beiderseits mehr als 1 rindenständigen Gefässbündel; die Zahl derselben steigt alsdann höchstens auf 2 jederseits, und man kann nicht sagen, dass irgend eine Section oder einzelne Art durch das Vorkommen einer grossen Anzahl rindenständiger Gefässbündel ausgezeichnet sei.

Markständige Gefässbündel wurden bei 23 Arten gefunden. Bei 3 Arten, *S. paradoxa*, *caracasana* und *marginata*, war diess Vorkommen für die verschiedenen Formen derselben Art nicht constant, ja bei *S. caracasana* zeigte sich hierin sogar bei Exemplaren derselben Form (cultivirten und wildwachsenden) keine Uebereinstimmung. Bei den übrigen 20 Arten war das Vorkommen markständiger Gefässbündel ein constantes. Die Zahl und Lagerung der markständigen Gefässbündel ist in systematischer Hinsicht nicht von Belang, wie z. B. *S. perulacea* zeigt, bei welcher bald 3, bald 4, bald 5 solcher Gefässbündel vorhanden sind, die sich in einen Kreis ordnen oder über einander lagern, frei bleiben oder mit ihren Basttheilen verschmelzen.

Eine Uebersicht dieser Verhältnisse nach den einzelnen Sectionen von *Serjania* gibt für die in der Monographie von *Serjania* aufgeführten Arten die folgende Tabelle. Auf die in dem Supplemente hinzugefügten 10 neuen Arten ist die Untersuchung wegen des grossentheils äusserst fragmentarischen Materiales nicht ausgedehnt worden. Aus der gleichen Ursache mussten auch einige der älteren Arten übergangen werden, welche die Tabelle namhaft macht.

(Die Tabelle folgt auf nächster Seite.)

Section	Zahl der Arten	Zahl der untersuchten Arten	Namen der nicht untersuchten Arten	Arten mit rindenständigen und markst. Gefässbündeln	Arten mit rindenst. G.B. (1 selten, 2 jederseits), ohne markst. Gef.-Bündel	Arten ohne rindenst. Gefässbündel mit markständ. Gefässbünd.	Arten ohne rindenst. und ohne markst. Gefässbündel
I	14	12	S. cardiospermoides u. squarrosa	—	12	—	—
II	2	2	—	S. cornigera	1	—	—
III	22	21	S. dura	S. trifoliata, elegans, corrugata, (paradoxa)[1]	16	—	S. cuneolata
IV	11	9	S. aculeata und Seemanni	(S. caracasana)[1] S. grandiflora	7	—	—
V	4	4	—	(S. marginata)[1]	3	—	—
VI	6	5	S. plicata	—	4	—	S. exarata
VII	7	6	S. equestris	S. paniculata und scatens	4	—	—
VIII	8	7	S. amplifolia	S. ovalifolia, oblongifolia u. fuscifolia	4	—	—
IX	9	9	—	—	6	S. perulacea	S. lamprophylla u. oxytoma
X	6	6	—	S. rubicaulis	3	S. brachycarpa	S. mexicana
XI	17	12	S. subtriplinervis, acuta incisa, sphenocarpa, rigida	—	11	—	S. polystachya
XII	29	26	S. brachystachya S. trachygona S. impressa	S. serrata, goniocarpa curassavica, insignis, noxia, multiflora purpurascens	19	—	—
Arten unbestimmter Stellung	10	8	S. circumvallata S. angustifolia	—	7	—	S. hamuligera
Summe	145	127	18	21	97	2	7

1) Die eingeklammerten Arten besitzen nur in einzelnen ihrer Formen markständige Gefässbündel.

b. Ueber die Structur der Blattspreite.

Die anatomischen Verhältnisse der Blattspreite bei der Gattung *Serjania* stellen sich folgendermassen dar.

Die Blätter aller Arten sind bifacial gebaut (s. Taf. VI, VII, Fig. 2, 3).

Die Oberseite ist nur bei wenigen Arten, welche in der unten folgenden Zusammenstellung genannt sind, mit Spaltöffnungen versehen, und auch dann oft nur in der Nähe der grösseren Gefässbündel (s. unten A, a, 1 und 2).

Die Innenwandungen der Epidermiszellen beider Blattseiten, besonders aber der Oberseite, sind bei vielen Arten verschleimt (s. Taf. VI, Fig. 2, 3, Taf. VII, Fig. 1—3, v). Derartige Zellen können matt durchscheinende Punkte bilden (s. Monographie p. 99, 100, 102).

Als Anhangsorgane der Epidermis finden sich überall auf beiden Blattseiten kleine, meist wenigzellige und kurzgestielte Drüsen. Ausserdem, aber nicht bei allen Arten, mehr oder minder dickwandige, spitzige, gewöhnlich einzellige Haare.

Niemals ist Hypoderm entwickelt.

Das Pallisadengewebe ist einschichtig, das schwammförmige Gewebe mehrschichtig. Beide Gewebe enthalten bei zahlreichen Arten, aber nicht stets bei derselben Art, Krystalle von oxalsaurem Kalke, gewöhnlich in Drusen.

Im Pallisadengewebe, oder an der Grenze von Pallisaden- und Schwammgewebe finden sich kugelige, oder bald stehend, bald liegend ellipsoidische, oder unregelmässig gestaltete, nicht selten flaschenförmige, mit dem Halstheile dann zwischen die Pallisadenzellen eingeschobene Secretzellen (s. Taf. VI, Fig. 2, 3, sz). Sie kommen übrigens nicht allen Arten zu (s. unten B, 1). Bei vielen Arten bilden sie hell durchsichtige Punkte oder Strichelchen (s. Monographie p. 6, p. 99).[1])

Andere Secretzellen von schlauchförmig gestreckter Gestalt und meist zu längeren oder kürzeren Zellenzügen aneinander gereiht finden sich bei allen Arten an der unteren Blattseite, unmittelbar nach innen von der Epidermis, seltener auch weiter nach innen, oder auch an der Oberseite über den grösseren Gefässbündeln.

Uebergänge zwischen diesen beiderlei Secretionsorganen, von denen ich die ersteren schlechthin Secretzellen, die letzteren Secretschläuche oder Milchsaftschläuche[2]) nennen will, sind nach Lage und Form gelegentlich zu beobachten.

---

1) Durchsichtige Punkte von Secretzellen und solche von Schleimzellen können neben einander vorkommen, und da, wo erstere klein sind, ziemlich gleiche Deutlichkeit besitzen, wie z. B. bei *S. laxiflora* und *macrostachya*.

2) Die frühere Bezeichnung der letzteren in der Monographie von *Serjania*, Gattungscharakter p. 6, als „vasa laticis“ ist in dem allgemeineren Sinne von „Milchsaftbehälter“ zu nehmen. Bei Unterscheidung dieser in eigentliche Milchsaftgefässe, Milchsaftröhren (das heisst mit dem sie enthaltenden Organe fortwachsende und somit sehr lang gestreckte Zellen) und Milchsaftzellen oder Milchsaftschläuche (d. h. bald kürzere, bald längere, meist aneinander gereihte Zellen) sind sie den letztgenannten zuzuzählen, wie schon p. 99 der Monographie angegeben ist.

So namentlich sehr weite Milchsaftschläuche (s. Taf. VI, Fig. 2, 3, s), welche nur locker zu Reihen verbunden sind, bei bestimmten Arten (s. unten C, 3).

Das Secret ist in beiden in der lebenden Pflanze milchsaftartig, im trockenen Zustande eine Art Gummiharz darstellend, einfach brechend, bald farblos, bald heller oder dunkler braun gefärbt, bald in Alkohol, bald in Wasser vollständiger löslich. Der Inhalt der Schläuche widersteht übrigens dem Wasser auch dann in beträchtlichem Maasse, wenn bei der gleichen Pflanze der Inhalt der Secretzellen in Wasser löslich ist. Solche Secretzellen zeichnen sich gewöhnlich durch verdickte Wandungen aus (s. unten B, 2).

Die Milchsaftschläuche verlaufen bei manchen Arten mit dem Venennetze, fast alle oder doch zum grössten Theile, und im ersteren Falle fast alle Venen begleitend (s. unten C, 1 und 2). Bei anderen und zwar den meisten Arten erscheinen sie gänzlich oder fast gänzlich unabhängig von dem Venennetze, für sich selbst ein mehr oder minder zusammenhängendes Netzwerk bildend. Sie können bei hellem Inhalte als durchsichtige Linien, oder bei den ersteren Arten als durchsichtige Theile des Venennetzes erscheinen. Bei spärlichem Inhalte sind sie mitunter schwer wahrzunehmen (s. unten C, 4). Nicht selten sind sie, namentlich bei gefärbtem Inhalte, leichter im auffallenden als im durchfallenden Lichte zu sehen, wie schon in der Monographie von *Serjania*, p. 99, hervorgehoben wurde, oder erst bei Wechsel der Beleuchtung unter Fixirung derselben Stelle unter der Lupe.[1])

---

1) Grisebach hat die als durchsichtige Linien erscheinenden Milchsaftschläuche von durchscheinenden Venen nicht genügend unterschieden, wenn er mir (Symbol. ad. Flor. argentin., 1879, p. 79) vorwirft, dass ich der *Serjania meridionalis*, bei welcher nur die Venen etwas durchsichtig seien, Blätter mit durchsichtigen Punkten und Linien zugeschrieben habe.

Dem in solchen Untersuchungen Ungeübten können allerdings die feinen Milchsaftschläuche der *Serj. meridionalis* leicht entgehen.

Zugleich hat Grisebach mit *Serj. meridionalis*, wie bei dieser des näheren darzulegen ist, die *Serj. hebecarpa* Benth., forma *platycephala* m. und eine früher von ihm selbst als *Serj. foveata* bezeichnete neue Art zusammengeworfen. Auf diese beiden Arten passt allerdings das für *Serj. meridionalis* von mir Angegebene nicht. *Serj. hebecarpa* ist zufällig eine von denjenigen Arten, bei welchen die Milchsaftschläuche ziemlich ausnahmslos mit den Venen verlaufen und diese heller durchscheinend machen. Die *Serj. foveata* ferner gehört zu jenen Arten, bei welchen das grossentheils der Fall ist (s. im Folgenden unter C, 1 und 2). Bei *Serj. meridionalis* dagegen verlaufen die Milchsaftschläuche fast nie mit den Venen; sie kreuzen sich vielmehr, was die Richtung ihres Verlaufes im allgemeinen betrifft, mit jenen Venen, welche (als Venen erster Ordnung) rechtwinkelig von den Seitennerven sich abzweigen und den Raum zwischen diesen auf dem kürzesten Wege durchziehen, und streben ihrerseits in dem Raume zwischen zwei Seitennerven, mit diesen im allgemeinen parallel, in geschlängeltem Laufe dem Rande des Blattes zu, nur gelegentlich einmal mit einem Venenaste zweiter oder dritter Ordnung auf eine kurze Strecke zusammentreffend.

Durch Rücksichtnahme auf diese Verhältnisse lässt sich die *Serj. meridionalis* leicht, auch in sterilem Materiale, von den durch Grisebach damit unrichtiger Weise zusammengeworfenen Arten, *Serj. hebecarpa* und *Serj. foveata*, unterscheiden.

Die Gefässbündel, namentlich jene, welche die Seitennerven bilden, sind bei der Mehrzahl der Arten mit Hartbast (Taf. VI, Fig. 2, 3, b) versehen, und dann von Zellen mit Einzelkrystallen, im anderen Falle von solchen mit Krystalldrusen (Taf. VII, Fig. 2, 3) begleitet (s. unten D, 1—3). Mitunter durchsetzen sie unter Auflagerung von Sclerenchym und Collenchym das Mesophyll von einer Epidermisplatte bis zur anderen. In ihrer Nähe finden sich, besonders an der Unterseite, in gleicher Richtung gestreckte gerbstofführende Zellen und, wie schon in der Monographie von *Serjania*, p. 100, bemerkt wurde, bei manchen Arten (namentlich der I. Section) auch verschleimte Zellen (Taf. VII, Fig. 2, 3, v').

Die letzten Verzweigungen der Gefässbündel liegen unter dem Pallisadengewebe, Schlingen und freie Enden bildend, die letzteren oft frei von Hartbast (s. die unten folgende Zusammenstellung).

Die Hartbastfasern ziehen sich mit ihren Spitzen gelegentlich von dem Gefässbündel weg und zwischen die Blattfleischzellen hinein. Bei manchen Arten sind die freien Enden und die Anastomosen der Gefässbündel sogar umgeben und überragt von Büscheln auseinandertretender und in mannigfach gekrümmtem oder zickzackförmigem Laufe durch das Blattfleisch sich hinziehender und selbst an die Epidermisplatten sich anschmiegender Bastfasern (Sclerenchymfasern), welche durch ihren deutlichen Zusammenhang mit den Gefässbündelenden sich von den im Blattfleische und unter der Epidermis vieler anderer Gewächse auftretenden Sclerenchymfasern unterscheiden. Dieses Verhältniss findet sich übrigens nur bei vier Arten der 9. Section, welche auch nach anderen Beziehungen als einander nächst verwandte Arten sich kennzeichnen (s. unten D, 5).

Die Tracheiden an den Gefässbündelenden sind bei manchen Arten mehr oder minder erweitert und mitunter etwas sclerenchymatisch (s. unten D, 4).

Ueber die Epidermis und ihre Anhangsorgane ist noch Folgendes zu bemerken.

Die Epidermiszellen sind gewöhnlich polygonal, an der unteren Blattseite auch mit etwas gebogenen, aber nie wellig gebogenen Seitenrändern, gewöhnlich mit mehr oder minder deutlicher Sculptur der Cuticula in Form von schwach geschlängelten oder geschweiften Linien versehen, deren Richtung, wie die Streckung der Epidermiszellen, wo eine solche bemerkbar ist (s. Taf. VII, Fig. 1), von dem Verlaufe der Gefässbündel oder der Milchsaftschläuche (an der unteren Blattseite) oder der strahlen- und rosettenförmigen Gruppirung der Zellen um die Insertionsstellen der Haargebilde abhängig erscheint.

Die Verdickung der äusseren Wandungen der Epidermiszellen ist eine mässige; ebenso die Cuticularisirung. Tüpfel wurden weder auf der Aussenfläche noch auf den Seitenflächen je bemerkt.

Ueber die Verschleimung der Innenwandung, in welcher wahrscheinlich eine Schutzvorrichtung gegen Wasserverlust zu sehen ist, wie ich schon an anderer Stelle (Beitrag zur africanischen Flora, Abhandl. des naturwiss. Vereines in Bremen, VIII, 1883, p. 378) hervorgehoben habe, ist, abgesehen von einer kurzen Erwähnung der-

selben und ihres Werthes für die Systematik zu Norwich i. J. 1868 (s. Radlkofer in Report of the XXXVIII Meeting of the British Association etc., p. 111), in der Monographie von *Serjania*, 1875, p. 100 etc. bereits Näheres zur Mittheilung gelangt. Sie betrifft bald nur vereinzelte (s. Taf. VII, Fig. 1, 2, 3), bald fast alle Zellen, namentlich der oberen Blattseite, soweit sie nicht über Gefässbündeln oder Secretzellen liegen (Taf. VI, Fig. 2, 3). Die verschleimten Zellen sind da, wo sie zwischen unveränderten liegen, schon in der Flächenansicht leicht zu erkennen (s. Taf. VII, Fig. 1), sowohl an der abweichenden Gestalt und der Grösse ihrer Aussenfläche, als an einem eigenthümlichen Glanze und durch die Zurückdrängung der Pallisadenzellen, so dass diese an dünnen Flächenschnitten hier nicht mehr getroffen erscheinen (s. Taf. VII, Fig. 1). An trocken gefertigten Schnitten, rechtwinkelig zur Blattfläche, ist die verschleimte Membran, besonders nach Verdrängung der Luft durch Alkohol, als eine das Licht in ähnlicher Weise wie cuticularisirte Membranen (s. d. Monographie, p. 102) doppelt brechende, helle Masse von bald grösserer, bald geringerer Ausdehnung an der Innenfläche der Epidermis gewöhnlich leicht wahrzunehmen (s. Taf. VI und VII, Fig. 2), und ihre allmälige Veränderung durch Quellung bei Wasserzufuhr Schritt für Schritt bis zur vollständigen Ausdehnung, unter Hervortreten deutlicher Schichtung oder ohne solches, zu verfolgen (s. hierüber und über das reactive Verhalten die Monographie von *Serjania*, p. 101 etc.). Die Quellung ist bei verschiedenen Arten verschieden stark. Die Schleimmasse durchschnittener Zellen verbreitet sich meist weit über die Ränder des Objectes (s. Taf. VI und VII, Fig. 3). Die unter den verschleimten Zellen liegenden, verkürzten Pallisadenzellen werden bei der Quellung gegen das Innere des Blattes vorgeschoben (s. Taf. VII, Fig. 3). Die Verschleimung ist in der Regel constant für die betreffende Art. Nur wenige Ausnahmen wurden in dieser Hinsicht beobachtet, wie bei *Serjania dentata* und *reticulata*. Auch für natürliche Gruppen von Arten und selbst für einzelne Gattungssectionen ist dieselbe charakteristisch (s. d. Monographie von *Serjania*, p. 102). Nicht unbemerkt mag bleiben, dass von den Arten, bei welchen Hartbast nicht oder nur sehr schwach entwickelt ist, eine sehr grosse Zahl (vier Fünftel) verschleimte Epidermiszellen besitzen (s. unten D, 3, mit Ausnahme von *S. mollis*, *platycarpa*, *velutina*, *Salzmanniana*, *crassifolia*, *oxyphylla*, *striata*, *sufferruginea*); ferner, dass solche fast der Hälfte jener Arten fehlen, bei welchen der Hartbast kräftig entwickelt ist (s. unten D, 1 im Vergleiche mit den Artcharacteristiken; abweichend verhalten sich namentlich *S. tenuis* und *chartacea* in der I. Section, *S. grandifolia* in der VI. Sect., die Arten der VII. Section und mehrere Arten der IX., X. und XII. Section, sowie solche zweifelhafter Stellung).

Was die Anhangsorgane der Epidermis betrifft, so erscheinen die Drüschen in verschiedenen Modificationen, deren einzelne für bestimmte Arten charakteristisch sind. Im allgemeinen sind sie kurz, mit selten mehr als vierzelligem, rundlichem oder verkehrt eirundem Köpfchen, an welches sich ein gekrümmter, nach unten verjüngter, etwa dreizelliger Stiel anschliesst. Die Krümmung des Stieles bewirkt, dass das Köpfchen der Epidermis angeschmiegt erscheint. Eine Ausnahme macht hierin *Serjania cuspidata*.

Die Zellen sind dünnwandig; nur bei drei Arten (s. unten) erscheinen die Zellwände an der Oberfläche des Köpfchens verdickt. Zugleich sind die Köpfchen hier meist aus zahlreichen Zellen gebildet und schärfer gegen den Stiel abgesetzt. Erheblicher abweichende Formen finden sich nur in der 3. Section: Nämlich einerseits solche mit länglichem oder keulenförmigem, vielzelligem Köpfchen auf kurzem, geradem Stiele, und andererseits gewöhnlich nur über den grösseren Gefässbündeln stehende (bei einigen derselben Arten und noch einer weiteren) mit verlängertem, in ein Gliederhaar ausgebildetem Stiele, dessen Endigung ein verhältnissmässig sehr kleines, oft sogar nur einzelliges Köpfchen darstellt (s. unten).

Eine Gruppirung der Arten nach den besonderen Verhältnissen der Blattstructur, um deren vollständige Eruirung sich mein Assistent, Herr Dr. Hobein, durch Ausdehnung der Untersuchung auf das gesammte Material, unter alleiniger Ausnahme der nicht mehr in meinen Händen befindlichen *Serjania circumvallata*, verdient gemacht hat, führt zu folgender Uebersicht.

A. Gruppirung nach der Beschaffenheit der Epidermis[1]):

a. Spaltöffnungen:

1. Spaltöffnungen auch oberseits vorhanden, und zwar über die ganze Fläche vertheilt:
Sect. I: S. trichomisca 16[2]); Sect. XI: S. sphenocarpa 101, californica 103; Sect. XII: S. cissoides 123.

2. Spaltöffnungen oberseits nur in der Nähe der grösseren Gefässbündel:
Sect. III: S. depauperata 42; Sect. VII: S. sinuata 65; Sect. XI: S. mucronulata 113; Sect. XII: S. orbicularis 120, tristis 121.

b. Drüsen:

1. Drüsen mit kurzem, gekrümmtem Stiele und kleinem, rundlichem oder verkehrteiförmigem Köpfchen.

Hieher gehören die sämmtlichen Arten bis auf die unter 2. und 3. genannten aus der III. Section.

Besonders hervorzuheben sind nur 5 Arten:

2 aus Sect. X: S. mexicana 91 und S. rubicaulis 92 mit Rücksicht auf die traubige Gestalt der Drüsenköpfchen, welche durch bauchige Hervorwölbung der Zellwandungen an der Oberfläche bedingt ist;

3 ferner aus Sect. III, VII und IX: S. diversifolia 43, ovalifolia 72 und lethalis 82, wegen ihrer meist vielzelligen Köpfchen mit beträchtlich verdickten Zellwänden der Oberfläche und mit schärferer Absetzung gegen den Stiel, welcher bei S. ovalifolia sehr kurz, meist nur einzellig ist. Bei dieser Art ist die Verdickung der Zellwände an der Oberfläche des hier verkehrt eiförmigen Köpfchens am beträchtlichsten.

---

1) Die Verschleimung der Epidermis ist schon in den Artcharacteristiken berücksichtiget und desshalb hier übergangen.

2) Die den Artnamen beigefügten Nummern sind die der jetzigen Reihenfolge der Arten (vergl. den Conspectus specierum und die tabellarische Uebersicht über die geographische Verbreitung der Arten).

2. Drüsen mit kurzem, geradem Stiele und grossem, länglichem oder keulenförmigem, vielzelligem Köpfchen:

   Sect. III: S. eucardia 23, velutina 24, Salzmanniana 25, subimpunctata 26 (mit Uebergängen zu der gewöhnlichen Form), pedicellaris 27 (schwach gekrümmt), altissima 28, deflexa 33, paleata 34, elegans 35, corrugata 36.

3. Drüsen mit langem, ein Gliederhaar darstellendem Stiele und kleinem, oft nur einzelligem Köpfchen:

   Sect. III.: S. eucardia 23, altissima 28, glutinosa 29, deflexa 33, paleata 34, elegans 35.

B. Gruppirung mit Rücksicht auf die Secretzellen:

1. Secretzellen nicht vorhanden:

   Sect. I: S. tenuis 1, Regnellii 2, cuspidata 3, hirsuta 4, communis 5, viridissima 6, stenopterygia 7, cardiospermoides 10, dumicola 11, leptocarpa 12, Ampelopsis 13, areolata 14, chartacea 15, squarrosa 17; Sect. III: S. eucardia 23, altissima 28, glutinosa 29, comata 30, acoma 31, cuneolata 32, depauperata 42; Sect. VI: S. thoracoides 64; Sect. IX: S. lamelligera 89; Sect. X: S. longipes 93, brevipes 94, brachycarpa 96; Sect. XI: S. cystocarpa 102, macrococca 104, rigida 114; Sect. XII: S. meridionalis 117, orbicularis 120, hebecarpa 124, rhombea 138.

2. Secretzellen mit in Wasser löslichem Inhalte und verdickten Wandungen:

   Sect. III: S. gracilis 38, dura 39, macrostachya 40, laxiflora 41; Sect. V: S. dibotrya 58; Sect. VI: S. membranacea 59, plicata 62; Sect. IX: S. lethalis 82, scopulifera 83, ichthyoctona 84, lamprophylla 88, oxytoma 90; Sect. XI: S. vesicosa 109, parvifolia 112, sufferruginea 115, inflata 116; Sect. XII: S. filicifolia 118, tristis 121, trachygona 140; Species sedis dubiae: S. setulosa 146, inebrians 152.

3. Secretzellen von zweierlei Art, die einen mit gummiartigem, in Wasser löslichem, die andern mit milchsaftartigem Inhalte:

   Sect. XII: S. deltoidea 135, clematidea 139; Species sedis dubiae: S. setulosa 146, hamuligera 147, piscatoria 148 (nur bei einigen Exemplaren fanden sich beiderlei Secretzellen, bei andern nur solche mit milchsaftartigem Inhalte).

C. Gruppirung nach dem besonderen Verhalten der Milchsaftschläuche:

1. Milchsaftschläuche der unteren Blattseite fast ausnahmslos mit den Gefässbündeln verlaufend:

   Sect. III: S. platycarpa 22; Sect. XII: S. hebecarpa 124, Mansiana 125, nigricans 145.

2. Milchsaftschläuche der untern Blattseite grossentheils mit den Gefässbündeln verlaufend:

   Sect. I: S. decemstriata 8, foveata 9, confertiflora 19; Sect. II: S. cornigera 20, mollis 21.

3. Milchsaftschläuche der untern Blattseite von bedeutender Grösse, oft nur locker zu Reihen verbunden:

   Sect. I: S. trichomisca 16; Sect. III: S. eucardia 23, diversifolia 43; Sect. V: S. erecta 57; Sect. VII: S. sinuata 65, crassinervis 67, subdentata 68; Sect. XI: S. macrococca 104, vesicosa 109, striata 111.

4. Milchsaftschläuche der untern Blattseite zart, schwerer nachzuweisen:

   Sect. I: S. tenuis 1, Regnellii 2, cuspidata 3, hirsuta 4, stenopterygia 7, cardiospermoides 10, dumicola 11, leptocarpa 12; Sect. XII: S. filicifolia 118, orbicularis 120.

5. Milchsaftschläuche und Secretzellen mit dunklem Inhalte:

Sect. III: S. platycarpa 22; Sect. VII: S. atrolineata (scatens) 70; Sect. XI: S. subtriplinervis 106, acuta 107.

6. Milchsaftschläuche auch an der oberen Blattfläche, wenigstens über den grösseren Gefässbündeln:

Sect. I: S. confertiflora 19; Sect. XI: S. striata 111; Sect. XII: S. impressa 136.

D. Gruppirung nach besonderen Verhältnissen der Gefässbündel:

1. Hartbast kräftig entwickelt, die grösseren, als Seitennerven erscheinenden Gefässbündel ringförmig umgebend, die kleineren bis in die letzten Endigungen begleitend. Längs der Gefässbündel Einzelkrystalle vorherrschend:

Sect. I: S. tenuis 1, chartacea 15; Sect. III: S. eucardia 23, corrugata 36; Sect. IV: Sämmtliche Arten und Formen; Sect. V: Sämmtliche Arten und Formen; Sect. VI: S. grandifolia 61, plicata 62; Sect. VII: Sämmtliche Arten (bei S. polyphylla 66 und crassinervis 67 finden sich neben Einzelkrystallen zahlreiche Krystalldrusen); Sect. VIII: S. ovalifolia 72, oblongifolia 73; Sect. IX: Sämmtliche Arten (bei S. scopulifera 83 neben Einzelkrystallen auch Krystalldrusen); Sect. X: S. mexicana 91, rubicaulis 92, longipes 93, brevipes 94, grammatophora 95; Sect. XII: S. tristis 121, deltoidea 135, rufa 137, multiflora 143; Species sedis dubiae: S. piscatoria 148, nodosa 149, brachyphylla 151, inebrians 152, nutans 153 (neben Einzelkrystallen auch Krystalldrusen).

2. Hartbast schwächer entwickelt, die grösseren Gefässbündel nicht ringförmig umgebend, die letzten Endigungen der Gefässbündel nicht mehr begleitend. Längs der Gefässbündel bei den meisten Arten Krystalldrusen vorherrschend:

Sect. I: S. Regnellii 2, foveata 9, dumicola 11, leptocarpa 12, trichomisca 16, confertiflora 19; Sect. III: S. Salzmanniana, forma 1 und 3, 25 (forma 2 s. unter D, 3), subimpunctata 26, pedicellaris 27 (bei den letztgenannten drei Arten sind vorwiegend Einzelkrystalle vorhanden), deflexa 33, paleata 34, elegans 35, paradoxa 37, gracilis 38, dura 39, macrostachya 40, laxiflora 41, depauperata 42, diversifolia 43; Sect. VI: S. membranacea 59, exarata 60, glabrata, forma 2, 63; Sect. VIII: S. subrotundifolia 74, tenuifolia 75, fuscifolia 76, amplifolia 77, clematidifolia 78, pinnatifolia 80; Sect. XI: S. Grosii 97, sordida 105, subtriplinervis 106, acuta 107, rigida, forma 1 und 2, 114; Sect. XII: S. meridionalis 117 (Einzelkrystalle vorherrschend), Cambessedeana 119, serrata 122, hebecarpa 124 (Einzelkrystalle vorherrschend), Mansiana 125, grandis 126, dasyclados 128, diffusa 129, Schiedeana 130, triquetra 131, goniocarpa 132, brachystachya 133, curassavica 134, impressa 136, rhombea 138, clematidea 139, trachygona 140, insignis 141, noxia 142, purpurascens 144, nigricans 145; Species sedis dubiae: S. setulosa 146, hamuligera 147, acuminata 154.

3. Hartbast fehlend oder sehr schwach entwickelt. Längs der Gefässbündel nur Krystalldrusen:

Sect. I: S. cuspidata 3, hirsuta 4, communis 5, viridissima 6, stenopterygia 7, decemstriata 8, cardiospermoides 10, Ampelopsis 13, areolata 14, squarrosa 17, paludosa 18; Sect. II: S. cornigera 20, mollis 21; Sect. III: S. platycarpa 22, velutina 24, Salzmanniana, forma 2, 25, altissima 28, glutinosa 29, comata 30, acoma 31, cuneolata 32; Sect. VI: S. glabrata, forma 1, 63, thoracoides 64, Sect. VIII: S. crassifolia 79; Sect. IX: S. lamelligera 89; Sect. X: S. brachycarpa 96; Sect. XI: S. racemosa 99, incisa 100, sphenocarpa 101, cystocarpa 102, californica 103, macrococca 104,

polystachya 108, vesicosa 109, oxyphylla 110, striata 111, parvifolia 112, mucronulata 113, sufferruginea 115, inflata 116; Sect. XII: S. filicifolia 118, orbicularis 120, cissoides 123, peruviana 127.

4. Endtracheiden der Gefässbündel etwas erweitert und bisweilen schwach sclerenchymatisch, beides besonders bei den mit * bezeichneten Arten:

   Sect. I: S. communis *5, dumicola *11, chartacea 15, confertiflora 19; Sect. II: S. cornigera 20, mollis *21; Sect. III: S. platycarpa 22, deflexa 33, paleata 34, elegans *35, corrugata 36, paradoxa 37, gracilis 38, dura *39, macrostachya 40, laxiflora 41, diversifolia 43; Sect. VI: S. membranacea 59, exarata 60, glabrata, forma 2, 63, thoracoides 64; Sect. VII: S. polyphylla 66; Sect. VIII: S. rotundifolia 74, tenuifolia 75, fuscifolia 76, pinnatifolia 80; Sect. XI: S. emarginata 98, racemosa 99, subtriplinervis 106, acuta 107; Sect. XII: S. orbicularis 120, cissoides 123, grandis 126, Schiedeana *130, goniocarpa 132, curassavica 134; Species sedis dubiae: S. brachyphylla 151, acuminata 154.

5. Hartbastfasern von den Gefässbündeln aus durch das Mesophyll sich verbreitend:

   Sect. IX: S. ichthyoctona 84, paucidentata 85, acutidentata 86, obtusidentata 87.

C. Ueber den Bau der Blüthe.

Um die richtige Auffassung des über den Blüthenbau in dem Gattungscharacter von *Serjania* Gesagten[1]) zu erleichtern, füge ich hier entsprechende Grundrisse (Diagramme) nach *Serjania Salzmanniana* und die Analyse der Blüthe und Frucht von *Serjania erecta* auf Taf. VIII bei.

Die Grundrisse (Fig. 1 und 2) sind sogenannte empirische, oder um die Sache noch richtiger zu bezeichnen, es sind in diesen Figuren mit dem Prisma bei 28-facher Vergrösserung gezeichnete Durchschnitte durch die Knospe von *Serj. Salzmannia* aus verschiedener Höhe dargestellt, der eine, Figur 1, aus der Höhe der Narbenschenkel, der andere aus der Mitte des Fruchtknotens. In Figur 2 sind die beiden grösseren Discusdrüsen, an deren Basis die (in Beziehung auf die Symmetrieaxe) oberen zwei Blumenblätter inserirt sind, von dem Schnitte getroffen, e und f, über welche in Fig. 2 der Schnitt hinweggegangen ist. In Figur 2 ist ausser der gegenseitigen Lage der Theile auch ihre Behaarung und der Drüsenbesatz des Fruchtknotens angedeutet. Die Zeichnungen sind zum Beschauer entsprechend der Stellung der Blüthe in der wie bei *Aesculus* aus Wickeln zusammengesetzten, einen hier traubenförmigen Strauss (Thyrsus) bildenden und aufrecht gedachten Inflorescenz orientirt, das 4. Kelchblatt nämlich, durch welches die Symmetrale geht, nach oben gekehrt, in Folge geringer Drehung des Blüthenstieles (mit diesem Blatte gegen die sympodiale Wickelaxe hin). Die Orientirung zwischen Abstammungsaxe und Tragblatt ist in üblicher schematischer Weise angedeutet, die Abstammungsaxe, A, durch einen Kreis mit eingezeichnetem

---

1) Vergleiche dazu auch Radlkofer, sur la fleur des Sapindacées, Actes du Congrès international de Botanique tenu à Paris, 1867, p. 23—26.

Kreuze, das Tragblatt, B, durch eine Klammer bezeichnet. Die Vorblätter, sowohl das sterile, untere (α), welches auf die Seite von Kelchblatt 1 und 4, aber mehr in die Nähe des letzteren als des ersteren fällt, als auch das fertile, obere (β), aus welchem die Wickelverzweigung sich fortsetzt und welches auf die Seite von Kelchblatt 3 und 5, aber mehr in die Nähe des letzteren als des ersteren fällt, sind weggelassen.

Die Kelchblätter, von welchen das dritte und fünfte an der unteren Seite der Blüthe bei vielen Arten höher hinauf und bis über ihre Mitte mit einander verwachsen sind, und welche, wenn sie durch ihren Haarfilz innig unter einander zusammenhängen, von manchen Autoren irriger Weise für ein einziges Kelchblatt angesehen wurden[1]) sind entsprechend ihrer Entstehungsfolge, mit welcher die Deckung übereinstimmt, nummerirt und durch einfache Schraffirung in schiefer Richtung vor den Blumenblättern ausgezeichnet. Dass das Centrum der Blüthe schon für den Kelch etwas nach unten verschoben und dem besonderen Centrum für Andröcium und Gynöcium an dieser Seite der Blüthe genähert ist, zeigt die Lage der durch die Kelchblätter nach Fünfteln des Kreisumfanges gezogenen Radien, von denen der eine durch eine punktirte Linie zur Symmetralen ergänzt ist.

Die Blumenblätter, von welchen das auf den Zwischenraum zwischen Kelchblatt 3 und 5 treffende dritte (in Beziehung auf die Symmetrieaxe das unterste) nicht zur Entwicklung kommt, und welche sich nach dem langen, durch den Pfeil neben A angedeuteten Wege mit $\frac{3+\frac{1}{2}}{5}$ Divergenz an das letzte Kelchblatt anschliessen, sind ebenfalls beziffert, und in ihrer Mitte sind die Gefässquerschnitte ihrer Mittelnerven zu erkennen. Ihre Deckung stimmt nicht mit ihrer Entstehungsfolge überein, ist vielmehr eine nach der Symmetralen aufsteigende, so dass die beiden tiefer stehenden die deckenden, die höher stehenden die gedeckten sind.

Die zu dem oberen und unteren Blumenblattpaare gehörigen Schuppen (Honigdecken) a, b und c, d zeigen in Figur 1 die Entwicklung ihrer Rückentheile zu den ihre Spitze krönenden Kämmen, und die nach abwärts gebogenen Anhängsel der oberen Blumenblattschuppen sind hier nahe an ihrem oberen, fleischigeren Ende getroffen a′, b′, während sie in Figur 2 nahe ihrem unteren dünneren Ende durchschnitten sind (a′, b′) und hier, da sie die honigabsondernden Discus-Drüsen e und f überdecken und übergreifen, in dem Raume zwischen diesen und den Staubgefässen erscheinen.

Die Staubgefässe, welche eigentlich 2 fünfgliedrige Kreise bilden, von dessen äusserem aber die letzten 2 Glieder, 4 und 5, deren Platz in der Figur 2 durch die entsprechenden Zahlen angedeutet ist, nicht zur Entwicklung kommen, sind entsprechend

1) Der Kelch wurde dann von den betreffenden Autoren als 4-theilig statt als 5-theilig bezeichnet. So von Plumier bei *Serj. sinuata* etc., von Cambessedes bei *Serj. grandiflora, Laruotteana* und *glabrata,* wie schon in der Monographie p. 176, 170 erwähnt ist, und von Grisebach bei *Serj. foveata* und *glabrata* (*fulta* Gr.), wie im später Folgenden bei diesen Arten, da hiedurch ihre richtige Auffassung erschwert wird, noch im einzelnen hervorzuheben sein wird.

der $^3/_5$ Stellung nummerirt, die des inneren, vollzähligen Kreises unter Beifügung eines Index zu der Ziffer.[1])

1) Die obige Darstellung entspricht dem, was ich über die Blüthenbildung der Sapindaceen auf dem botanischen Congresse zu Paris i. J. 1867 mitgetheilt habe.

In der Monographie von *Serjania* bin ich im Gattungscharacter in sofern davon abgewichen, als es mir nach Beobachtungen über das successive Auftreten der Blattorgane in der Blüthe der nahe verwandten Gattung *Cardiospermum* schien, dass die fehlenden Staubgefässe die vor die unteren (seitlichen) Blumenblätter fallenden, also das dritte und vierte des inneren Kreises seien, wie Payer, Organogénie comparée de la fleur, 1857, p. 150, Tab. 36, angenommen hat, indem die in dem Durchmesser rechtwinkelig zu der (durch das vierte Kelchblatt gehenden) Symmetrieaxe stehenden (mittleren) Staubgefässe, von deren Deutung als epipetaler oder episepaler die Entscheidung der Frage über die Stellung der fehlenden abhängt, welche aber, wie die Figur 4, Taf. 32 von Payer zeigt, weder vor der Mitte zweier Blumenblattanlagen, noch vor der Mitte zweier Kelchblätter stehen, doch mehr vor zwei Kelchblätter als vor zwei Blumenblätter zu fallen scheinen.

Da aber die auf 8 reducirten, in einen Kreis geordneten Staubgefässe schon bei ihrer Entstehung in gleichen Abständen von einander auftreten, so kann die erwähnte Lage der mittleren Staubgefässe auch lediglich eine Folge der gleichheitlichen Vertheilung aller sein, und die Frage nach ihrer und nach der Natur der fehlenden Staubgefässe wird so zu einer direct kaum lösbaren.

Wenn man jedoch berücksichtiget, dass nach den Darstellungen von Payer, die Entwicklung der innerhalb des Kelches befindlichen Blüthentheile in der Richtung der Symmetralen von oben nach unten (von Kelchblatt 4 zu 3 und 5 hin) vorschreitet, also im oberen Theile begünstiget ist, dass aber doch nicht das episepale Staubgefäss vor Kelchblatt 4, sondern die seitlich davon stehenden epipetalen Staubgefässe die zuerst erscheinenden und selbst etwas weiter als die übrigen nach aussen gerückt sind, so drängt sich einem die Meinung auf, dass das auf eine obdiplostemone Natur der Blüthe hinweise, vermöge welcher die epipetalen Staubgefässe, wohl weil sie über den lange auf jugendlichem Zustande verharrenden Blumenblättern sich befinden, in ihrer Entwicklung vor den anderen, über den früh zur vollen Ausbildung gelangenden Kelchblättern stehenden begünstiget sind. Dann aber werden auch die in der Entstehung nächstfolgenden mittleren, etwas nach unten von der Mitte des 1. und 2. Kelchblattes stehenden Staubgefässe als etwas nach oben gerückte epipetale zu betrachten sein, während die diesen Kelchblättern entsprechenden episepalen unterdrückt bleiben.

Es steht dieser Annahme das Verhalten von *Aesculus* zur Seite, woselbst bei Reducirung der Staubgefässe auf 7 das episepale Staubgefäss über Kelchblatt 4, also auf Seite der stärksten Discusbildung (womit allerdings die Angaben von Payer nicht übereinstimmen) es ist, welches noch weiter unterdrückt wird.

Wenn nicht etwa Beobachtungen bei anderen Gattungen sich entgegenstellen, wie die Payer's über ein gleichzeitiges Auftreten der 5 episepalen Staubgefässe vor den übrigen bei *Koelreuteria*, welche Beobachtungen erst noch der Wiederholung bedürfen, und welche vielleicht aus einer Hinneigung der Blüthe zu einfacher Diplostemonie bei veränderter Discusgestaltung zu erklären sind, so lässt sich die Sache unter gleichzeitiger Rücksichtnahme auf die auch nur theilweise zur Ausbildung gelangende Krone wohl so, wie ich es auf dem Pariser Congresse gethan habe (s. a. a. O. p. 25), formuliren, dass es nämlich bei den durch einseitige Entwicklung des Discus symmetrisch werdenden Blüthen der Sapindaceen die zwischen die Discusexcrescenzen (seien diese gesondert ausgebildet oder mit einander verschmolzen) fallenden Theile des Andröciums einerseits, der Blumenkrone andererseits sind, welche zum Fehlschlagen neigen und in ihrer Entwicklung gleichsam erstickt werden. In dem unteren Theile der Blüthe ist es ein Blumenblatt, welches dem Andröcium Platz zur Entwicklung seiner Theile macht, in dem oberen sind es episepale Glieder des Andröciums, welche den Blumenblättern und den sie tragenden Discustheilen ihren Platz opfern.

Die nur zu dritt entwickelten Fruchtblätter, welche in entsprechender Stellung in der ersten, wie in der zweiten Figur in dem von den Staubgefässen umgebenen Raume zu erkennen sind, und zwar in der zweiten Figur als Fruchtknotenfächer mit je einer Samenknospe, erscheinen derart geordnet, dass das unpaare nach unten gekehrt ist, dem Platze des unterdrückten Blumenblattes genähert.

Ueber die analytischen Darstellungen ist dem in dem Gattungscharacter und hier in der Figurenerklärung Gesagten kaum etwas beizufügen.

D. Ueber die geographische Verbreitung.

Für die Angaben über die geographische Verbreitung am Ende der Gattungscharakteristik ergeben sich aus der Erhöhung der Artenzahl von 145 auf 155 einige, wenn auch nicht sehr erhebliche Aenderungen. Der betreffende Abschnitt hat nunmehr folgendermassen zu lauten.

Distributio geographica. Species 155 (primum hic distinctae 88) per solam Americam calidiorem inter cancrum et capricornum praesertim divulgatae tricesimum latitudinis gradum borealis, tricesimum quintum meridionalis hemisphaerae non transgrediuntur. Boream maxime accedunt *Serjania brachycarpa*, in Texas indigena, *S. incisa* in Texas meridionali et in Mexico septentrionali obvia, nec non *S. sphenocarpa* et *S. cystocarpa* Mexici septentrionalis; versus meridiem maxime procedunt *S. decemstriata*, *S. Laruotteana*, *S. meridionalis* et *S. hebecarpa*, hae in Uruguay prope Montevideo, illae in Republica Argentina prope Buenos-Ayres lectae, omnes in Brasilia meridionali quoque obviae. Usque ad altitudinem 2600—2800 Metr. ascendunt (*S. dumicola*, *S. areolata*, *S. diffusa*, Andium Boliviensium incolae). Nulla in ulla orbis veteris terra nec indigena nec ex America translata invenitur. Nulla per totam regionem supra indicatam diffusa est. Maximam regionem *S. caracasana* occupat, magnam *S. communis*, *glabrata*, *mexicana*. Plurimae, 68 scil., Brasilienses dicendae sunt, multae, 21 scil., Mexicanae, 16 Peruvianae, 13 Neo-Granatenses (inclus. Panamensibus), 11 Antillanae, aliae pauciores, 6 scil., Bolivienses, 6 Guianenses, 4 Ecuadorenses, 3 Centroamericanae, 3 Venezuelanae, 2 Argentinae, 2 Texanae et, quod notandum, ejusdem terrae species inter se adeo plerumque affines sunt, ut fere solae unam vel plures sectiones vel sectionum partes (subsectiones vel quasi subsectiones) constituant, quibus paucae tantum extraneae adjiciendae sunt, unde elucet, vere naturales esse sectiones.

Ueber die letzterwähnten Beziehungen zwischen geographischer Verbreitung und systematischer Stellung der Arten ist die tabellarische und kartographische Uebersicht am Ende des Supplementes mit den dazu gehörigen Bemerkungen zu vergleichen.

III. Gattungsgeschichte.

Bezüglich der in der tabellarischen Zusammenstellung der Linné'schen Arten angeführten und p. 23 und 25 der Monographie noch weiter besprochenen, im Herb. Linné unter den unrichtigen Bezeichnungen *Paullinia pinnata*, *P. mexicana* und *P. curassavica* befindlichen Pflanzen verweise ich auf die weiteren Mittheilungen darüber, welche der Zusatz n. 2 zu *Paullinia pinnata* in der alsbald zu veröffentlichenden Monographie von *Paullinia* enthalten wird. Ebenso bezüglich der unter *Paullinia tomentosa* im Herb. Linné befindlichen Art von *Rhus* — *R. semialata* Murr. — auf den Zusatz n. 1 unter *Paullinia tomentosa*. —

Ueber die p. 34 nach Citaten des Herb. Jussieu erwähnten Materialien des Herb. Surian kann ich nach erneuten Nachforschungen im Pariser Museum die Mittheilung machen, dass sie noch sämmtlich vorhanden sind. Ich stelle sie im Folgenden nach der Nummernfolge zusammen, unter Angabe der im Herb. Surian befindlichen Pflanzentheile, nebst deren nach Autopsie von mir festgestellten Bestimmungen, und unter Anführung von Surian's Bezeichnungen, soweit sie publicirt sind oder Eingebornennamen enthalten, in Anmerkungen; zugleich mache ich die Pflanzen, bei welchen sie im Herb. Jussieu citirt sind, in den von Jussieu selbst eingetragenen Bezeichnungen und mit dessen Bemerkungen namhaft unter Voraussetzung der betreffenden Nummern des Herb. Jussieu. Weitere Nummern des Herb. Surian, welche im Herb. Jussieu bei *Paullinia Vespertilio* Sw. (864) und ebenso im Herb. Vaillant (864, 194, 115), wie hier auch unter *Sapindus Saponaria* L. (152) angegeben sind, übergehe ich, da die unter diesen Nummern im Herb. Surian vorhandenen Pflanzen gar nicht zu den Sapindaceen gehören.

Herb. Surian:	Meine Bestimmung:	Citirt im Hb. Jussieu bei:
n. 227; beblätterter Zweig mit Frucht	Paullinia pinnata L. emend.	n. 11353 B; Paull. pinnata L.
n. 234[1]); „ „ „ „	Paull. Cururu L. emend.	n. 11352; Paull. Cururu L.; fructus ex Hb. Surian.
n. 236[2]); „ „ „ „	Urvillea ulmacea Kunth	n.11345;Koelreuteria triphyllaJ.
n. 553; „ „ „ Blüthe	Paull. Plumierii Tr. & Pl.	n. 11360; Paull. curassavica L.
n. 556; „ „ ohne Blüthe	Paull. Cururu L. emend.	n. 11352; Paull. Cururu L.; specimen ex Hb. Surian.
n. 827[3]); Blatt und Fruchtzweig	Picraena excelsa Lindl.	n. 11387 (ad calcem generis Sapindi); Chipitiba.
n. 934; Blatt	Cupania americana L.	n. 11393; Cupania americana L.

1) Nicht 334, wie schon in den Verbesserungen der Monographie von *Serjania*, p. 390, angegeben ist.

2) „Kemeketi" Caribaeis, fide Herb. Juss.

3) „Pruno affinis arbor fraxini folio alato, fructu corymboso et cerasiformi". Chipitiba (manu

Bezüglich der p. 59 (am Ende) und p. 60 aufgezählten, aus der Gattung *Serjania* oder *Paullinia* auszuschliessenden, aber nicht bloss von der einen in die andere dieser Gattungen zu übertragenden, sondern in ferner stehende Gattungen einzustellenden Pflanzen mag hier, soweit dieselben überhaupt Sapindaceen sind, die nähere Bestimmung (hinter „=“) angegeben sein. Es sind die folgenden:

Serjania australis Spr.	=	Dodonaea pinnata Smith.
— megalocarpa Turcz.	=	Toulicia megalocarpa Radlk. (Monogr. Serj., 1875, p. 353; Ueber Sapindus, in Sitzungsb. Münch. Akad., 1878, p. 372, 373).
— stans Schott.	=	Toulicia stans Radlk. (Monogr. Serj., 1875, p. 353; Ueber Sapindus l. c. p. 373).
Paullinia caudata Velloz.	=	Thinouia scandens Tr. et Planch., forma 3, caudata Radlk. (Ueber Sapindus l. c. p. 282).
— racemosa Velloz.	=	Thinouia scandens Tr. et Planch., forma 2, racemosa Radlk. (Ueber Sapindus l. c. p. 282).
— obliqua K. ed. Trevir.	=	(?) Thinouia obliqua Radlk. (Ueber Sapindus l. c. p. 282).
— guatemalensis Turcz.	=	Cupania guatemalensis Radlk. (Ueber Cupania, in Sitzungsber. Münch. Akad., 1879, p. 562). —

Bezüglich einiger ohne Charakteristik und desshalb nicht giltig veröffentlichter Namen, welche hier in die Synonymie zurücktreten (vergl. A, p. 58, 59 der Monographie), verweise ich auf die unten im Zusatze zu *Serjania caracasana* angeführten Namen von Klotzsch im dritten Bande des Reisewerkes von Rich. Schomburgk (auf das ich erst am Ende des Jahres 1879 aufmerksam geworden bin) und die im gleichen Zusatze mitgetheilte Deutung derselben, nämlich, soweit sie die Gattung *Serjania* betreffen:

Serjania bignonioides Klotzsch	=	Serjania caracasana W., forma 1.
— baramensis Kl.	=	— membranacea Splitg.
— micrantha Kl.	=	— oblongifolia Radlk.
Urvillea Schomburgkii Kl.	=	— paucidentata DC.

Andere in die Synonymie der *Serjania*-Arten zurücktretende Aufstellungen sind als Ergänzungen zu den chronologischen Tabellen am Ende von IV hier aufgeführt. —

Jussieu.) Die Pflanze wurde von Poiret in Lamarck Encycl. VI, 1804, p. 665 mit den Citaten „Pruno affinis... Herb. Surian n. 827“ und „Chipitiba Surian & Juss. Herb.“ als *Sapindus surinamensis* veröffentlicht, wie ich schon in meiner Abhandlung über *Sapindus*, Sitzungsber. d. Münch. Akademie, 1878, p. 365 hervorgehoben habe.

Ich ergreife diese Gelegenheit, um bezüglich einer auf der nächsten Seite derselben Abhandlung, p. 366, genannten, von Kurz ursprünglich als *Sapindus tomentosus*, später (Forest Flora of British Burma, I, 1877, p. 296) als *Pancovia tomentosa* bezeichneten Pflanze, von der ich in diesem Jahre durch Herrn L. J. K. Brace Fragmente zur Untersuchung aus dem Herbarium zu Calcutta erhalten habe, mitzutheilen, dass dieselbe in der That als eine neue Art von *Sapindus* sich darstellt, sehr nahe verwandt mit *Sapindus Rarak* DC. und mit dieser Art in die Section *Dittelasma* (s. über *Sapindus*, p. 266) einzureihen.

Bezüglich *Serjania aquatica* Velloz. verweise ich zurück auf die obigen Ergänzungen zur Gattungslitteratur, p. 1. —

In die p. 60—67 dargelegte Geschichte der cultivirten Arten sind noch folgende Pflanzen einzufügen:

1. *Serjania confertiflora* Radlk., welche ich im Garten zu Neapel, als *Paullinia pinnata* cultivirt, i. J. 1875 angetroffen habe.

2. *Serjania decemstriata* Radlk., welche ich i. J. 1878 (s. Ueber Sapindus, p. 223) nach einem im Garten zu Kopenhagen aus Samen, welche Didrichsen um Buenos Aires gesammelt hatte, gezogenen, aus dem dortigen Herbare mitgetheilten Exemplare aufgestellt habe.

3. *Serjania paucidentata* DC. nach Materialien, welche ich in den Jahren 1867 und 1868 in dem Pariser Garten, theils im freien Lande, theils als Topfpflanze in Cultur gefunden habe unter irrigen, nicht zu erwähnenden Namen.

Weiteres über diese cultivirten Pflanzen ist in den Ergänzungen zu den betreffenden Arten nachzusehen.

Zu einer der schon angeführten Arten, *Serjania triquetra* Radlk. ist zu bemerken, dass dem Inhalte des Herb. Cesati gemäss, von dem ich i. J. 1875 zu Neapel Einsicht zu nehmen Gelegenheit hatte, die Pflanze auch noch im Jahre 1840 in dem Garten der Brera zu Mailand vorhanden war. Nach Cesati's mündlicher Mittheilung ist dieser Garten vor 1800 von Wittmann gegründet worden und hat, wie auch andere italienische Gärten, viele Mittheilungen von Ortega in Madrid und dessen Gärtner Conti erhalten.

IV. Chronologische Tabellen.

Die folgende, den chronologischen Tabellen p. 67—80 analoge, aber auf die Gattung *Serjania* beschränkte Uebersicht der in dem Zeitraume von 1874—1886 zu unserer Kenntniss gelangten Arten, welche in fortlaufender Nummerirung an die früher bekannt gewesenen 145 Arten hier anzureihen sind, gibt unter I, analog der chronologischen Tabelle I eine Aufzählung der unter irgend einem Gattungsnamen als selbstständige Arten bereits unterschieden gewesenen, zu *Serjania* gehörigen Pflanzen, 4 an der Zahl, und unter II, entsprechend der chronologischen Tabelle II der Monographie von *Serjania* die Aufzählung von 6 neuen Arten von *Serjania*, welche in der Litteratur noch nicht berührt waren, nach der Zeitfolge der ältesten Materialien geordnet.

I.

Laufende Nummer der Serjania-Arten nach chronologischer Ordnung	Aelteste Sammler oder Culturorte	Bezeichnungen nach den ältesten Litteraturstellen	Gegenwärtige Bezeichnung
146	Xantus 1859—60	Cardiospermum? sp. Gray 1862	S. californica Radlk. 1878
147	Lorentz 1872	S. foveata Griseb. 1874	
148	Tweedie 1835—37 Hort. Hafniens.	S. decemstriata Radlk. 1878	
149	Parry 1878 Palmer 1879—80	Serj.? inflata Watson 1882	S. cystocarpa Radlk. 1883

II.

Laufende Nummer	Aelteste Sammler	Artname
150	Matthews 1833—40	S. peruviana Radlk. 1886
151	Lechler 1854	S. subrotundifolia „ „
152	Weir 1861—62	S. viridissima „ „
153	Pearce 1866	S. areolata „ „
154	Bernouilli und Cario 1877	S. depauperata „ „
155	Glaziou 1882	S. lamelligera „ „

Die in dem gleichen Zeitraum von 1874—1886 für einzelne der früher schon bekannt gewesenen (145) Arten (besonders durch die Aufstellungen von Grisebach) neu geschaffenen oder aus inzwischen erst zugänglich oder überhaupt interpretirbar

gewordenen Materialien oder aus Druckfehlern und früher nicht beachteten Litteraturstellen (namentlich des Reisewerkes von Rich. Schomburgk, III, 1848) sich ergebende Synonyme, welche in der Synonymie der betreffenden Arten nachzutragen sind und hier in Form einer Ergänzung zu den Tabellen I und II A und B der Monographie von *Serjania* unter den dort den Arten von *Serjania* nach chronologischer Reihenfolge beigesetzten Nummern zusammengestellt sein mögen, sind die folgenden:

Nummer und Name der betreffenden Serjania-Art:	Neue Synonyme in chronologischer Ordnung:
1. S. mexicana W.	Paullinia curassavica Linn., non Spec. Pl., Amoenit. acad. V, (1760), p. 378 (Sandmark Fl. Jamaic., Dec. 1759), partim fide Hb. Linn., coll. P. Browne. Serj. lucida, non Schum. Griseb. Fl. Brit. W. Ind. Isl. (1859—64) p. 123 n. 6, quoad stirpem jamaicensem descriptam, a Wullschlaegel prope Manchester (t. Griseb.) lectam; coll. Wullschlaegel n. 785 in Hb. Griseb. Paull. spec. Hemsley in Salv. & Godm. Biol. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 211 n. 18: „Friedrichsthal n. 5, Guatemala".
4. S. sinuata Schum.	Serj. apiculata Wright (?), Flora Domingensis („collected 1871, distributed by United States Departement of Agriculture") n. 158.
6. S. nodosa Radlk.	Serj. undosa, sphalmate, Engler in Just bot. Jahresber. II, für 1874 (1876) p. 734.
9. S. caracasana W.	Serj. bignonioides Klotzsch ed. Schomb. l. c. (1848) p. 1180; coll. Schomb. n. 427; S. caracasana, forma 1 nitidula. Serj. grandiflora, non Camb., Griseb. Symbol. ad Flor. argentin. (1879) p. 79 n. 450; coll. Lorentz & Hieronymus. Paull. elegans, non Camb., Griseb. Symbol. (1879) p. 80, n. 456 partim; coll. Balansa n. 2490, Paragay, ex parte. Paull. spec. Hemsley l. c. (1879—81) p. 210 n. 11; coll. Endres n. 142, Costarica.
15. S. glabrata Kunth.	Serj. fulta Griseb. Pl. Lor. (1874) p. 60 n. 169; coll. Lorentz & Hier. Paull. brachystachya Griseb. Pl. Lor. (1874) p. 61 n. 171; coll. Lorentz & Hier.
19. S. paucidentata DC.	Urvillea Schomburgkii Klotzsch ed. Schomb. l. c. (1848) p. 1180; coll. Schomb. n. 1710.
20. S. racemosa Schum.	Serj. spec. Hemsley l. c. (1879—81) p. 208 n. 35; coll. Salvin & Godm., Guatemala.
26. S. clematidifolia Camb.	Paull. barbadensis, non Jacq., Gray in Wilkes Un. St. Expl. Exped. XV, Bot. I (1854) p. 249.
37. S. cardiospermoides Schlecht. & Cham.	Serj. spec. Hemsley l. c. (1879—81), p. 209 n. 38; Coulter n. 877 (errore 677).

Nummer und Name der betreffenden Serjania-Art:	Neue Synonyme in chronologischer Ordnung:
40. S. membranacea Splitg.	Serj. baramensis Klotzsch ed. Schomb. l. c. (1848) p. 1180; coll. Schomb. n. 1524. ? Serj glabrata, non Kunth, Griseb. in Lechler Pl. peruv. ed. Hohenack. n. 2332, in scheda.
41. S. marginata Casar.	Paull. pinnata, non L., Lorentz & Hieron. Flora Argentina (exsicc. 1873), sine no. (n. 1002 in Hb. Griseb.), Lules prov. Tucuman, m. Jan. 1873.
44. S. Grosii Schlecht.	Serj. Grayii, sphalmate loco Grosii, Hemsley l. c. (1879—81) p. 206 n. 12.
56. S. incisa Torrey	Paull. subulata Gray (nom. inedit.? anne P. subalata?) teste Watson in Proceed. Amer. Acad. XVII (1882) p. 337.
58. S. polystachya Radlk.	Paull. macrostachya, sphalmate loco P. polystachya Turcz., Hemsley l. c. (1879—81) p. 207 (sub n. 21, Serj. polyst. Radlk.).
61. S. crenata Griseb.	Serj. lupulina, non Schum., Sauvalle et Wright Flor. Cubana (1873) p. 24 n. 422 quoad syn. S. crenata Griseb.
73. S. rhombea Radlk.	Serj. pubescens, non Kunth nec Seem., Griseb. Novit. Flor. panam. in Bonplandia VI (1858) p. 3, quoad specimen a Duchassaing in Panama lectum. Paull. velutina, non DC., Triana et Pl. Prodr. Flor. Novo-Granat., Ann. Scienc. nat., IV. Sér., XVIII (1862) p. 358 partim, nempe quoad coll. Fendler n. 43 e Panama et quoad coll. Duchassaing e Panama.
74. S. goniocarpa Radlk.	Serj. racemosa, non Schum. etc., Turczanin. in Bullet. Mosc. XXII (1859) Pars I, p. 267, quoad Botteri n. 876 (sphalmate 576) partim, nec non quoad Ghisbreght n. 197.
100. S. confertiflora Radlk.	Paull. pinnata, non L., Pasquale Catal. Hort. Neapol. (1867) p. 76.
103. S. perulacea Radlk.	Paull. australis, non St. Hill., Griseb. Symbol. (1879) p. 80 n. 454 partim, nempe quoad coll. Balansa n. 2480.
118. S. macrococca Radlk.	Serj. racemosa, non Schum., Gray Plant. Wright. in Smithon. Contrib. III, Artic. V, Pars I (1850) p. 38 sub n. 98, „coll. Eaton & Edwards, prope Monterey“. Serj. spec. Hemsley l. c. (1879—81) p. 208 n. 36; „coll. Eaton & Edwards, Herb. Kew“. Cardiospermum molle, non Kunth, Hemsley l. c. (1879—81) p. 209 n. 5 partim, nempe quoad „Linden n. 899“.
129. S. oblongifolia Radlk.	Serj. micrantha Klotzsch ed. Schomb. l. c. (1848) p. 1180; coll. Schomb. n. 49.

In gleicher Weise den in der chronologischen Tabelle I der Monographie von *Serjania* aufgeführten *Paullinia-* und *Urvillea*-Arten beizufügende Synonyme, wie z. B. *Paullinia weinmanniaefolia* (non Martius) Gray in Bot. Wilkes Exped. I (1854) p. 247, zu der p. 73 und 77 aufgeführten *Paull. trigonia* Velloz. gehörig (s. Radlkofer über Sapindus etc., 1878, p. 225) und wie *Urvillea pubescens* Klotzsch ed. Schomb., zu der p. 69 n. 12 aufgeführten *Urvillea ulmacea* Kunth gehörig, übergehe ich hier, da dieselben ihren Platz in den Monographieen der betreffenden Gattungen finden werden.

Für eine der von mir in der chronologischen Tabelle II, A als neu bezeichneten und benannten Arten, nämlich für die auf p. 78 unter n. 75 aufgeführte und in dem 1874 im Separatabdrucke erschienenen Conspectus specierum unter n. 65 (p. 9, resp. 89) in die VII. Section eingereihte *Serjania scatens* hat dieser Name in die Reihe der Synonyme zurückzutreten, da die betreffende Pflanze bereits ein Jahr früher an mir damals unbekannt gewesener Stelle, nämlich in der zu Havana im Jahre 1873 unter Mitwirkung von C. Wright erschienenen Flora Cubana (v. Revisio Catalogi Grisebachiani) von A. Sauvalle p. 24 n. 423 unter dem nunmehr anzunehmenden Namen *Serjania atrolineata* C. Wright & Sauvalle als selbständige Art veröffentlicht worden ist, unter entsprechender Beifügung des Synonymes „*Serjania divaricata* Griseb., non Schum.“, welches sich daraus ergibt, dass Grisebach die von C. Wright gesammelte Pflanze (coll. 1859—60, n. 1587 partim) als *Serj. divaricata* Schum., d. i. *Serj. mexicana* Willd., bestimmt und veröffentlicht hatte (Plant. Wrightian. 1860, p. 168 und Catal. Pl. Cubens. 1866, p. 44).

Serj. atrolineata wäre also als schon früher veröffentlichte Art in der nach den ältesten Litteraturstellen (hier Griseb. Pl. Wright., 1860) geordneten chronologischen Tabelle I am Ende von p. 75 im Anschlusse an die gleichfalls in den Pl. Wright. von Grisebach veröffentlichte *S. crenata* aufzuführen gewesen. Was über die in der Fl. Cubana von Wright und Sauvalle gegebene Beschreibung der Pflanze zu bemerken ist, wird seinen Platz bei den unten folgenden Ergänzungen zu dieser selbst finden.

Die übrigen von Grisebach im Catal. Pl. Cubens. (1866) aufgeführten Arten werden in der Flora Cubana nur in dessen Bezeichnungen und unter Hinzufügung der Vulgärnamen, aber ohne Verbesserung, „*Serj. lupulina*, n. 422“ sogar mit einer Verschlechterung durch Hereinziehung der *S. crenata* Griseb., von C. Wright und Sauvalle aufgezählt, wie in den Ergänzungen zu den betreffenden Arten im unten Folgenden angegeben ist.

Hier mögen diese Stellen der Flora Cubana im Zusammenhange angeführt sein. Es sind das die folgenden:

p. 24 n. 420. Serj. paniculata Kunth. Bejuco de corrales. (cfr. S. subdentata Juss. ed. Poir.)
„ n. 421. Serj. lucida Schum. Bejuco colorado. (Cfr. S. diversifolia Radlk., S. subdentata Juss. ed. Poir.)
„ n. 422. Serj. lupulina Schum. S. crenata Griseb. Var. angustifolia. Bejuco de corrales. (cfr. quoad S. lupulinam secundum Addenda Catalogi Grisebachiani S. crassinervis Radlk. et S. subdentata Juss. e Poir.; quoad S. crenatam, S. crenata Griseb.; quoad Var. angustifoliam Serjaniae lupulinae S. crassinervis Radlk. — Serj. lupulina var. parvula Wright ed. Griseb., i. e. S. diversifolia Radlk. var. β parvula a Wright et Sauvalle ommissa est.)
„ n. 424. Serj. albopunctata Wright. (cfr. S. subdentata Juss. ed. Poir.).

Bei dieser Gelegenheit mag es mir gestattet sein, zu bemerken, dass in der gleichen Flora Cubana, p. 86 die von mir in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie, 1884, p. 487 etc. als *Daphnopsis cuneata*, sp. nov., charakterisirte „*Bumelia cuneata* Griseb." Cat. Pl. Cub. (non Flor. Brit. West. Ind. Isl., nec Sw.) von Wright und Sauvalle, p. 86, unter Anführung eben dieser Bezeichnung als Synonym und der Collectionsnummer von Wright, 2920, unter dem Namen *Sideroxylon confertum* unrichtiger Weise abermals, wie von Grisebach, als Sapotacee beschrieben wird, neben Erwähnung eines vielleicht wirklich auf eine Sapotacee zu beziehenden Vulgärnamens „Cocuyo". „Cocuyo de fruto chico" wird nämlich von Wright und Sauvalle, p. 88, als Vulgärname der *Labatia dictyoneura* Griseb., d. i. *Pouteria dictyoneura* m. (Sitzungsber. 1884, p. 464) angeführt. Für die gleiche Pflanze wird auch schon von Grisebach „Cocuyo" im Index der spanischen Namen, Catal. Pl. Cub. p. 298 (sphalmate 296) angegeben, während hier für *Labatia chrysophyllifolia* Griseb. der von Wright und Sauvalle angeführte Name „Sapote culebra de costa" übergangen und nur „Sapote de culebra" für *Lucuma serpentaria* Kunth erwähnt ist. —

Im Anschlusse an diese Bemerkung fülle ich eine früher (a. a. O.) unter *Pouteria dictyoneura* m. gelassene Lücke bezüglich eines selbständigen Urtheiles über die von Grisebach dahin gezogene *Bumelia nigra* A. Rich. Fl. Cub. II, p. 84 aus, indem ich bemerke, dass mir nach dem Wortlaute der betreffenden, inzwischen in Kew von mir eingesehenen Stelle des nur in spanischer Sprache erschienenen und in Europa sehr seltenen 2. Bandes von A. Richard's Flor. Cub. (s. Griseb. Cat. Fl. Cub. p. III, annot.), an welcher Stelle auch das Fehlen von Endosperm hervorgehoben ist, Grisebach dieselbe mit Recht hieher bezogen zu haben scheint. —

Weiter sei hier, wo durch die Schrift von Sauvalle und C. Wright ein Hinübergreifen von den Sapindaceen auf die Sapotaceen veranlasst worden ist, noch eine Bemerkung über *Bumelia pentagona* Sw. und über die bisher auf *Sideroxylon inerme* L. bezogene *Roemeria inermis* Thunb. angefügt.

Bumelia pentagona Sw. musste ich in meinen Mittheilungen über einige Sapotaceen, Sitzungsberichte der Münchener Akademie XIV, 1884, p. 467 und 486, allein von den 8 durch Swartz seiner Gattung *Bumelia* zugewiesenen Arten, um deren

kritische Sichtung es sich damals handelte, wegen Mangels authentischen Materiales als erst künftiger Klärung vorbehalten bezeichnen. Ich suchte den Weg dazu anzudeuten, indem ich hervorhob, dass diese Art nicht nach einer von dem Autor selbst, sondern dessen Angabe gemäss nach einer von Du Ponthieu (auf St. Vincent nach Sw. Prodr., 1788, p. 50, nach dessen Flor. Ind. occ. I, 1797, p. 494 aber „in jugis montis Josephi insulae Dominicae") gesammelten Pflanze aufgestellt sei, welche Swartz ohne Zweifel in dem Herb. Bank's gesehen habe, und welche dort wohl noch vorhanden sein werde. Diese Vermuthung habe ich bei meiner Anwesenheit in London im Herbste 1885 vollkommen bestätigt gefunden. Es zeigte sich dabei, dass das betreffende Original nichts anderes als ein Exemplar der *Dipholis salicifolia* A. DC. (*Bumelia salicifolia* Sw.) sei, wie Grisebach in der Flora Brit. West. Ind. Isl. p. 401 „ex descriptione" schon angenommen hatte. Grisebach scheint die Originalpflanze von Du Ponthieu selbst, da er sich bei seiner Deutung nur auf die Beschreibung von Swartz beruft, im Herb. Bank's entgangen zu sein. Gewissheit über ihre Natur konnte aber nur die Autopsie derselben gewähren. Ohne die letztere wäre es, da in der Beschreibung doch mancherlei Unterschiede zu bemerken sind, und namentlich die an der Basis der Kronenlappen befindlichen zwei Schüppchen von Swartz nur für seine *Bumelia salicifolia* erwähnt werden, stets unwahrscheinlich geblieben, dass Swartz in dem Exemplare von Du Ponthieu die Pflanze nicht wieder erkannt hätte, die er wenige Seiten vorher in der Fl. Ind. occ. I, p. 491 nach Blüthen- und Fruchtexemplaren als *Bumelia salicifolia* selbst beschrieben und im Prodr., 1788, p. 50 sogar auf derselben Seite mit seiner *Bumelia pentagona* aufgeführt hatte, unter Kennzeichnung der letzteren als einer nicht von ihm selbst gesammelten Pflanze durch Beifügung eines Asteriscus (entsprechend der Vorrede p. VIII). Unaufgeklärt bleibt nur noch die Verschiedenheit in der Standortsangabe bei Swartz. Mit dieser Bemerkung ist nun die a. a. O. p. 465—486 von mir versuchte Deutung der 8 *Bumelia*-Arten von Swartz zu einer vollständigen geworden. —

Roemeria inermis Thunb., unter Beifügung des Synonymes *Sideroxylon inerme* L. mit der Gattung selbst von Thunberg in Gen. nov. plant. IX, 1798, p. 131 aufgestellt und in Roemer's Archiv f. d. Botanik II, 1799, p. 2, dann in der Flor. capens. II, 1818, p. 68 (Ausgabe von Schultes, 1823, p. 194) näher beschrieben, und zwar unter Ausdehnung der Beschreibung auf die einzelnen Blüthentheile, ist die einzige bisher noch unaufgeklärt gebliebene von den 3 Arten, welche die Gattung *Roemeria* bei Thunberg (a. d. a. O.) bilden.

Dass diese drei Arten, *R. argentea, inermis* und *melanophloea* ursprünglich von Thunberg als Arten von *Sideroxylon* bezeichnet worden sind (Prodr. Flor. capens. I, 1794, p. 36); dass weiter die Gattung *Roemeria* wegen der älteren gleichnamigen, noch heute aufrecht erhaltenen Papaveraceen-Gattung von Medicus (1792) durch Meisner (Gen. Plant., 1837) den Namen *Heeria* erhalten hat und nach dem Vorgange von Ecklon & Zeyher (Enum. I, 1834, p. 142) von den Sapotaceen,

wohin sie Sprengel (Anleit. etc. II, 1817, p. 499) gebracht hatte, und von den Myrsineen, wohin sie Reichenbach (Conspect., 1828, p. 136) gerechnet hatte, zu den Anacardiaceen gestellt worden ist, entsprechend der erstgenannten Art, über welche unter ihrem jetzigen Namen, *Anaphrenium argenteum* E. Mey., in der Monographie der Anacardiaceen von Engler (1883, p. 360) unter Ergänzung des Synonymes *Heeria argentea* Meisn. das Weitere nachgesehen werden kann; dass ferner jede ihrer drei Arten zu einer anderen Gattung — und ich füge hinzu, zu einer anderen Familie — gehört, wie in Benth. Hook. Gen. II, p. 642 („nach De Candolle") erwähnt ist, woselbst auch auf die Zugehörigkeit der ersten Art zu den Anacardiaceen und die Identität der dritten mit *Myrsine melanophloea* R. Brown sattsam hingedeutet ist, über die zweite aber, abgesehen von dem Hinweise auf De Candolle, Stillschweigen beobachtet wird, daran mag zur raschen Orientirung des Lesers nur kurz erinnert sein.

Die zweite, hier allein in nähere Betrachtung zu ziehende Art, *Roemeria inermis* Thunb., nun ist von A. De Candolle (Prodr. VIII, 1844, p. 183 — woselbst die erste, im Index von Buek übergangene, p. 186 unter den Spec. exclus. von *Sideroxylon* als *Heeria argentea* Meisn., die letzte, p. 97 als *Myrsine melanophloea* R. Brown bezeichnet ist) zu *Sideroxylon inerme* L. als Synonym gebracht worden, womit aber die in den Beschreibungen Thunberg's enthaltenen Angaben durchaus im Widerspruche stehen. Es stellte sich bei mir aus diesen Angaben die Vermuthung fest, dass die Pflanze zu den Rhamneen oder Celastrineen gehören möchte — und das Letztere bestätigte sich in der That bei Untersuchung des Originales von Thunberg, welches mir Herr Professor Fries in Upsala auf mein Ansuchen mit dankeswerthester Bereitwilligkeit zu übersenden die Güte hatte.

In ihrem Habitus zeigt diese Originalpflanze, welche nur Blüthen, keine Früchte besitzt, grosse Aehnlichkeit mit gewissen Arten der Gattung *Pterocelastrus* einerseits, mit solchen der Gattung *Scytophyllum* andererseits, und da Thunberg in dem Gattungscharacter hervorhebt „stigmatibus tribus, nec simplici", was auch auf einen dreifächerigen Fruchtknoten schliessen lässt, so schien ihr ein Platz bei *Pterocelastrus* sicher zu sein; denn nach den Unterscheidungen der Flora capensis von Harvey & Sonder (welchen ich hier lieber als denen in Benth. Hook. Gen. folgen möchte, obwohl auch in der Flor. cap. über begründete Unterscheidungen vielfach, wenigstens bei der Umgrenzung der Arten, hinweggegangen ist) erscheint die Gattung *Scytophyllum* (von Benth. und Hook. in den Addendis nebst *Gymnosporia* mit *Celastrus* vereinigt, nach der Beschreibung der Frucht bei Ecklon und Zeyher aber eher nahe Beziehungen zu *Elaeodendron* verrathend) ausser durch eine fleischige, nicht aufspringende Frucht durch einen zweifächerigen Fruchtknoten ausgezeichnet. Aber jene Angabe von Thunberg trifft, wie die nähere Untersuchung zeigt, für die in Rede stehende Pflanze nicht zu. Dieselbe besitzt vielmehr eine seicht zweilappige Narbe auf kurzem Griffel und dem entsprechend auch, wie an Durchschnitten direct zu ersehen war, einen zweifächerigen Fruchtknoten und stimmt hierin, wie in der Beschaffenheit des Kelches, der

Blumenblätter, der Staubgefässe und rücksichtlich der ein kleines Dichasium darstellenden Inflorescenz mit kurzer, 3—4 mm langer, kantiger Hauptaxe, noch kürzeren Gabelästchen und fast sitzenden Blüthen, von welchen die äussersten an ihrer Basis nicht bloss mit einer schuppenförmigen Bractee, sondern auch mit eben solchen Bracteolen versehen sind, sehr nahe überein mit dem Originale von *Scytophyllum laurinum* Eckl. & Zeyh., Enum. I, 1834, p. 124, coll. n. 966, mit dem Synonyme *Celastrus laurinus* Thunb., wozu mit Recht hier und in der Flor. capens. von Harv. & Sonder auch das unter letzterer Bezeichnung edirte, von Ecklon gesammelte Fruchtexemplar Un. it. n. 162, mit bereits querrissig gewordener Rinde der älteren Zweige gerechnet wird.[1]) Auch im Habitus findet sich ausreichende Uebereinstimmung: So in der querrissigen Rinde und in den theilweise ebenfalls rein oblongen oder, wie bei dem Fruchtexemplare, lanceolat-elliptischen Blättern von gleicher Grösse. Daneben aber finden sich allerdings auch viel breitere, obovate oder selbst rundlich-obovate Blätter, an denen die Seitennerven noch deutlicher als bei dem Fruchtexemplare von Ecklon hervortreten; ferner sind die jungen Zweige tiefer gefurcht und die älteren durch eine mässige Flexuosität ausgezeichnet. Doch dürften diese Abweichungen kaum von Belang sein, zumal auch die anatomischen Merkmale der Blätter — hohe Epidermiszellen an der Blattoberseite mit eigenthümlichen krystallinischen Massen in ihrem Inneren, Erhebung der Cuticula in flache Knötchen, welche mit den sie trennenden Furchen über jeder der ziemlich regelmässig sechsseitigen Epidermiszellen wie ein Netzwerk kleiner Zellen sich darstellen, zwei- bis dreischichtiges, gerbstofführendes Pallisadengewebe und ebenfalls in vielen Zellen Gerbstoff, in anderen Krystalldrusen enthaltendes, kaum minder mächtiges Schwammgewebe, beide durchsetzt von senkrecht und wagrecht verästelten dickwandigen Sclerenchymzellen, endlich unterseits zahlreiche, elliptische oder fast kreisrunde Spaltöffnungen mit weitem Vorhofe, umzogen von einer Furche und von 5—6 Epidermiszellen im Kranze umgeben — vollständige Uebereinstimmung zeigen.[2])

---

1) Was das von Harvey und Sonder noch weiter hieher gebrachte *Scytophyllum obtusum* Eckl. & Zeyh. n. 965 betrifft, und das als Varietät bezeichnete *Scytophyllum oleoides* Eckl. & Zeyh. n. 967 (*Celastrus oleoides* Lam.), so scheinen die bemerkbaren Unterschiede allerdings nur nebensächlicher Natur zu sein. Darauf näher einzugehen, ist hier nicht nöthig.

Bezüglich des von Harvey und Sonder ausgeschlossenen *Celastrus oleoides*, non Lam., Krauss aus Natal (coll. n. 407 in Herb. Monac.) mag daran erinnert sein, dass er von Harvey in Hook. Lond. Journ. Bot. I, 1842, p. 22 mit Recht als eine Myrsinee („*Choripetalum* spec."), von A. De Candolle, Prodr. VIII, 1844, p. 89 mit Recht als eine Art von *Embelia* und von Harvey endlich im Thesaurus capens., 1860—64, Tab. 127, wenn ich aus dem Namen *Embelia Kraussii* Harv. in Pritzel Icon. bot. Ind. II, 1866, p. 114 bei der Unmöglichkeit, hier von der citirten Tafel selbst Einsicht zu nehmen, richtig schliesse, als bestimmte Art von *Embelia* bezeichnet worden ist.

2) Bei *Pterocelastrus* fehlen namentlich die wagrecht unter der Epidermis der oberen Blattseite sich hinziehenden Aeste der Sclerenchymzellen, und zwar bei all den Arten, welche durch die folgenden für die Untersuchung verfügbar gewesenen Materialien repräsentirt sind: Ecklon & Zeyher n. 956, 960, 961, 962, 963, Burchell n. 5544, 6191, 7234 (*P. tricuspidatus* Sond., *variabilis* Sond., *stenopterus* Walp., *tetrapterus* Walp., *rostratus* Walp.).

Es ist demnach die in Rede stehende Pflanze Thunberg's als identisch mit *Scytophyllum laurinum* Eckl. & Zeyh. zu betrachten.

Auf diese Pflanze beziehen sich all die Angaben Thunberg's, welche zu der Identificirung von *Roemeria inermis* mit *Sideroxylon inerme* L. durch ihn selbst und bei A. De Candolle (a. a. O.) in Widerspruch stehen, nämlich: Caulis... bipedalis et ultra; rami... flexuoso-erecti, scabridi, fusco-cinerei, ramulosi ramulis ultimis subangulatis; petioli brevissimi, subnulli; pedunculi angulati, bifidi, lineam longi; calyx pentaphyllus („nec monophyllus" in obs. de differentiis a *Sideroxylo* genericis); petala 5 („nec corolla rotata" in obs.), ovata, obtusissima, concava, semi-lineam longa; filamenta calyci inserta vel basi corollae (Thunb. ll. cc.).

Der in Rede stehenden Pflanze liegt übrigens in dem Herb. Thunberg unter der Bezeichnung *Roemeria inermis α* (die bisher besprochene ist als *Roemeria inermis β* bezeichnet, und diese beiden Bezeichnungen sind durch Correctur aus *Sideroxylon inerme* hergestellt) ein Blüthenexemplar von *Sideroxylon inerme* L. bei. Dasselbe scheint aber in der Beschreibung, auch der vegetativen Theile, wie namentlich aus der Angabe über die Länge der hier 1 cm und darüber messenden Blattstiele hervorgeht, gänzlich unberücksichtigt geblieben zu sein. Auch die Worte „vel basi corollae" bei Bezeichnung der Staubgefässinsertion können kaum auf *Sideroxylon* bezogen werden, da die Staubgefässe hier mit den Staminodien am Rande der Blumenkronenröhre, die nicht viel kürzer als der Saum ist, also fast in der Mitte der Blumenkrone, inserirt sind. Jene Worte können eher als ein Ausdruck der Unklarheit gelten, in welcher der Autor über das Verhältniss der Staubgefässe, der Blumenblätter und des beide tragenden Discus, der hier (im Gegensatze zur Beschreibung von Celastrus laurinus) gar nicht erwähnt ist, an dem dürftig mit Blüthen versehenen Materiale geblieben ist. Nur das vermeintliche Synonym „*Sideroxylon inerme* L." ist also von den Angaben Thunberg's unter *Roemeria inermis* auf diese Pflanze, „*α*" des Herb. Thunberg, zu beziehen.

Es ist demnach zu unterscheiden zwischen *Roemeria inermis* der Beschreibung von Thunberg und des Herbarium von Thunberg. Die erstere ist, mit Ausschluss des Synonymes *Sideroxylon inerme* L., *Scytophyllum laurinum* Eckl. & Zeyh. (*Celastrus laurinus* Thunb. t. Eckl. & Z.); die andere nur zur einen Hälfte, zur anderen Hälfte aber *Sideroxylon inerme* L., wozu natürlich auch jenes Synonym gehört. —

Endlich nehme ich von der Veränderung, welche hier eine von mir aufgestellte Art (*Serjania scatens*) rücksichtlich ihres Namens wenigstens erfahren hat, Veranlassung, auch von einer Veränderung Kenntniss zu geben, welche für die Auffassung einer anderen, von mir bekannt gemachten Sapindacee aus der inzwischen gewonnenen Einsichtnahme vollständigeren Materiales sich ergibt.

Es betrifft diese Veränderung die in der Abhandlung über *Sapindus* etc., Sitzungsberichte der Münchener Akademie VIII, 1878, p. 326 aufgestellte, von Fullagan auf Lord Howe's Island gesammelte *Atalaya coriacea* m.

Nach den Fruchtexemplaren, welche ich im Herbste 1885 in Kew gesehen habe, mitgetheilt von C. Moore unter n. 30 (wie auch Blüthenexemplare unter n. 18 und n. 50, letztere mit der Bezeichnung „Eclipse Expedition, Low Grounds", alle von Lord Howe's Island und theilweise mit der Angabe „50—60 Fuss hoher Baum" und mit dem Vulgärnamen „Bastard Honey-Sukle" versehen), ist die Pflanze in die Gattung *Guioa* als *G. coriacea* zu übertragen. Mir waren seiner Zeit nur männliche Blüthen vorgelegen, deren Fruchtknotenrudiment durch seine dreischneidige Gestalt zu der Annahme führte, dass an der Frucht selbst Flügelbildung hervortreten werde. Wie sich nunmehr zeigt, ist das nicht in der Weise wie bei *Atalaya* der Fall, vielmehr nur wie bei den Arten von *Guioa* in Form flügelartiger Verbreiterung der Fruchtfächer selbst. Zu bemerken ist noch, dass es die von Fullagan gesammelte *Guioa coriacea* ist, welche von Ferd. v. Müller nach Exemplaren aus dessen Herbarium in den Fragmenta Phytographiae Australiae IX, Fasc. 76 (1875) p. 91 unter *Cupania anacardioides* erwähnt wird, wornach der *Guioa coriacea* das Synonym beizufügen ist: *Cupania anacardioides*, non A. Rich., F. v. Müller, l. c. quoad specimina a Fullagan in Lord Howe's Island lecta „staminibus 8". —

Auch einer vermeintlichen Sapindacee, der von Hiern unter *Schleichera* (in Hook. Flor. Brit. Ind. I, 1875, p. 681) erwähnten Pflanze Beddome's von den Golcondah-Hügeln im Vizagapatam-Districte mag hier nach autoptischer Untersuchung der rechte Platz angewiesen sein.

Schon Hiern hat der Auffassung von Beddome, Flora sylvatica Vol. II, Pars XIII, Analys. Gen. (Madras, 1871) p. 72, 73, welcher die von ihm auf der genannten Hügelkette bei der Stadt Guddem in Vorderindien bei 3000 Fuss Höhe mit Blüthen im Monate März gesammelte Pflanze (coll. n. 124) als *Schleichera spec.* bezeichnet hat, einiges Misstrauen entgegengebracht, indem er der Wiedergabe von dessen Beschreibung beifügte: The flower-buds on the specimen in the Kew Herbarium are so young that their nature cannot be determined; indeed the Natural Order to which the plant ought to be referred is uncertain. It is different from any known species of Sapindaceae.

Ich hatte Gelegenheit die Pflanze des Herbarium zu Kew zu untersuchen.

Die anatomische Methode führte durch Nachweis von Balsamgängen im Weichbaste der Gefässbündel sofort zu der Erkenntniss, dass die Pflanze zu der Familie der Burseraceen oder Anacardiaceen gehöre. Andere anatomische Verhältnisse, die Untersuchung der Blüthenknospen, deren Theile sich bis auf die Samenknospen für die Analyse doch als genügend entwickelt erwiesen, und der Habitus der Pflanze im Vergleiche mit anderem entsprechenden Herbarmateriale liessen die Pflanze als eine unzweifelhafte Burseracee erkennen, nämlich als *Protium serratum* Engl. Monogr. Burserac. in DC. Suites au Prodr. IV, 1883, p. 88 (*Bursera serrata* Wall.), und zwar als eine besondere Form derselben mit derberen, deutlicher sägezähnigen und

unterseits nur sehr blass braunen Blättchen, welche als forma *pallidula* bezeichnet sein mag.

Die Blüthenknospen zeigten einen kurz becherförmigen, kurz fünfzähnigen Kelch; 5 aussen behaarte, innen kahle und mit einem schwachen, kielartigen Vorsprunge versehene Blumenblätter, welche sich an den Rändern schwach deckten oder theilweise nur berührten; 10 Staubgefässe mit introrsen Antheren, welche etwas über der Basis des Rückens an den kurzen Trägern befestiget waren; nach innen von den Staubgefässen einen ringförmigen, etwas gekerbten Discus; in der Mitte ein jugendliches (rudimentäres?) Pistill von kurz und breit flaschenförmiger Gestalt, mit einem sehr kurzen, in 5 stumpfe Narbenlappen endigenden Griffel und einem nach unten verbreiterten Fruchtknoten, welcher an einem wohl gelungenen, durch Javelle'sche Lauge gebleichten Querschnitte deutlich 5 Fächer erkennen liess. Die Blätter sind von Beddome (s. Flor. Brit. Ind. l. c.) mit Unrecht als theilweise abgebrochen-gefiedert beschrieben; das Endblättchen fehlt zwar allerdings an manchen Blättern, aber nur weil es abgefallen ist, wie an der zurückgelassenen Narbe deutlich zu erkennen ist. Die grossen Krystalle unter der Epidermis der oberen Blattseite, welche, wie schon Blenk (Flora 1884, p. 296, Sep. Abdr. p. 55) erwähnt hat, bei *Protium serratum* und anderen asiatischen Arten als durchsichtige Punkte erscheinen, zeigten sich hier in geringerer Zahl und in geringerer Grösse als gewöhnlich.

Von den anderen bisher bekannt gewordenen Materialien dieser Art erscheint ihrem Standorte nach (gemäss der Flor. Brit. Ind. I, p. 531) als die nächst stehende die von Roxburgh als *Limonia polygyna* bezeichnete Pflanze aus den Circars; daran reihen sich solche aus Ost-Bengalen, Assam und Chittagong; endlich (nach Kurz Forest Flora Brit. Burma I, 1877, p. 208) Pflanzen aus Pegu und Martaban. Aus Chittagong sind bisher unbestimmt gewesene, sterile Exemplare auch in dem Herb. Ind. or. von Hooker fil. & Thomson (vom 2. I. 1851) vorhanden, welche rücksichtlich der Serratur der Blättchen der Pflanze von Beddome nicht nachstehen. Ihre Blätter sind reicher gegliedert als Beddome für seine Pflanze angibt, nämlich nicht bloss 2—3-, sondern 4-jochig. Noch reicher gegliedert zeigt sich eines der Blätter in der Abbildung der *Bursera serrata* Wall. von Colebrooke in Transact. Linn. Soc. XV, 1827, Tab. IV, nämlich 5-jochig. Darnach ist die zu knappe Angabe von Engler a. a. O. p. 88 in der Ueberschrift „Folia 3-juga" zu modificiren.

V. Conspectus sectionum specierumque auctus.

Conspectus sectionum.

A. Dissepimenta fructus angusta, loculis ipsis plus dimido angustiora, loculi inde lateribus paullum tantum cohaerentes et praesertim fructus axis ope coadunati.

Loculi omnino compressi, plani, dorso anguste cristati; sepala omnia quoad indumentum subaequalia, tertium et quintum saepius a basi ultra medium coalita (corpus lignosum in speciebus paucis simplex — *S. Ampelopsis Pl. & Lind.*, *S. decemstriata R.*, *S. foveata Gr.*, *S. areolata R.* —, in reliquis omnibus compositum e centrali majore et peripheriçis minoribus 1—4, plerumque 3; foliorum epidermis mucigera) . Sectio I. Platycoccus.

Loculi sat compressi, medio tumiduli, in utroque latere in cornu producti; sepala tomentella (corpus lignosum in una specie simplex, in altera compositum; epidermis in illa mucigera, in altera non mucigera) Sectio II. Ceratococcus.

Loculi largi, compressiusculi, medio tumidi, dorso circumcirciter vel rarius infra medium tantum alato-cristati; sepala exteriora glabra vel puberula, interiora dense tomentella (corpus lignosum aut simplex et saepius insigniter costatum, aut in corpora partialia libera subaequalia 5, rarius 6—7, radiatim divisum; epidermis in plerisque mucigera) . . . . Sectio III. Eurycoccus.

Loculi subglobosi, rarius lenticulari-compressi, ecristati, pericarpio sicco chartaceo vel crustaceo; sepala exteriora glabriuscula, quin etiam glaberrima, interiora dense tomentella (corpus lignosum in plerisque compositum e corpore centrali paullo majore et peripheriçis 8—10, raro paucioribus, centrale omnino cingentibus; epidermis non mucigera nisi in nonnullis *S. dentatae* speciminibus) . . . . . Sectio IV. Eucoccus.

Loculi e tumide lenticulari subglobosi, interdum cristati, pericarpio crasso, sicco externe ruguloso; sepala exteriora minus quam interiora tomentella (corpus lignosum in una specie simplex — *S. reticulata C.*, in reliquis compositum e corpore majore centrali et peripheriçis minoribus plerumque 2; folia coriacea transversim reticulato-venosa; epidermis mucigera, in nonnullis vero speciminibus *S. reticulatae*, nec non in *S. marginatae* forma 3. *isopterygia* non mucigera) . . . . . Sectio V. Pachycoccus.

Loculi globosi, ellipsoidei vel horizontaliter obovoidei et divaricati, in lateribus inter nervos elevatos sulcis horizontalibus exarati (saepius suturis lignoso-incrassatis et dissepimentis medio subito dilatatis spurie syncocci);

sepala exteriora minus quam interiora tomentella (corpus lignosum in aliis speciebus simplex, in aliis compositum; epidermis mucigera, in sola *S. plicata*, nec non in *S. glabratae* forma 3. *molissima* non mucigera)

Sectio VI. Holcococcus.

Loculi e lenticulari subglobosi vel ovoidei, ecristati, interdum (praesertim steriles) a dorso applanati, in lateribus reticulato-nervosi et inter nervos scrobiculato-exsculpti; sepala omnia tomento cano plerumque sat denso induta (corpus lignosum compositum e centrali majore et peripheriçis minoribus 3—5 triangulariter dispositis vel 4—5 subaequaliter distantibus, rarius quam 3 paucioribus, interdum pluribus inaequalibus inaequidistantibus; epidermis mucigera) . . . . . Sectio VII. Dictyococcus.

Loculi vel pyramidato-trigoni, a dorso extrorsum declivi applanati et (praesertim steriles) umbonato-impressi, vel subglobosi et dorso rotundati (rarius subcarinati), ecristati, laevigati, nec sulcato-, nec scrobiculato-exsculpti, plerumque molliter pubescentes; sepala omnia tomento denso cano vel flavidulo induta (corpus lignosum compositum e centrali mediocri et peripheriçis 8—10 paullo minoribus, centrale omnino cingentibus; epidermis in nonnullis mucigera) . . . . . Sectio VIII. Simococcus.

Loculi elongate ellipsoidei vel ovoidei, anguste cristati vel ecristati, plerumque obsoletius reticulato-nervosi et dense villosi; sepala omnia tomento denso lanoso vel subvilloso sordido induta (rami plerumque acute 3—6-angulares; corpus lignosum compositum e centrali majore et peripheriçis 3—5 triangulariter dispositis; epidermis in plerisque mucigera) Sectio IX. Oococcus.

Loculi lenticulares, sat largi, vix vel ne vix cristati, pericarpio tenui; sepala omnia tomento denso lanoso albido induta (tertium et quintum saepius infra medium coalita) (corpus lignosum simplex, saepius 5-sulcatum; epidermis in nonnullis mucigera) . . . . . Sectio X. Phacococcus.

Loculi inflati, ultra axis apicem plus minus producti, vix unquam cristati, pericarpio tenuissimo membranaceo; sepala glabra vel varie induta (tertium et quintum saepius infra medium coalita) (corpus lignosum plerumque simplex; epidermis in plerisque mucigera) . . . . Sectio XI. Physococcus.

B. Dissepimenta fructus lata, loculos ipsos latitudine subaequantia, loculi inde lateribus omnino coaliti.

Loculi inverse pyramidati, subtrigoni vel dorso carinato tetragoni, ecristati, pericarpio saepius sublignoso; sepala glabra vel varie induta (corpus lignosum simplex aut compositum e centrali majore et peripheriçis 3—5 triangulariter dispositis vel 8—10 (rarissime 5 tantum applanatis) contiguis, centrale cingentibus; epidermis fere in omnibus mucigera) Sectio XII. Syncoccus.

Conspectus specierum.

Sectio I. Platycoccus. Dissepimenta fructus angustissima; loculi a lateribus quam maxime compressi, plani, dorso in cristam angustam a loculo ipso externe vix discretam producti; flores pro genere majusculi; sepala exteriora et interiora quoad indumentum subaequalia; corpus lignosum compositum e centrali majore et peripphericis minoribus 1—4, plerumque 3, in paucis tantum speciebus (*S. Ampelopsis Pl. & Lind.*, *S. decemstriata R.*, *S. foveata Gr.*, *S. areolata R.*) corpus lignosum simplex; foliorum epidermis mucigera.

Subsectio 1. Sepalum tertium et quintum a basi ultra medium coalita; torus (instar illius *Cardiospermi*) elongatus, glandulis inferioribus obsoletis; rami triangulares, rarius 5—6-angulares, corporibus lignosis peripphericis tribus. (Species brasilienses, *S. communis* Brasiliam ipsam transgrediens.)

A. Folia ternata (rarissime transeuntia in biternata vel plene biternata in *S. cuspidata Camb.*)
  a. Rami (et folia) glabri (epidermis valde mucigera) 1 (1).[1]) S. tenuis Radlk.
  b. Rami toti pilis crispulis subadpressis hirti (epidermis sat mucigera) 2 (2). S. Regnellii Schlecht.
  c. Rami in angulis tantum jubato-pilosi (epidermis mucigera) 3 (3). S. cuspidata Camb.

B. Folia biternata (cf. A, ob *S. cuspidatam Camb.*)
  a. Petioli omnes nudi
    aa. Rami 3—5-angulares, hirsuti (folia subtus juxta nervum medianum hirsuta; epidermis mucigera) . . . . . 4 (4). S. hirsuta Camb.
    bb. Rami triangulares, pubescentes (folia varie pubescentia vel subglabra; epidermis valde mucigera) . . . . . 5 (5). S. communis Camb.
    cc. Rami 6-costati, glabri (folia glabra; epidermis valde mucigera) 6 (5,a). S. viridissima Radlk.
  b. Petioli partiales anguste alati (rami trigoni, glabri; folia glabra; epidermis valde mucigera) . . . . . 7 (6). S. stenopterygia Radlk.

Subsectio 2. Sepalum tertium et quintum infra medium (*S. cardiospermoides*, *S. Ampelopsis*) vel ima basi tantum vel omnino non coalita; torus minus elongatus, glandulis inferioribus sat evolutis; rami 3—6-angulares vel teretiusculi; corpus lignosum compositum e centrali majore et peripphericis minoribus 1—4, plerumque 3, in 4 speciebus corpus lignosum simplex. (Subsectio minus naturalis, forsan inter alias Sectiones partim distribuenda. Species in America continentali per totam generis ditionem dispersae.)

---

1) Numeri uncis inclusi (adjecta in speciebus novis littera *a* vel *b*) locum speciebus in Monographia addictum (vel novis intercalatis adjudicandum) indicant.

A. Corpus lignosum simplex (folia biternata)
  a. Rami subherbacei 8—10-striati; foliola punctis pellucidis raris obscurioribus juxta nervos instructa
    aa. Rami 10-striati, glabri (sicci foliaque viridia; epidermis mucigera; species argentino-brasiliensis) . . . . 8 (6, a). S. decemstriata Radlk.
    bb. Rami 8-striati, pilis crispatis cano-pubescentes (sicci foliaque fuscescentia; epidermis mucigera; species argentina) 9 (6, b). S. foveata Griseb.
  b. Rami lignosi, 5—6-angulares; foliola dense pellucido-areolata
    aa. Foliola sicca subtus canescentia; flores minores; sepalum 3 et 5 basi vel fere ad medium usque coalita; stylus brevissimus, segmenta stigmatosa elongata (epidermis mucigera; species novo-granatensis) 13 (10). S. Ampelopsis Pl. & Lind.
    bb. Foliola sicca utrinque viridia; flores majores; sepalum 3 et 5 libera; stylus conspicuus (epidermis mucigera; species boliviensis) 14 (10, a). S. areolata Radlk.

B. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripheriris minoribus 1—4
  a. Folia ternata (sepalum 3 et 5 basi coalita; epidermis quam maxime mucigera; sp. mexicana) . . . . . 10 (7). S. cardiospermoides Schlecht.
  b. Folia biternata (partim depauperatione 5-foliolato-pinnata in *S. paludosa*)
    aa. Rami striati vel leviter sulcati
      α. Rami glabriusculi
        αα. Cavitas medullaris parva vel vix ulla (epidermis quam maxime mucigera; sp. boliviensis) . 11 (8). S. dumicola Radlk.
        ββ. Cavitas medullaris grandis (epidermis mucigera; sp. brasiliensi-peruviana) . . . . . 12 (9). S. leptocarpa Radlk.
      β. Rami pube vel tomento induti
        αα. Rami pube molli grisea induti; foliola omnia longe petiolulata (epidermis parum mucigera; sp. brasiliensis) 16 (12). S. trichomisca Radlk.
        ββ. Rami tomento brevi sufferugineo induti; foliola lateralia sessilia (epidermis mucigera; sp. brasiliensis) 18 (14). S. paludosa Camb.
    bb. Rami canaliculati
      α. Foliola integerrima vel obsolete 1—2-dentata (epidermis mucigera; sp. guianensis) . . . . . 15 (11). S. chartacea Radlk.
      β. Foliola serrato-dentata (epidermis mucigera; sp. brasiliensis) 19 (15). S. confertiflora Radlk.
  c. Folia supradecomposita (epidermis mucigera; sp. peruviana) 17 (13). S. squarrosa Radlk.

Sectio II. Ceratococcus. Dissepimenta fructus angustissima; loculi sat compressi, medio tumiduli, in utroque latere processu corniformi ascendente instructi, dorso plus minus cristati; sepala tomentella; corpus lignosum in una specie (*S. cornigera*) simplex, in altera (*S. mollis*) compositum; foliorum epidermis in illa mucigera, in altera non mucigera. (Species una — *S. cornigera* — panamensis, altera peruviana.)

A. Rami 5-canaliculati; corpus lignosum simplex; folia biternata (subtus pubescentia; epidermis mucigera) . . . . . 20 (16). S. cornigera Turcz.

B. Rami 6-striati; corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici 3—5 minoribus; folia (superiora) ternata (tota ferrugineo-tomentosa; epidermis non mucigera) . . . . . 21 (17). S. mollis Kunth.

Sectio III. Eurycoccus. Dissepimenta fructus angusta; loculi largi, compressiusculi, medio tumidi, alato-cristati; sepala interiora dense tomentella, exteriora puberula vel subglabra; corpus lignosum aut simplex et saepius insigniter costatum, aut in corpora partialia libera subaequalia 5, rarius 6—7, radiatim divisum; foliorum epidermis in plerisque mucigera. (Species plurimae brasilienses, 1 guatemalensis, 1 guianensis, 1 peruviana, 1 vel 2? antillanae.)

A. Rami teretes, striati vel costati et inter costas obtusas levius vel profundius sulcati; folia tenuiter vel crassiuscule membranacea

a. Corpus lignosum simplex, in sectione transversali sinuato-crenatum; rami teretes, sulcato-striati

aa. Folia ternata (thyrsi corymbiformes; epidermis non mucigera) 22 (18). S. platycarpa Benth.

bb. Folia biternata (thyrsi racemiformes)

α. Foliola a medio arctius subserrato-dentata; fructus permagni, insigniter et late cordati (caulis insigniter striatus; epidermis non mucigera) . . . . . 23 (19). S. eucardia Radlk.

β. Foliola remote et grosse inciso-sublobatove-dentata; fructus mediocres, elliptici (caulis vix striatus; epidermis non mucigera) 24 (20). S. velutina Camb.

b. Corpus lignosum simplex, insigniter costatum, in sectione transversali sinuato- vel crenato-lobatum; rami costati, inter costas obtusas (profundius) sulcati

aa. Subglabrae (rami non nisi extimo apice brevissime puberuli; foliola plerumque non nisi juvenilia (subtus) pilosiuscula; fructus vix pilosi, glanduligeri; folia biternata in *S. subimpunctata* et *S. Salzmanniana* interdum depauperatione ternata)

α. Foliola integerrima vel obsoletissime dentata

αα. Foliola dense pellucido-punctata (epidermis non mucigera) 25 (21). S. Salzmanniana Schlecht. emend.

ββ. Foliola vix pellucido-punctata (epidermis mucigera) 26 (22). S. subimpunctata Radlk.

β. Foliola serrata (epidermis mucigera; sp. guianensis) 27 (23). S. pedicellaris Radlk.

bb. Setigerae (rami setosi iidemque glanduloso-pilosi; foliola puberula vel velutino-pubescentia; fructus setigeri; folia biternata)

α. Foliola integerrima (epidermis mucigera; sp. peruviana) 28 (24). S. altissima Radlk.

β. Foliola remote-serrata (endocarpium papyraceum, ab epicarpio solubile; epidermis mucigera) . 29 (25). S. glutinosa Radlk.

cc. Hirtae (rami hirto-, foliola velutino-pubescentia; fructus (setuloso-) pilosi)

α. Folia biternata (interdum depauperata in *S. comata*)

αα. Fructus loculi setoso-comosi; flores majusculi (endocarpium papyraceum, ab epicarpio solubile; epidermis mucigera) 30 (26). S. comata Radlk.

ββ. Fructus loculi pube brevi induti; flores minores (endocarpium papyraceum, ab epicarpio solubile; epidermis mucigera) . . . . . 31 (27). S. acoma Radlk.

β.[1]) Folia impari-pinnata, trijuga, pinnis inferioribus ternatis; foliola parva, cuneata, inciso-dentata, hirto-tomentosa (epidermis mucigera; sp. antillana?) . . . . . 32 (28). S. cuneolata Radlk.

c. Corpus lignosum in corpora partialia 5 (rarissime 6—7) subaequalia libera radiatim divisum (folia biternata)

aa. Rami costati, inter costas obtusas profundius sulcati

α. Fructus loculi setigeri; foliola paucidentata

αα. Rami juniores petiolique setoso-hirsuti (epidermis mucigera) 33 (29). S. deflexa Gardn.

ββ. Rami juniores petiolique crispato-hirtelli (epidermis mucigera) . . . . . 34 (30). S. paleata Radlk.

β. Fructus esetosi; foliola integerrima

αα. Fructus alae basi vix dilatatae; flores magni (rubicundi); glandulae tori rotundato-ovatae; foliola crassiuscule membranacea, sicca plana (epidermis non mucigera) 35 (31). S. elegans Camb. emend.

ββ. Fructus alae basi magnopere dilatatae; flores mediocres; glandulae tori ovato-lanceolatae, obtusae; foliola tenuius membranacea, subtus in axillis nervorum barbata, sicca corrugata (epidermis non mucigera) 36 (32). S. corrugata Radlk.

bb. Rami teretiusculi vel obtusanguli, striati (folia nunc glabra et pruinosa, nunc pubescentia)

Fructus esetosi; flores mediocres; foliola subcoriacea, raro-dentata (epidermis non mucigera) . . . 37 (33). S. paradoxa Radlk.

B. Rami acutius obtusiusve quinque-angulares lateribus planis vel canaliculato-concavis (adultiores teretiusculi in *S. diversifolia*); corpus lignosum simplex; folia coriacea (biternata vel in *S. diversifolia* transeuntia quoque in supradecomposita, in *S. depauperata* vero superiora reducta in 5-foliolato-pinnata)

a. Foliola integerrima

aa. Thyrsi densiflori

α. Rami graciles; flores minores (epidermis mucigera) 38 (34). S. gracilis Radlk.

β. Rami crassiusculi; flores majusculi (epidermis mucigera) 39 (35). S. dura Radlk.

bb. Thyrsi laxiflori

α. Rami e 5-angulari subteretes; foliola insigniter petiolulata, nitidula; thyrsi longissimi, puberuli (sepala albida?; epidermis mucigera) 40 (36). S. macrostachya Radlk.

β. Rami acutanguli, canaliculati; foliola subsessilia, nitidissima; thyrsi mediocres, glabri (sepala rubra; epidermis mucigera) 41 (37). S. laxiflora Radlk.

---

1) Probabilissime hic inserenda, etsi caulis structura non satis nota est.

b. Foliola lateralia, praesertim inferiora, crenato- vel subserrato-dentata; folia depauperata, superiora (semper?) 5-foliolato-pinnata; rami 5-angulares canaliculati; thyrsi sat laxiflora (epidermis mucigera; sp. guatemalensis)
42 (37, a). S. depauperata Radlk.

c. Foliola terminalia quoque apice vel lateribus quoque crenato vel subserrato-dentata (epidermis mucigera; sp. antillana, nec non venezuelana)
43 (38). S. diversifolia Radlk.

Sectio IV. Eucoccus. Dissepimenta fructus sat angusta, interdum superne vel medio paullulum dilatata; loculi ecristati, subglobosi vel rarius lenticulari-compressi; sepala exteriora glabriuscula, quin etiam glaberrima, interiora dense tomentella; corpus lignosum in plerisque compositum e corpore centrali majore et peripherici 8—10 (raro paucioribus) paullo minoribus, contiguis, centrale cingentibus; epidermis non mucigera nisi in nonnullis *S. dentatae* speciminibus. (Species plurimae Brasiliae Brasiliamque partim transgredientes, reliquae fere omnes terrarum adjacentium incolae, una etiam Cubae, una solius Cubae.)

A. Corpus lignosum simplex (folia ternata)

a. Fructus loculi largi, lenticulari-compressi, endocarpio laevigato; flores robustiores (epidermis plerumque non, rarius sat vel parum mucigera)
44 (39)? S. dentata Radlk.

b. Fructus loculi mediocres, subglobosi, endocarpio sub lente faveolato; flores graciliores (epidermis non mucigera) . . . 45 (40). S. faveolata Radlk.

B. Corpus lignosum compositum e centrali magno et peripherici parvis 3 (folia biternata)

Rami petiolique aculeati; foliola obtuse serrato-dentata (epidermis non mucigera)
46 (41) (?). S. aculeata Radlk.

C. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici paullo minoribus plerumque 8, rarius paucioribus (in *S. caracasana, S Laruotteana, S. Seemanni*), contiguis, centrale cingentibus, a dorso paullulum compressis (folia biternata, interdum depauperatione ternata vel 5-foliolato-pinnata in *S. caracasana*, rarius transeuntia in supradecomposita in *S. caracasana* et *S. crenata*)

a. Folia glabra et nitida, rarius puberula

aa. Fructus loculi basi truncati vel breviter oblique cuneati

α. Petiolus intermedius nudus vel subnudus

αα. Flores mediocres (sepalis interioribus 3,5—5 mm longis; epidermis non mucigera; sp. in America meridionali et centrali latissime divulgata) . . . 47 (42). S. caracasana Willd.

ββ. Flores maximi (sepalis interioribus 6—7 mm longis; epidermis non mucigera) . . . . 48 (43). S. grandiflora Camb.

β. Petiolus intermedius marginatus

αα. Foliola ovalia vel obovato-ovalia; inflorescentiae rhachis subglabra; cincinni elongati (epidermis non mucigera; sp. cubensis)
49 (44). S. crenata Griseb.

ββ. Foliola lanceolata; inflorescentiae rhachis sordide hirtella; cincinni contracti (epidermis non mucigera; sp. peruviana)
50 (45). S. sphaerococca Radlk.

bb. Fructus loculi basi longius oblique cuneati

α. Foliola lanceolata, supra medium crebre et acute serrata (epidermis non mucigera) . . . . . 51 (46). S. Laruotteana Camb.

β. Foliola ovata, remotiuscule et obtuse serrato-dentata (epidermis non mucigera; sp. peruviana) . . . 52 (47). S. pyramidata Radlk.

b. Folia ramique tomento brevi molli griseo velutina

aa. Fructus glabri, loculis nigricantibus, endocarpio pilosiusculo (epidermis non mucigera; sp. venezuelano-cubensis) . 53 (48). S. adusta Radlk.

bb. Fructus pubescentes, endocarpio glabro (epidermis non mucigera; sp. panamensis) . . . . . 54 (49). S. Seemanni Tr. & Pl.

Sectio V. Pachycoccus. Dissepimenta fructus subangusta, saepius superne vel tota longitudine aliquantulum dilatata tumque loculos dimidios latitudine aequantia; loculi e lenticulari tumidi, interdum cristati, pericarpio crasso, sicco ruguloso; flores mediocres vel majores; sepala quoad indumentum minus diversa; corpus lignosum in una specie simplex (*S. reticulata C.*), in reliquis compositum e corpore centrali majore et peripherici minoribus plerumque 2; folia coriacea vel subcoriacea, transversim reticulato-venosa; epidermis plerumque mucigera, in nonnullis vero *S. reticulatae* speciminibus, nec non in *S. marginatae* forma 3. *isopterygia* non mucigera. (Species 3 brasilienses Brasiliamque transgredientes, 1 peruviana.)

A. Corpus lignosum simplex (folia biternata; petioli omnes nudi; epidermis nunc sat, nunc vix vel ne vix mucigera) . . . . . 55 (50). S. reticulata Camb.

B. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici minoribus 1—3, plerumque 2 (rarissime cum centrali connatis in *S. marginata*)

a. Folia biternata (rarius depauperata vel transeuntia in supradecomposita); petioli omnes alati; fructus loculi ecristati, glabri (epidermis mucigera, in forma 3. vero non mucigera) . . . . . 56 (51). S. marginata Casar.

b. Folia impari-pinnata, bijuga (rarissime depauperata vel transeuntia in decomposita in *S. erecta*); petiolus rhachisque alata

aa. Foliola grosse lobato-dentata; fructus loculi cristati, glabri (epidermis parum mucigera) . . . . . 57 (52). S. erecta Radlk.

bb. Foliola obsolete denticulata; fructus loculi ecristati, pilosi (epidermis perpaullum mucigera; sp. peruviana) . 58 (53). S. dibotrya Poepp.

Sectio VI. Holcococcus. Dissepimenta fructus basi et apice angusta, medio saepius plus minus dilatata et fere semiobcordata; loculi globosi, ellipsoidei, vel horizontaliter obovoidei et divaricati, (sicci) in lateribus inter nervos elevatos horizontales (dorso reticulato-anastomosantes) sulcis levius profundiusve exarati (saepius suturis lignoso-incrassatis et dissepimentis medio subito dilatatis spurie syncocci); flores parvuli vel mediocres; sepala exteriora ab interioribus quoad indumentum plerumque sat diversa; corpus lignosum in aliis speciebus simplex, in aliis compositum; epidermis mucigera, in sola *S. plicata*, nec non in *S. glabratae* forma 3. *mollissima* non mucigera. (Species 5 Americae meridionalis continentalis incolae, 1 mexicana.)

A. Corpus lignosum simplex (folia biternata, in omnibus speciebus interdum depauperata)

a. Foliola remote dentata

aa. Fructus gracillimi, elongati, basi perpaullum dilatati, alis tenuiter membranaceis, diaphanis, loculis inter nervos minus exaratis (epidermis mucigera; sp. guianensis) . . . 59 (54). S. membranacea Splitg.

bb. Fructus robustiores, latiores, basi insigniter dilatati, alis chartaceis, loculis inter nervos profundius exaratis (epidermis mucigera; sp. brasiliensis) . . . . . 60 (55). S. exarata Radlk.

b. Foliola subintegerrima (fructus maximi, elongati, loculis profunde exaratis; epidermis mucigera; sp. guianensi-brasiliensis 61 (56). S. grandifolia Sagot.

B. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripheriçis 3—5 minoribus triangulariter dispositis

a. Rami obtuse triangulares, sulcati

aa. Folia ternata (epidermis non mucigera; sp. mexicana) 62 (57). S. plicata Radlk.

bb. Folia biternata (epidermis mucigera, in forma 3. vero non mucigera; sp. argentino-brasiliensis et peruviano-ecuadorensis) 63 (58). S. glabrata Kunth.

b. Rami acutissime sexangulares, canaliculati (folia biternata; epidermis mucigera; sp. brasiliensis) . . . . . 64 (59). S. thoracoides Radlk.

Sectio VII. Dictyococcus. Dissepimenta fructus angusta, plerumque apice, rarius infra medium aliquantulum dilatata; loculi e lenticulari tumidi, ovoidei vel subglobosi, ecristati, reticulato-nervosi, inter nervos scrobiculato-exsculpti; flores mediocres; sepala interiora et exteriora tomento cano plerumque sat denso induta; corpus lignosum compositum e centrali majore et peripheriçis minoribus 3—5 triangulariter dispositis vel 4—5 subaequaliter distantibus, raro quam 3 paucioribus, interdum pluribus inaequalibus inaequidistantibus; epidermis mucigera. (Species 6 antillanae, 1 etiam, 1 solius Americae continentalis mari caribaeo circumjectae incolae.)

A. Semina ad medios vel supra medios loculos inserta, horizontalia vel quasi pendula (fructus axis inde summo apice tantum, infra stylum, dilatatus)

a. Fructus loculi ovoidei vel subglobosi, ecarinati, apice plerumque ultra seminis insertionem plus minus producti, interdum fere inflati; folia ternata (epidermis mucigera) . . . . . 65 (60). S. sinuata Schum.

b. Fructus loculi tumide lenticulares, dorso carinato-compressi

aa. Folia biternata vel supradecomposita; foliola ovata, plerumque basi et apice acuminata, submembranacea (epidermis mucigera) 66 (61). S. polyphylla Radlk.

bb. Folia biternata; foliola lineari-oblonga, crasse coriacea (epidermis valde mucigera) . . . . . 67 (62). S. crassinervis Radlk.

c. Fructus loculi ovoidei, vix basi carinati, dorso rotundati vel decliviter applanati et subimpressi, inde subtrigoni

aa. Fructus loculi subglabri; folia biternata vel supradecomposita; foliola subrhombea vel ovata, basi et apice plerumque exacte acuta, rigide coriacea (epidermis mucigera) . . . 68 (63). S. subdentata Juss.

bb. Fructus loculi dense pubescentes (folia biternata)

α. Corpora lignosa peripherica omnia teretiuscula; rami profunde sulcati; foliola terminalia ex obovato subrhombea (epidermis mucigera; sp. mexicano-venezuelana) 69 (64). S. paniculata Kunth.

β. Corpora lignosa peripherica omnia vel ex parte applanata; rami leviter impresso-striati; foliola terminalia oblonga (sepala ac petala reti laticis fusco insigni — an semper? — percursa; epidermis mucigera; sp. cubensi-panamensi-venezuelana)

70 (65). S. atrolineata Sauv. & Wr. (S. scatens Radlk.)

B. Semina infra medios loculos, fere ad basin loculorum inserta, erecta (fructus axis per totam loculorum longitudinem incrassatus)

Fructus loculi dense pubescentes, undique reticulato-nervosi; folia (biternata) glaberrima, laevigata, rami obtuse triangulares (epidermis mucigera)

71 (66). S. equestris Macf.

Sectio VIII. Simococcus. Dissepimenta fructus angusta, medium versus saepius paullulum et sensim dilatata; loculi vel pyramidato-trigoni, a dorso extrorsum declivi applanati et (praesertim steriles) umbonato-impressi, vel subglobosi et dorso rotundati, rarius subcarinati, ecristati, reti nervorum minus prominulo fere laevigati, nec sulcato-, nec scrobiculato-exsculpti, plerumque pubescentes; semina e trigono subglobosa, ad basin loculorum affixa; flores nunc minores, nunc majores; sepala interiora et exteriora tomento denso cano vel flavidulo tecta; corpus lignosum compositum e centrali mediocri et periphericis 8—10 paullo minoribus, contiguis vel perpaullum distantibus (*S. clematidifolia*), centrale omnino cingentibus, ramorum costas efficientibus; epidermis in nonnullis mucigera. (Species Americae meridionalis continentalis incolae.)

A. Flores parvi (3,5 mm circ. longi, sepalis interioribus 2,5 mm vix excedentibus; folia biternata)

a. Fructus loculi glabri

aa. Folia plus minus coriacea, obsolete dentata

α. Foliola ex ovali oblonga, sessilia, subtus subtomentosa (epidermis non mucigera; sp. brasiliensis) . 72 (67). S. ovalifolia Radlk.

β. Foliola ex oblongo lanceolata, in petiolulum attenuata, subtus laxe puberula (epidermis non mucigera; sp. guianensis)

73 (68). S. oblongifolia Radlk.

γ. Foliola elliptica, lateralia inferiora subrotunda subsessilia, subtus parce puberula (epidermis mucigera; sp. peruviana)

74 (68, a). S. subrotundifolia Radlk.

bb. Folia tenuiter membranacea, serrato-dentata (foliola ovata, glabra; epidermis mucigera; sp. brasiliensi-peruviana) 75 (69). S. tenuifolia Radlk.

b. Fructus loculi velutino-pubescentes, rarius subglabri (foliola ovata, serrata, membranaceo-coriacea, subtus plus minus pubescentia, denique nigro-fuscescentia; epidermis mucigera; sp. brasiliensis) . 76 (70). S. fuscifolia Radlk.

c. Ad hanc Serjaniae sectionem et sectionis partem verosimillime referenda est ob caulis structuram *Paullinia mollis Kunth*, floribus et fructibus ignotis, foliorum biternatorum et ramorum characteribus magis quam ad aliam quandam accedens ad *Serjaniam fuscifoliam Radlk.* (epidermis mucigera; sp. novogranatensis) . . . . . 77 (71). S. amplifolia Radlk.

B. Flores magni (6—7 mm longi, sepalis interioribus 4—5 mm longis)
a. Folia biternata
aa. Foliola supra glabrata, subtus molliter puberula (epidermis mucigera; sp. brasiliensis) . . . . . 78 (72). S. clematidifolia Camb.
bb. Foliola supra subtusque velutino-tomentosa (majora ac crassiora quam in praecedente; epidermis non mucigera; sp. boliviensis) 79 (73). S. crassifolia Radlk.
b. Folia pinnata, 5-foliolata (supra subtusque mollia; epidermis mucigera; sp. brasiliensis) . . . . . 80 (74). S. pinnatifolia Radlk.

Sectio IX. Oococcus. Dissepimenta fructus angusta; loculi elongate ellipsoidei, ovoidei vel subglobosi, anguste cristati vel ecristati, plerumque dense villosi, obsoletius vel vix obsoletius reticulato-nervosi; semina nunc elongate, nunc breviter ellipsoidea, saepius complanata, interdum fere lenticularia, ad basin loculorum inserta; fructus alae e basi semiovata vel semicordata plerumque margine obliquo sat rapide angustatae, fructus inde (compressus scil. speciminum in herbariis asservatorum) trianguli aequicrurii figuram exhibens; flores mediocres; sepala interiora et exteriora tomento denso lanoso vel subvilloso sordido tecta; rami acute triangulares vel sexangulares, rarius obtusanguli vel subteretes; corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici 3 (rarissime 4—5, cfr. *S. perulacea*); epidermis in plerisque mucigera. (Species omnes brasilienses, partim in terras adjacentes quoque, nec non in insulam Trinidad — *S. paucidentata* et *S. lamprophylla* — ingredientes.)

A. Rami subteretes vel obtusissime 3- (vel 5-) costati
a. Corpora lignosa peripherica ex parte (2 ex 3—4 vel 3 ex 4—5) dilatata et facie plana corpori centrali imposita; rami tomentosi; folia bi—triternata vel depauperata, subtus pubescentia; petioli omnes nudi (epidermis mucigera) 81 (75) (?). S. perulacea Radlk.
b. Corpora lignosa peripherica teretiuscula, in centrale sulcatum plus minus immersa; rami glabri vel pubescentes; folia biternata, glabra, nitida; petioli partiales nudi vel marginati (epidermis parum mucigera) 82 (76). S. lethalis St. Hil.
c. Corpora lignosa peripherica teretiuscula centrali imposita; rami glabrati; folia 5-foliolato-pinnata vel transeuntia in biternata, glabra, nitida; petioli omnes nudi (epidermis non mucigera) . . . . 83 (77). S. scopulifera Radlk.

B. Rami acutanguli (angulis in *S. ichthyoctona* et *S. paucidentata* interdum aliquantulum obtusatis)
a. Rami inaequaliter sexangulares, angulis tribus magis prominentibus (folia biternata, in *S. lamprophylla* et *S. ichthyoctona* interdum depauperata)
aa. Folia glabra
α. Petioli omnes nudi (foliola glabra, nitida, coriacea; epidermis mucigera) . . . . . 84 (78). S. ichthyoctona Radlk.
β. Petioli partiales (in nonnullis etiam communis) marginati vel alati
αα. Foliola coriacea
* Petiolus communis profundius canaliculatus, nudus, marginibus acutis, nec marginatis; foliola obtuse dentata (epidermis mucigera) 85 (79). S. paucidentata DC.

** Petiolus communis nudus; foliola acute dentata (epidermis mucigera) 86 (80). S. acutidentata Radlk.
*** Petiolus communis sat late marginatus (epidermis mucigera) . . 87 (81). S. obtusidentata Radlk.
ββ. Foliola membranacea (petioli omnes alati; epidermis non mucigera) . . . . 88 (82). S. lamprophylla Radlk.
bb. Folia velutino-pubescentia (foliola submembranacea, serrata, impunctata, petioli nudi, rami acutissime 6-angulares; epidermis mucigera) 89 (82, a) S. lamelligera Radkl.
b. Rami acutissime triangulares vel juniores triquetri (folia ternata; petiolus alatus; epidermis non mucigera) . . . . . 90 (83). S. oxytoma Radlk.

Sectio X. Phacococcus. Dissepimenta fructus angusta; loculi lenticulares, sat largi, a semine maturo sat repleti, vix vel ne vix cristati, glabri vel pubescentes, obsoletius reticulato-nervosi, pericarpio tenui; semina tumide lenticularia vel breviuscule ellipsoidea, infra medios loculos inserta; flores mediocres; sepala interiora et exteriora tomento denso lanoso albido induta, rarissime laxius pubescentia (*S. brachycarpa*), sepalum tertium et quintum haud raro a basi fere usque ad medium coalita (*S. mexicana*, *rubicaulis*, *brevipes*, *brachycarpa*); corpus lignosum simplex, teretiusculum, 5-angulare vel 5-sulcatum; epidermis in nonnullis mucigera. (Species a Texas ad Peruviam distributae.)

A. Rami canaliculato-5-sulcati, (plerumque) aculeati; petalorum superiorum squamae cristis brevibus emarginato-bicoccis instructae (foliola biternata)
a. Foliola elliptico-ovata, oblonga vel obovata (epidermis non mucigera; sp. mexicano-venezuelano-antillana) . . . . . 91 (84). S. mexicana Willd.
b. Foliola lanceolata vel ovato-lanceolata (epidermis non mucigera; sp. peruviana) 92 (85). S. rubicaulis Benth.
B. Rami 5-angulares vel teretiusculi (inermes); petalorum superiorum squamae cristis elatioribus bicruribus vel bicornibus instructae
a. Folia ternata
aa. Foliola punctis pellucidis minutissimis obsolete notata
α. Flores majusculi; cincinni longiuscule stipitati (epidermis mucigera; sp. ecuadorensis) . . . . . 93 (86). S. longipes Radlk.
β. Flores minores, cincinni subsessiles (epidermis mucigera; sp. ecuadorensis) . . . . . 94 (87). S. brevipes Benth.
bb. Foliola insigniter pellucido-lineolata (flores majusculi; cincinni breviuscule stipitati; epidermis non mucigera; sp. ecuadorensis? brasiliensis?) 95 (88). S. grammatophora Radlk.
b. Folia biternata (epidermis mucigera; sp. texana) 96 (89). S. brachycarpa Asa Gray.

Sectio XI. Physococcus. Dissepimenta fructus angusta vel superne latiuscula, attamen loculis ipsis multo angustiora; loculi inflati et apice ultra fructus axem plerumque plus minus producti, a semine maturo vix repleti, dorso convexi, interdum subcarinati, rarissime cristati (*S. sphenocarpa*, *S. rigida*), plerumque glabri et obsoletissime, rarius conspicue (*S. emarginata*, *S. racemosa* partim) reticulato-nervosi, pericarpio

tenui, quin etiam tenuissimo, membranaceo; semina obovoidea, interdum subcompressa, infra medios loculos inserta; flores mediocres vel parvi; sepala varie induta, interdum glabra (*S. oxyphylla, S. parvifolia, S. racemosa* partim), tertium et quintum saepius infra medium coalita; corpus lignosum plerumque simplex, 5—8-sulcatum, rarius compositum e centrali majore et peripheriicis parvis 2—3—5; epidermis in plerisque mucigera. (Species pleraeque mexicanae, 5 peruvianae, 1 ecuadorensis, 1 panamensis, plurimae ob fructum deficientem sedis incertae et non nisi dubitanter in hanc sectionem receptae.)

A. Corpus lignosum simplex

a. Rami 5—6-sulcati

aa. Plantae fruticosae vel suffruticosae

α. Folia ternata (in *S. emarginata* interdum transeuntia in biternata, i. e. 5-foliolato-pinnata)

αα. Foliola (pauci-) serrata vel dentata (epidermis mucigera) 97 (90). S. Grosii Schlecht.

ββ. Foliola integerrima vel basi utrinque dente lobiformi instructa, subauriculata (epidermis mucigera) 98 (91). S. emarginata Kunth.

β. Folia biternata

αα. Foliola serrata

* Foliola pauciserrata; rami canaliculato-sulcati, obtusanguli, viridescentes (epidermis mucigera) 99 (92). S. racemosa Schum.

** Foliola crebre subduplicato-serrato-dentata; rami striato-sulcati, teretiusculi, tomento brevi molli rufidulo induti (epidermis mucigera) 108 (99)? S. polystachya Radlk.

ββ. Foliola integerrima

* Foliola elliptica, obtusiuscula vel foliorum superiorum cuspidata, subtus sordide tomentosa (epidermis mucigera) 105 (96)? S. sordida Radlk.

** Foliola ovato-lanceolata, acutissima

† Foliola subtus villoso-pubescentia, nervis lateralibus inferioribus elongatis subtriplinervia (epidermis mucigera) . . 106 (97)? S. subtriplinervis Radlk.

†† Foliola subtus brevissime canescenti-puberula, nervis lateralibus inferioribus quam reliqui non longioribus (epidermis mucigera; species panamensis) 107 (98)? S. acuta Tr. & Pl.

γ. Folia impari-pinnata, 3—4-juga, jugo inferiore utrinque 5-foliolato-pinnato vel e ternato subpinnato (in *S. cystocarpa*); fructus basi cuneatus; plantae parvulae, suffruticosae

αα. Fructus apice subacutus, loculis longioribus quam latis; stylus glaber (epidermis mucigera) . 100 (93)? S. incisa Torrey.

ββ. Fructus apice latiuscule excisus, loculis latioribus quam longis; stylus glaber (epidermis non mucigera) 101 (94)? S. sphenocarpa Radlk.

γγ. Fructus apice abrupte rotundatus, loculis aeque longis ac latis; stylus pubescens (epidermis mucigera) 102 (94, a). S. cystocarpa Radlk.

δ. Folia impari-pinnata, 2-juga; planta parvula, suffruticosa (epidermis mucigera) . . . . . 103 (94, b). S. californica Radlk.

bb. Planta subherbacea (folia biternata, hispidulo-tomentosa; fructus suborbicularis, loculis maximis; epidermis mucigera) 104 (95). S. macrococca Radlk.

b. Rami 8—10-striata, 8—10-costati (cortice plerumque subfusco)

aa. Folia biternata ramique hirsuto-tomentosa; petioli omnes nudi; flores majusculi; sepala hirtella (epidermis mucigera) 109 (100). S. vesicosa Radlk.

bb. Folia impari-pinnata, trijuga, jugo inferiore utrinque ternato, glabra; rhachis foliorum superne marginata; rami glabri

α. Flores parvi; sepala glabra; fructus glabri (epidermis non mucigera; sp. peruviana) . . . . . 110 (101). S. oxyphylla Kunth.

β. Flores majores; sepala exteriora glabra, interiora tomento brevi induta; fructus tomentosi (epidermis non mucigera; sp. peruviana) (111) 102? S. striata Radlk.

B. Corpus lignosum compositum (e centrali majore et peripherici parvis 2—3)

a. Folia biternata (flores, fructus, foliola sat magna)

aa. Rami acutanguli, canaliculati (petioli partiales marginati; epidermis mucigera; sp. peruviana) . . . . . 116 (106). S. inflata Poepp.

bb. Rami obtusanguli, striata

α. Thyrsi aequaliter dense cincinnigeri, cincinni breviter stipitati

αα. Petioli omnes nudi; foliolorum rete venarum tenerum, vix prominens; fructus loculi ecristati (epidermis mucigera; sp. ecuadorensis) . . . . 113 (104)? S. mucronulata Radlk.

ββ. Petioli partiales marginati; foliolorum rete venarum praesertim subtus valde prominens; fructus loculi dorso cristati (epidermis mucigera; sp. peruviana . . . 114 (105)? S. rigida Radlk.

β. Thyrsi interrupte subverticillatim cincinnigeri, cincinni longissime stipitati; fructus loculi dorso ecristati (epidermis non mucigera; sp. peruviano-boliviensis) . . . 115 (117). S. sufferuginea Radlk.

b. Folia impari-pinnata, trijuga, jugo inferiore utrinque ternato (flores, fructus, foliola parva; epidermis mucigera; sp. peruviana) . 112 (103). S. parvifolia Kunth.

Sectio XII. Syncoccus. Dissepimenta fructus lata, loculos dimidios latitudine superantia, vel latissima, loculos ipsos latitudine subaequantia, loculi inde lateribus totis vel fere totis iisque in dissepimenta conversis coaliti, inverse pyramidati, subtrigoni vel dorso carinato tetragoni, apice oblique acutati, truncati vel ad angulum internum depressi, dorso convexi vel applanati, rarius carinati, vix vel ne vix linea mediana elevata subcristati, glabri vel pubescentes, pericarpio saepius indurato, sublignoso; semina ex obovato clavata, subtrigona, altius profundiusve inserta; flores parvi, mediocres vel inter maximos; sepala glabra (*S. meridionalis*) vel varie tecta; corpus lignosum simplex aut compositum e centrali majore et peripherici parvis 3—5 triangulariter dispositis 8—10 (rarissime 5 applanatis) contiguis, centrale cingentibus; epidermis fere in omnibus mucigera.

A. Corpus lignosum simplex (species 7 brasilienses Brasiliamque partim transgredientes, 1 antillana, 1 mexicana)

a. Rami 8—10-striato-sulcati

(Folia biternata; flores minores; sepala glaberrima; fructus ovatus obtusissimus, glaber; semina supra medios loculos inserta; epidermis mucigera; sp. argentino-brasiliensis . . . . . 117 (107). S. meridionalis Camb.

b. Rami 5 –6-sulcati et inde angulosi vel (praesertim basi) teretiusculi

aa. Folia supradecomposita (flores mediocres vel minores; sepala exteriora subglabra, interiora breviter tomentosa)

α. Folia tri-quadri-pinnata; juga divaricata; foliola minima (epidermis mucigera; sp. antillana) . . . . 118 (108). S. filicifolia Radlk.

β. Folia inferiora tri- vel subquadri-ternata, superiora depauperata; foliola parvula; fructus ovato-oblongus, minus latiseptus, glabratus (epidermis mucigera; sp. mexicana)

119 (109)? S. Cambessedeana Schlecht.

bb. Folia decomposita (flores mediocres vel minores)

α. Sepala exteriora subglabra, interiora brevissime tomentosa

αα. Folia biternata vel impari-pinnata, trijuga, jugo inferiore utrinque ternato vel 5-foliolato-pinnato; foliola parvula, crenato-serrulata; fructus orbicularis, apice umbilicato-impressus, glaber (epidermis mucigera) . . 120 (110). S. orbicularis Radlk.

ββ. Folia biternata; foliola majora, grosse serrato-dentata; fructus ovatus, subacutus, pubescens (epidermis mucigera)

121 (111). S. tristis Radlk.

β. Sepala exteriora et interiora tomentosa

(Folia biternata; foliola majora, crebre dentato-serrata; fructus ovatus, obtusus, apice tomentosus; epidermis non mucigera)

122 (112). S. serrata Radlk.

cc. Folia composita (flores inter maximos; sepala omnia tomentosa)

α. Folia ternata; foliola inciso-lobata-dentataque (plus minus ferrugineo-pilosa: rami dense ferrugineo-tomentosi; epidermis mucigera)

123 (113). S. cissoides Radlk.

β. Folia ternata; foliola grosse anguloso-dentata ramique glabrescentia; fructus plerumque acutus rarius obtusus vel truncatus (epidermis mucigera; sp. argentino-brasiliensis) 124 (114). S. hebecarpa Benth.

γ. Folia ternata; foliola obsoletius et obtusius dentata, subtus ramique tomentosa; fructus apice truncatus vel impressus (epidermis mucigera)

125 (115). S. Mansiana Mart.

B. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici 3—5 minoribus subteretibus triangulariter dispositis (species a Mexico ad Boliviam distributae)

a. Rami subteretes vel obtusanguli, striati; corpora lignosa peripherica teretiuscula vel compressiuscula, in centrale plus minus immersa

aa. Rami tomento denso hirto vel hirsuto, fusco vel ferrugineo, rarius sordide cano adpresso (in *S. peruviana*) induti

α. Folia ternata (epidermis mucigera; sp. panamensis)

126 (116). S. grandis Seemann.

β. Folia biternata vel transeuntia in triternata

αα. Rhachis inflorescentiae teres, laevis (nec sulcato-angulosa)

* Cincinni (breviter stipitati) cum alabastris tomento sordide cano adpresso induti; flores majusculi; folia biternata (epidermis mucigera; sp. peruviana)
127 (117, a). S. peruviana Radlk.

** Cincinni (breviter stipitati) cum alabastris tomento brevissimo cano-rufulo induti; flores mediocres; folia subtriternata (epidermis mucigera; sp. novo-granatensis)
128 (118). S. dasyclados Radlk.

ββ. Rhachis inflorescentiae striato-sulcata, angulosa (cincinni breviter stipitati; folia bi-, tri-ternata; epidermis mucigera; sp. boliviensi-peruviano-ecuadorensis
129 (119). S. diffusa Radlk.

bb. Rami tomento denso molli flavescenti-albido vel pube laxiore sordida induti

α. Rami tomento mollissimo densissimo brevi flavescenti-albido induti; folia 5-foliolato-pinnata; flores majores (epidermis non mucigera; sp. mexicana . . . . 130 (120). S. Schiedeana Schlechtend.

β. Rami pube laxiore e griseo vel flavidulo sordida induti; flores minores

αα. Folia 5-foliolato-pinnata vel biternata, subtus mollia, rarius laxius pubescentia, ad dentes plerumque punctis pellucidis coacervatis notata; fructus loculi subglobosi, pilis patentibus hirsuto-tomentosi (epidermis mucigera; sp. mexicano-guatemalensis) . . . . . 131 (121). S. triquetra Radlk.

ββ. Folia biternata, undique subglabra, obsoletius et minutissime pellucido-punctata; fructus loculi trigoni, pilis brevibus adpressis dense pubescentes (epidermis mucigera; sp. mexicana)
132 (122). S. goniocarpa Radlk.

cc. Rami glabri vel juniores tantum pubescentes

α. Folia biternata

αα. Petioli omnes nudi (epidermis mucigera; sp. mexicana)
133 (123). S. brachystachya Radlk.

ββ. Petioli partiales alati (epidermis mucigera; sp. novogranatensi-curassavica) . . . . 134 (124). S. curassavica Radlk.

β. Folia bi-, tri-pinnata (petiolorum partialium segmenta alata; rami leviter striati, juniores undique hirtelli; epidermis mucigera; sp. peruviano-boliviensis) . . . . . 135 (125). S. deltoidea Radlk.

b. Rami acutanguli, canaliculati; corpora lignosa peripherica angulosa (plerumque triangularia), centrali imposita, nec ei immersa

aa. Folia biternata (petiolus intermedius marginatus; rami undique hirto-pilosi)

α. Foliola terminalia elliptica (epidermis mucigera; sp. mexicana)
136 (126). S. impressa Radlk.

β. Foliola terminalia ex obovato cuneata (epidermis mucigera: sp. peruviana) . . . . . 137 (127). S. rufa Radlk.

γ. Foliola terminalia rhombea (epidermis mucigera; sp. venezuelano-mexicana) . . . . . 138 (128). S. rhombea Radlk.

bb. Folia subtriternata, scil. e biternatis transeuntia in triternata (petiolorum partialium segmenta superiora marginata; rami undique hirto-pilosi; epidermis mucigera; sp. novo-granatensi-brasiliensis)
139 (129). S. clematidea Tr. & Pl.

cc. Folia bi-, tri-pinnata (petiolorum partialium segmenta marginato-alata; rami canaliculato-sulcati, ad angulos tantum hirto-pilosi; epidermis mucigera; sp. mexicano-panamensis) . . 140 (130). S. trachygona Radlk.

C. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici 3—5 omnino complanatis subcontiguis, centrale cingentibus (epidermis parum mucigera; species mexicano-panamensis)
Folia biternata; rami teretes . . . . . 141 (131). S. insignis Radlk.

D. Corpus lignosum compositum e centrali mediocri et peripherici minoribus 8—10 teretibus contiguis, centrale cingentibus (folia biternata; species brasilienses)

a. Rami lineis 8—10 impressis subtilissime striati

aa. Foliola integerrima (epidermis parum mucigera) 142 (132). S. noxia Camb.

bb. Foliola serrato-dentata (epidermis mucigera)
143 (133). S. multiflora Camb.

b. Rami sulcato-striati

aa. Ramorum juniorum costae applanatae, adultiorum convexae et obtusissimae; foliola grosse serrata; alabastra ex ellipsoideo subcylindrica (epidermis mucigera) . . . . . 144 (134). S. purpurascens Radlk.

bb. Ramorum juniorum costae acutiusculae, adultiorum obtusatae; foliola crenato- vel subserrato-dentata; alabastra subglobosa (epidermis parum mucigera) . . . . . 145 (135). S. nigricans Radlk.

Species sedis omnino dubiae.

A. Corpus lignosum simplex (folia biternata)

a. Petioli omnes nudi; rami e tereti 5-angulares, leviter sulcati; foliola subrhombea pilis setulosis patulis subtus in nervis, supra undique laxe adspersa (epidermis mucigera; sp. nicaraguensis) . . . . . 146 (136). S. setulosa Radlk.

b. Petioli omnes late alati, subtus nec non ad marginem alarum ramique aculeati, aculeis uncinatis retroversis, in alarum vero parte superiore sursum versis (epidermis non mucigera; sp. brasiliensis) . . 147 (138). S. hamuligera Radlk.

B. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici perparvis 1—3 saepius cum centrali coalitis in corpus lignosum simplex crenatum vel radiatim subdivisum
Folia ternata; petiolus communis cuneato-alatus (epidermis sat mucigera; sp. brasiliensis) . . . . . 148 (139). S. piscatoria Radlk.

C. Corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici minoribus 3—5 triangulariter dispositis (in *S. brachyphylla* partim applanatis)

a. Folia ternata (petiolus communis nudus)

aa. Corpora lignosa peripherica faciebus corporis centralis imposita; foliola ex elliptico ovata, in petiolulos attenuata, obsolete reticulata; cincinni longiuscule stipitati (epidermis mucigera; sp. jamaicensis?)
149 (140). S. nodosa Radlk.

bb. Corpora lignosa peripherica in centrale plus minus immersa; foliola breviter et late ovata vel suborbicularia, basi in petiolulos breves, apice in acumen breve abruptius contracta, insigniter transversim reticulata; cincinni breviter stipitati (epidermis parum mucigera; sp. novo-granatensis) 150 (141). S. circumvallata Radlk.

b. Folia biternata (petioli omnes nudi)

aa. Foliola crenata vel dentata

α. Rami teretiusculi, 8-striati; foliola coriacea, breviter et late ovata, acuta, grosse crenata, insigniter pellucido-punctata (epidermis parum mucigera; sp. novo-granatensis) 151 (142). S. brachyphylla Radlk.

β. Rami obtuse triangulares, juxta angulos utrinque stria impressa notati; foliola membranacea, elliptica, obtuse acuminata, remote et obtuse dentata, punctis pellucidis minutissimis obsolete notata (epidermis mucigera; sp. costaricensis) 152 (143). S. inebrians Radlk.

γ. Rami profunde 6—8-sulcati; foliola obovata, praeter nervos glabra (epidermis mucigera; sp. peruviana) 153 (137). S. nutans Poepp.

bb. Foliola integerrima, rarius obsolete dentata, in acumen obtusum mucronulatum protracta (epidermis mucigera; sp. brasiliensis) 154 (144). S. acuminata Radlk.

Species e sola descriptione et icone Plumierii cognita.

Corpus lignosum — —; folia biternata; foliola angusta, nec quidem petiolulis alatis latiora (sp. S. Domingensis) . . . . . 155 (145). S. angustifolia Willd.

VI. Species.

Sectio I. Platycoccus.

Subsectio 1.

1. Serjania tenuis Radlk. (1, p. 98.)[1])

Dem Materialienverzeichniss sind folgende neue oder erst in neuerer Zeit zu meiner Kenntniss gelangte Materialien beizufügen:

Widgren! (Brasil. prov. Rio de Janeiro, ao. 1844; Hb. Holmiense); Glaziou n. 8600! 13624! (Rio de Janeiro; Hb. Eichler, Warming).

Zusatz. Bezüglich der in den Zusätzen 2 und 3, p. 99 und 100 der Monographie von *Serjania*, in Betracht gezogenen durchsichtigen Punkte und Linien der Blätter und der ihnen zu Grunde liegenden Verhältnisse verweise ich auf das oben p. 37 ff. gelegentlich der Darlegung der Blattstructur von *Serjania* Gesagte und bezüglich ergänzender Beobachtungen über das p. 100 der Monographie erwähnte, elegant durchsichtig punktirte Exemplar von *Serjania communis* var. *α* auf den hier dieser Art beigefügten Zusatz.

2. Serjania Regnellii Schlecht. (2, p. 105.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Mosen n. 1954! (Brasil. prov. Minas Geraës, Serra de Caldas, m. Jun. 1874, flor. et fruct. junior.; Caldas in margine aquaeductus, m. Jul. 1874, fruct.; Hb. Holm.).

3. Serjania cuspidata Camb. (3, p. 107.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen, und zwar für Forma 1:

Tweedie n. 1260! (Rio de Jan., 1837; Hb. Kew.); Miers n. 3720 („Jurujuba Bay", Rio de Jan.), n. 3967! (Corcovado, Rio de Jan.; Hb. Kew.); Widgren! (Rio de Jan., 1844; Hb. Holm.); N. J. Andersson! (Rio de Jan., 1851; Hb. Holm.); Glaziou n. 6498! (Rio de Jan.).

5. Serjania communis Camb. (5, p. 110.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Var. *α.* mollis: Mosén n. 3833! (Bras. prov. S. Paulo, Campinas, in margine sylvae, m. Maj. 1875, fruct.; Hb. Holm.); Glaziou n. 8592! 8593! 8963! (Rio de Jan.; Hb. Eichl., Warming). — Var. *β* pilosula: Fritz Müller n. 194! partim (partim var. *γ*; S. Catharina, Bras.,

---

1) Die dem Namen folgende Nummer (mit Seitenzahl) ist die der Monographie von *Serjania*; bei den neuen Arten die entsprechende Einschaltungsnummer.

1868); Glaziou n. 8597! (Rio de Jan.); Mosén n. 3345! (Bras. prov. S. Paulo, Santos, in ripis amnis Buturoca, m. Januar. 1875, flor. et fruct.; specimen insignius pellucido-areolatum; Hb. Holm.). — Var. *γ.* glabra: Fendler n. 203 (Venezuela, 1854—55?; Hb. Kew.); Widgren! (Rio de Jan., 1844; Hb. Holm.); Fritz Müller n. 194! partim (partim var. *β*; cf. ibid.); Glaziou n. 8598! (Rio de Jan.); Mosén n. 3603! 3604! 3605! (Bras. prov. S. Paulo, Santos, in ripa amnis Buturoca et prope S. Vincente in litore maris, m. Dec. 1874 flor., m. Apr. 1875 fruct.; Hb. Holm.).

Zusatz. Durch das Exemplar von Mosén n. 3345! ist nun auch für die *Var. β* das gelegentliche Auftreten deutlicher durchsichtiger Punkte, von vergrösserten Epidermiszellen mit verschleimter innerer Wandung herrührend, nachgewiesen, wie es früher schon für die anderen beiden Varietäten hervorgehoben worden ist. Das betreffende, elegant durchsichtig punktirte Exemplar der *Var. α* von Hombron habe ich bei meinem letzten Aufenthalte in Paris (Herbst 1885) nochmal zu untersuchen Gelegenheit gehabt und kann nun nach dem Ergebnisse dieser Untersuchung dem früher in dem Zusatze 2 zu Serj. tenuis, p. 100, darüber Bemerkten hinzufügen, dass sich die dort ausgesprochene, aus dem Verhalten der von Sello herrührenden, besonders deutlich punktirten Exemplare der *Var. γ* geschöpfte Vermuthung vollständig bestätiget hat, und dass die so auffallend deutlichen durchsichtigen Punkte bei dem Exemplare von Hombron von nichts anderem herrühren als von Epidermiszellen mit sehr stark verschleimten inneren Membranen, welche im aufgequollenen Zustande tief in das Gewebe des Blattes eingeschoben erscheinen.

6. **Serjania viridissima** Radlk. (5, a.)

Scandens, fruticulosa; rami 6-costati, glabri; corpus lignosum compositum e centrali majore et periphericis tribus parvis lateribus centralis concavis applicitis; folia biternata; foliola terminalia subrhombea, lateralia ovata vel ovato-lanceolata, omnia breviter acuminata, rarius obtusata, subpetiolulata, glabra, obsoletius remote serrato-dentata, pellucide areolata, epidermide valde mucigera; flores subsectionis pro genere majusculi, petalis interne glandulis microscopicis sat dena obsitis; fructus —.

Caulis scandens. Rami sarmentosi, graciles, internodiis thyrsigeris 6—8 cm longis, pennam corvinam aequantibus, 6-costati, 6-sulcati, costis obtusis flavido-fuscescentibus, sulcis viridibus, glabri; corpus lignosum compositum e centrali majore sulcato, tricostato et periphericis tribus minoribus costas tres reliquis alternas vix minores exhibentibus. Folia sparsa, majora ramorum thyrsigerorum 20 cm longa, 18 cm lata; foliola terminalia majora, basi in petiolulum 1,5 centimetralem coarctata, petiolulo adjecto 10 cm longa, 5,5 cm lata, lateralia basi ovata abruptius contracta, 6—9 cm longa, 3—3,5 cm lata, omnia pinnatinervia, membranacea, sicca quoque viridissima; stipulae minutae. Thyrsi solitarii elongati, folia superantes, laxe cincinnigeri; cincinni longiuscule stipitati; bracteae bracteolaeque parvae, subulatae; pedicelli glabri, alabastra ellipsoidea 6 mm longa subaequantes. Flores (— masculi tantum suppetebant) subsectionis: Sepala exteriora interioribus dimidio breviora, tertium et quintum connata, supra medium discreta, omnia, praesertim interiora, pube brevissima crispula ad margines albella induta. Petala e late obovato in unquem brevem attenuata, intus glandulis microscopicis dense obsita, flabellato-venosa, superiora 6 mm longa, 4 mm lata: squamae (crista exclusa) fere dimidio breviores, vix angustiores, margine villosulae, crista brevi late obovata appendiceque apicali deflexa brevi villoso-barbata instructae; petala inferiora paullo

breviora, latiora: squamae crista oblique dentiformi instructae. Torus selliformis; glandulae superiores ovatae, laterales obsoletae. Stamina petala fere aequantia, parce pilosula; antherae subglabrae. Germinis rudimentum parvum, obovatum, triquetrum, glandulis microscopicis obsitum, stylo rudimentario trisulco apice tridentato coronatum.

In Brasilia meridionali: Weir 501! partim (partim Serj. glabrata f. 1, Hb. Florent.; „prov. S. Paulo et Rio de Jan."; Hb. Kew).

Zusatz. Die Pflanze ist im Habitus ähnlicher der *Serj. leptocarpa* als der *Serj. communis*, welch' letzterer sie übrigens nach der Beschaffenheit der Blüthen (namentlich mit Rücksicht auf die Verwachsung des dritten und fünften Kelchblattes) doch zweifellos als näher verwandt erscheint. Sie bloss als eine ungewöhnlich grossblätterige, kahle Form der *Serj. communis* zu betrachten, dem steht besonders die auch äusserlich hervortretende Eigenthümlichkeit der Zweigstructur entgegen. Bei *Serj. communis* sind die Zweige stets scharf dreikantig, die Kanten von den stark vorspringenden peripherischen Holzkörpern gebildet, welche derart entwickelt und den ebenen oder schwach gewölbten Flächen des dreiseitigen centralen Holzkörpers derart aufgelagert sind, dass diese Flächen nicht auch die Flächen des Zweiges bilden können, vielmehr unter dessen Kanten zu liegen kommen, während die Kanten des centralen Holzkörpers in der Mitte der doppelfurchigen Zweigseiten als je eine mässig scharfe, niedere Rippe (zwischen den beiden Furchen) hervortreten. Bei *Serj. viridissima* dagegen, bei welcher die drei Seiten des centralen Holzkörpers rinnenförmig vertieft sind, treten die peripherischen Holzkörper derart in diese Vertiefungen zurück, dass ihnen kein grösserer Antheil an der Bildung der Zweigoberfläche zufällt als den stumpfen Kanten des centralen Holzkörpers. Die Zweigoberfläche zeigt demnach 6 ziemlich gleichmässige, stumpfe Rippen.

Subsectio 2.

An den Anfang dieser Subsection sind entsprechend dem erweiterten Conspectus specierum die beiden schon veröffentlichten Arten *S. decemstriata* Radlk. und *S. foveata* Griseb. zu stellen, wie folgt:

8. Serjania decemstriata Radlk. (6, a.)

Serjania decemstriata Radlk. in Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wiss., math.-phys. Classe, Bd. VIII (1878, „Ueber Sapindus" etc.) p. 223, annot. Specim. cult.!

Scandens, fruticosa, glabra; rami subherbacei, graciles, teretes, lineis impressis 10-striati, cortice viridi; corpus lignosum simplex, sulcato-striatum; folia biternata, saturate viridia; foliola ovata vel ovato-lanceolata, terminalia subrhombeo-lanceolata, acuta et mucronulata, subpetiolulata, remote serrata, opaca vel obscurius pellucide punctata, epidermide mucigera; cincinni longe stipitati; flores parvuli; sepalum 3 et 5 libera, duo exteriora subglabra, interiora tomentella; germen non nisi glandulis obsitum.

Rami glabri, internodiis thyrsigeris 8 cm longis, diametro 1,5 mm. Folia 14 cm longa, 12 cm lata; foliola terminalia reliquis majora, circiter 7 cm longa, 2,5—3 cm lata, basi cuneata in

petiolulum 1-centimetralem contracta, lateralia superiora ovato-lanceolata, inferiora ovata, in petiolulum perbrevem abruptius coarctata, omnia argutius vel subinciso-serrata, pinnatinervia, praeter marginem et nervos supra pilis adspersos axillasque nervorum pilosas glabra, glandulis microscopicis obsita, membranacea, sicca quoque saturate viridia, opaca, juxta nervos et in apice punctis pellucidis raris aegre perspiciendis instructa, nec non cellularum laticiferarum seriebus, praesertim ubi cum venis conjunctae sunt, pellucide lineolata; petiolus communis partialesque nudi vel partialis intermedius superne submarginatus; stipulae minimae, triangulari-subulatae. Thyrsi solitarii, folia aequantes, pedunculo communi (apice bicirrhoso) glabro, rhachi puberula laxe cincinnigera, cincinnis subverticillatis; pedicelli puberuli, alabastra 2 mm longa paullulum superantes, infra medium articulati. Flores (hermaphroditi nunc quoque suppetebant) 2,5 mm longi: Sepala duo exteriora interioribus dimidio fere breviora. Petala ex obovato attenuata, intus medio glanduligera; squamae petalorum superiorum crista obcordato-bifida, laciniis acutis, appendiceque deflexa obtusa barbata, petalorum inferiorum crista dentiformi vel subaliformi oblique emarginata instructae. Tori glandulae superiores ovato-lanceolatae, inferiores minores, suborbiculares. Stamina basi laxe pilosa. Germen triquetrum, cuneatum; stylus apice trifidus, germen subaequans, glaber; rudimentum pistilli florum masculorum glabrum.

In Republica Argentina nec non in Brasilia meridionali: Didrichsen! (e seminibus prope Buenos Aires lectis orta in Horto Hafniensi); Tweedie! (Bras. merid.; Hb. Kew.).

Zusatz. Schon bei der ersten Veröffentlichung der damals nur in dem Culturexemplare aus dem Copenhagener Garten vertreten gewesenen Pflanze habe ich (l. c.) hervorgehoben, dass dieselbe einerseits an *Serjania communis* und *S. confertiflora*, andererseits an *Serjania meridionalis* erinnert, dass sie jedoch von den ersteren beiden Arten durch den einfachen Holzkörper unterschieden ist, von *S. meridionalis* aber, welcher sie gerade in der Beschaffenheit des Holzkörpers nahe kommt, besonders durch die lang gestielten Wickeln. Auf den Unterschied, welcher in der Behaarung, namentlich der inneren Kelchblätter, gegenüber dem Fehlen eines Indumentes bei den sämmtlichen Kelchblättern von *S. meridionalis* noch weiter hervortritt, kann jetzt, da das gleiche Verhalten auch an spontanem Materiale beobachtet ist, ebenfalls Nachdruck gelegt werden; ebenso auf die Gestalt der wohl zweispaltigen, aber nicht zweihörnigen Schuppenkämme der Blumenblätter.

Nach diesem spontanen Materiale lässt sich nun auch gemäss der Gestalt des eben seine Vergrösserung beginnenden Fruchtknotens die Einstellung der Pflanze in die zweite Unterabtheilung der ersten Section wenigstens mit Wahrscheinlichkeit vornehmen.

Gleichfalls schon bei der ersten Veröffentlichung habe ich ferner die Frage in Betracht gezogen, ob die Pflanze nicht etwa zu einer der von Grisebach in den Plant. Lorentzianae, 1874, p. 60 veröffentlichten argentinischen Arten, *Serjania fulta*, *Serjania foveata*, gehören möchte.

Diese Frage liess sich damals, ebenso wie die nach dem Werthe der Grisebach'schen Arten selbst, nicht endgiltig beantworten. Das wiederholt von Grisebach erbetene Vergleichsmaterial nämlich war mir vorenthalten geblieben. Aus den Beschreibungen Grisebach's aber war, da sie die so wichtige Zweigstructur ignoriren und abgesehen von der Blattgestalt und dem Indumente fast nur Gattungscharactere enthalten (wie ja auch die von ihm gewählten Namen nur auf einen solchen, und zwar

den nämlichen — die Torusdrüsen an der Insertionsstelle der Blumenblätter — sich zu beziehen scheinen) um so weniger ein sicherer Schluss zu ziehen, als selbst über die von ihm angegebene Vierzahl der Kelchblätter Zweifel nicht zu unterdrücken waren.

Die nunmehr durch die Güte des Herrn Grafen zu Solms-Laubach mir zugekommenen Originalien Grisebach's zeigen denn auch, dass hier nirgends eine Verwachsung des 3. und 5. Kelchblattes vorhanden ist und dass Grisebach nur ebenso, wie vor 50 Jahren Cambessedes bei *S. grandiflora*, *Laruotteana* und *glabrata*, wie vor 80 Jahren Jacquin bei *S. caracasana* und wie vor 170 Jahren Plumier bei *S. sinuata* etc., durch das Zusammenhängen dieser Kelchblätter mittelst ihrer Haarbedeckung, welches bei oberflächlicher Untersuchung sie wie verwachsen erscheinen lässt, getäuscht wurde. Zugleich erwies sich die *Serjania fulta* als nichts anderes denn als *Serjania glabrata Kunth* (und ebenso die an gleicher Stelle von Grisebach aufgestellte *Paullinia brachystachya*, welche sogar die gleiche Form der *Serj. glabrata*, nämlich *forma 2. mollior Radlk.* Monogr. *Serj.* p. 169, wie die *Serj. fulta*, darstellt). Die *Serjania foveata* aber, die Grisebach später (Symb. ad Flor. Argent., 1879, p. 79) als eine Form der *Serjania meridionalis Camb.* betrachtet wissen wollte, zeigte sich in der That als eine selbständige und als eine der *Serjania decemstriata* äusserst nahe stehende Art. Sie ist der *S. decemstriata* unmittelbar anzureihen. Das Weitere über ihr Verhältniss dazu mag an die folgende Characteristik derselben sich anreihen.

9. Serjania foveata Griseb. (6, b.)

Serjania foveata Grisebach Plantae Lorentzianae in Abhandl. Götting. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XIX (1874) p. 60 n. 170!

Serjania meridionalis var. foveata Grisebach Symb. ad Flor. argentin. in Abh. Gött. Ges. der Wiss. Bd. XXIV (1879) p. 79 n. 451!

Scandens, fruticosa, puberula; rami teretes, lineis impressis 8-striati, costis latoribus obtusioribus, pilis crispatis canis velutino-pubescentes, cortice fuscescente; corpus lignosum simplex, sulcato-striatum; folia biternata, supra subtusque pilis adpressis adspersa, fuscescentia, petiolis cano-pubescentibus; foliola ovata vel ovato-lanceolata, terminalia subrhombeo-lanceolata, acuta et mucronulata, subpetiolulata, remote serrata, opaca vel obscurius pellucide punctata, epidermide mucigera; cincinni longe stipitati; flores mediocres; sepalum 3 et 5 libera, duo exteriora subglabra, interiora tomentella; germen non nisi glandulis obsitum.

Caulis „arbores altissimas adscendens, plerumque vero humilior" (Lorentz in scheda). Rami internodiis thyrsigeris 3—5 cm longis, diametro 2 mm. Folia 10—12 cm longa, fere totidem lata; foliola terminalia reliquis majora, 5—6 cm longa, 2—3 cm lata, basi in petiolulum 5—8-millimetralem attenuata, lateralia superiora ovato-lanceolata, inferiora ovata, vix petiolulata, omnia pauciserrata, pinnatinervia, glabrescentia, glandulis microscopicis obsita, tenuiter membranacea, sicca fuscescentia, opaca, subimpunctata, reti tantum venarum angusto fere ubique cum cellulis laticiferis conjuncto plus minus pellucido; petiolus communis partialesque nudi, puberuli, ramis concolores; stipulae minimae, ovato-subulatae. Thyrsi solitarii, folia aequantes, pedunculo communi rhachique

aequilonga puberulis, cincinnis sat crebris binis ternisve approximatis puberulis, stipite circ. 1-centimetrali incluso 12—15 mm longis, apice 5—7-floris; pedicelli puberuli, alabastra 2,5—3 mm longa subaequantes, basi articulati. Flores (hermaphroditi tantum suppetebant) 4 mm longi: Sepala duo exteriora interioribus paullo breviora. Petala ex oblongo cuneata, 3,5 mm longa, 1,5 mm lata, intus parce glanduligera; squamae petalorum superiorum crista obcordato-bifida, laciniis obtusis vel subacutis, appendiceque deflexa obtusiuscula barbata, petalorum inferiorum crista subaliformi oblique bifida instructae. Tori glandulae superiores ovatae, inferiores minores. Stamina basi laxe pilosa. Germen triquetrum, obovatum, vix 2 mm longum, apice in stylum germen dimidium aequans glabrum, segmentis stigmatosis aequilongis, coarctatum.

In Reipublicae Argentinae provincia Tucuman: Lorentz n. 288! (prope Siambon m. Mart. 1872; „in sylvis subtropicis" Griseb. l. c.; Hb. Griseb.).

Zusatz. Die Pflanze steht der vorausgehenden sehr nahe — so nahe, dass die freilich vor dem Bekanntwerden der Früchte kaum lösbare Frage aufgeworfen werden kann, ob sie nicht bloss eine pubescente Form derselben darstelle, ähnlich wie sie bei *Serj. glabrata* neben einer kahlen Form auftritt. Uebrigens hat die Pflanze doch ein eigenthümliches Gepräge, welches auf den ersten Blick in ihr fast eher ein *Cardiospermum* als eine *Serjania* vermuthen lässt. Grisebach verglich sie mit der *S. glabrata K.*; ob er aber die echte *S. glabrata K.* (und nicht bloss die von ihm so genannte Pflanze aus Peru, Lechler n. 2332, welche ich fragweise zu *Serj. membranacea Splitg.* gebracht habe) wirklich gekannt habe, ist in hohem Maasse zweifelhaft, da er diese Art in den Materialien der gleichzeitig von ihm aufgestellten *Serj. fulta* und *Paull. brachystachya* nicht erkannt hat. Die *Serj. foveata* lässt sich übrigens, namentlich was die Farbe und Behaarung der Zweige betrifft, mit *S. glabrata K.* wohl vergleichen, was für die *S. decemstriata* nicht ebenso sehr der Fall ist.

Grisebach's Vergleichung der Blüthen mit denen der *S. paludosa* ist nicht von Belang, da sie, wie er angibt, nicht auf Autopsie beruht.

Dass Grisebach irrthümlicher Weise den Kelch nur als 4-blättrig beschrieb, davon ist schon im Zusatze zu der vorigen Art die Rede gewesen.

Seine Bezeichung des Fruchtknotens als „brevissime abruptim stipitatum, stipite tubum stamineum aequante" beruht auf einer Missdeutung des unterhalb der wesentlichen Blüthentheile kurz säulenförmig (wie der Sattel in den Sattelknopf, s. d. Monogr. von *Serj.* p. 8) ansteigenden Blüthenbodens. Grisebach hat diesen Theil, wie aus einer der Pflanze beiliegenden Zeichnung von seiner Hand zu ersehen ist, für eine Staubgefässröhre und einen Fruchtknotenstiel gehalten. Die Staubgefässe sind aber erst auf der Endfläche dieses Theiles und völlig frei, wie gewöhnlich bei hermaphroditen *Serjania*-Blüthen, in der Umgebung des ungestielten Fruchtknotens inserirt.

Der 5 Jahre nach der Aufstellung der Art von Grisebach (in d. Symb. l. c.) gemachte Versuch, dieselbe der *Serj. meridionalis*, welche im Habitus und in der Zweigstructur allerdings grosse Aehnlichkeit mit *S. foveata*, wie mit *S. decemstriata* (s. dort im Zusatze), besitzt, als eine besondere Form unterzuordnen „pedicellis longioribus, sepalis tomentellis", zeigt von einem Mangel sicheren Urtheiles über den Werth,

welcher den in den angeführten Worten[1]) hervorgehobenen Eigenthümlichkeiten innerhalb der Gattung *Serjania* zukommt. Der damit begangene Fehler ist übrigens ein geringfügiger in Vergleich mit dem, welchen Grisebach sich dadurch zu Schulden kommen liess, dass er zu *Serj. meridionalis*, die ihm doch in guten Exemplaren (von Lorentz in Blüthe, von Balansa — n. 2485 — in Frucht) vor Augen war, mit den Worten „variat praeterea foliolis (soll heissen „foliis") plerisque ternatis et sepalis tomentosis" nach Ausweis seines Herbares die grossblüthige *Serj. hebecarpa Benth.* in einer bei dieser zu characterisirenden Form (forma *platycephala m.*) zog. Ich werde darauf unter *Serj. meridionalis* zurückkommen, woselbst auch die in der Structur des Blattes gelegenen, schon oben in den Ergänzungen zum Gattungscharakter, p. 37 ff., erwähnten und gerade hier, wie bei *Serj. meridionalis* und *hebecarpa*, gut verwerthbaren Merkmale zur Unterscheidung sterilen Materiales im Gegenhalte zu den von Grisebach unter *Serj. meridionalis* (Symb. l. c.) an meinen früheren Angaben hierüber gemachten, grundlosen Ausstellungen entsprechende Berücksichtigung finden sollen.

Es ist schwer, sich zusammenzureimen, wie Grisebach drei derartige Pflanzen, wie die *Serj. meridionalis*, *Serj. foveata* und *Serj. hebecarpa* in eine Art verschmelzen konnte, während er andererseits gleichzeitig eine und dieselbe Form einer anderen *Serjania*-Art, die *S. glabrata f. mollior*, als zweierlei (neue) Arten, und zwar zweier verschiedener Gattungen, als *Serj. fulta* nämlich und *Paull. brachyphylla*, aufzufassen vermochte.

10. Serjania cardiospermoides Schlecht. et Cham. (7, p. 111.)

Der Litteratur ist nunmehr beizufügen:

Serjania cardiospermoides Hemsley in Salvin & Godman. Biolog. Centr.-Americ., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 6.

Serjania spec. Hemsley ibid. p. 209 n. 38; „Coulter 677", potius Coulter 877! Cf. obs.

Dem Materialienverzeichnisse ist nunmehr beizufügen:

Hahn! (Zaquitlan m. Aug. 1865, flor.; Mus. Par. „Herbier de la Commission scientifique du Mexique").

Zusatz. Die von Hemsley l. c. angegebene Ziffer „Coulter n. 677" ist nur aus unrichtiger Lesung der allerdings undeutlich geschriebenen Nummer hervor-

---

1) Um jede Unklarheit über diese Worte auszuschliessen, so bemerke ich, dass unter „pedicellus" hier offenbar dasselbe zu verstehen ist, was Grisebach in den Pl. Lorentz. p. 60 „pedunculus partialis" genannt und als 6—10‴ lang bezeichnet hat, der — in anderem Maasse ausgedrückt — ungefähr 1 cm lange, als Wickelstiel bezeichenbare untere Theil des Wickel-Sympodiums, welch' letzteres bei Hinzunahme auch des oberen, über der ersten Blüthe gelegenen Theiles bis zu 15 mm betragen kann. Die eigentlichen Blüthenstielchen (genauer ausgedrückt: die Anthopodien der Blüthensprosse — s. d. Gattungscharakter, p. 7 der Monographie) sind bei *Serj. meridionalis* und *Serj. foveata* ziemlich gleich lang, kaum mehr als 2 mm messend.

gegangen. Die von ihm hier gemeinte, im „Herb. Kew.“, wie er dabei anführt, vorhandene Pflanze ist dasselbe Exemplar, welches ich an der von ihm unter n. 6 citirten Stelle meiner Monographie von *Serjania* im Auge hatte, und zu welchem Hemsley die Angabe Herb. Kew. nur desshalb nicht hinzufügen konnte, weil er eben die betreffende Nummer anders gelesen hatte. Dass dieselbe wirklich für 877 zu lesen sei, das ergibt sich schon aus dem Umstande, dass auch die übrigen von Coulter vorhandenen *Serjania*-Arten (s. d. Monogr. p. 365), denen unter *Serj. racemosa* nun auch noch n. 880 beizufügen ist, Nummern aus dem neunten Hundert tragen.

13. Serjania Ampelopsis Planch. & Lind. (10, p. 113.)

Der Characteristik der Pflanze ist nach dem gleich näher zu bezeichnenden Materiale von Kalbreyer und zur Unterscheidung von der unter 14 (10, a) anzureihenden neuen Art Folgendes beizufügen:

Caulis 8—10 pedalis; folia siccitate e viridi fuscescentia, subtus stomatum inter cellulas mucigeras collapsas prominulorum multitudine canescentia; flores minores, albi, sepalo 3 et 5 interdum vix basi connatis; fructus maturus, ut in S. leptocarpa, magnus, elongatus, angustior, 4,2 cm longus, 3 cm latus, basi et apice excisus, infra loculos paullum constrictus, alis inferne paullulum dilatatis, loculis apice et dorso crista 3-millimetrali instructis, endocarpio glabro, seminibus altius supra basin, ad medium fere loculum, insertis — (immatura tantum suppetebant).

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

In Novo-Granata inter Ocaña et Pomplona: Kalbreyer n. 800! (Santa Barb., ad altitud. „3800 ped.“, m. Nov. 1878, flor. — sepalo 3 et 5 vix ima basi connatis — et fruct.; Hb. Kew.).

Zusatz. Das hier in Betracht stehende Material zeigt zwar, dass die für die Stellung der Pflanze früher (in Zusatz 1, p. 113) als maassgebend betrachtete Verwachsung des dritten und fünften Kelchblattes, in welcher schon damals (s. die Characteristik, p. 113) beträchtliche Verschiedenheit wahrgenommen worden war, gelegentlich fast ganz unterbleiben kann, es zeigt aber auch, dass gemäss der Beschaffenheit der Frucht die Pflanze kaum irgend einer Art näher verwandt sein dürfte, als der *S. leptocarpa*, neben welche sie schon früher gestellt worden ist, und welche ihr auch hinsichtlich der zu kleinen Felderchen ausgedehnten, durchsichtigen, von Zellen mit verschleimten Membranen herrührenden Punkte, neben der im Folgenden anzufügenden, darnach benannten, neuen Art, am meisten ähnlich ist.

14. Serjania areolata Radlk. (10, a.)

Scandens, suffruticosa; rami obtuse sexangulares, lateribus vix concavis; corpus lignosum simplex, cavitate medullari angustiore instructum; folia biternata, sicca quoque utrinque viridia; foliola lanceolata, acuta, subpetiolulata, dente uno alterove instructa, glabra, opaca, pellucide areolata, epidermide mucigera; flores majores, albi; sepalum 3 et 5 libera; fructus quam maxime juvenilis (germen auctum) glandulis paucis albidis,

pilis vero crebrioribus setulosis prope marginem obsitus, stylo conspicuo, quam segmenta stigmatosa longiore coronatus, maturus —.

Rami glabri, lateribus viridibus, angulis (si mavis costis) fuscescentibus, diametro 2 mm. Folia 10 cm longa, totidem lata; foliola terminalia reliquis paullo longiora, petiolulo adjecto 6 cm longa, 2,3 cm lata, lateralia minora, vix petiolulata, omnia pinnatinervia, membranacea, in margine pilis minutis adspersa, ceterum glaberrima; petioli nudi. Thyrsi solitarii, folia superantes, laxe cincinnigeri; cincinni stipitati, glabri; pedicelli prope basin articulati, glabri, quam alabastra 5 mm longa breviores. Flores hermaphroditi: Sepala duo exteriora puberula, interioribus tomentellis plus dimidio breviora. Petala ex obovato attenuata, 5 mm longa, 3 mm lata, intus glandulis microscopicis obsita; squamae petalorum superiorum crista obcordato-bifida, appendiceque deflexa brevi obtusiuscula barbata, petalorum inferiorum crista brevi dentiformi instructae. Tori glandulae superiores breviter ovatae, inferiores obsoletae. Stamina pilosula; antherae subglabrae. Germen triquetrum, ex obovato cuneatum. In floribus masculis germinis rudimentum parvum, glanduligerum, in stylum ipso longiorem apice tridentatum terminatum.

In Bolivia prope Coroico: Pearce! (ad altitud. „5—7000 ped.“, m. Maj. 1866, flor.; Hb. Kew.).

Zusatz. Die Pflanze steht, so viel sich bei dem Fehlen voll ausgebildeter Früchte beurtheilen lässt, der *S. Ampelopsis* sehr nahe. Ob die in mehreren Stücken vorhandenen, aber nirgends sehr erheblichen Unterschiede etwa nur dem höher gelegenen Standorte zuzuschreiben sind, wird sich wohl erst entscheiden lassen, wenn durch reicheres und fructificirtes Material über die Grenzen in den Formschwankungen und zugleich über die Grenzen des Verbreitungsbezirkes der *S. Ampelopsis*, die bisher in typischen Exemplaren nur aus der Provinz Ocaña in Neu-Granada vorliegt, nähere Kenntniss gewonnen sein wird.

Ausser an *S. Ampelopsis* erinnert unsere Pflanze auch an *S. dumicola*, welche bekanntlich das Vaterland Bolivia mit ihr gemein hat, durch den zusammengesetzten Holzkörper aber schon strenger von ihr geschieden ist.

15. **Serjania chartacea** Radlk. (11, p. 114.)

Als Litteraturstelle ist nunmehr beizufügen:

Serjania chartacea Sagot Catal. des Pl. de la Guyane franc. in Ann. Scienc. nat., IV. Sér., XII (1882) p. 190.

Zusatz. Sago bemerkt, dass er die Pflanze kaum von *Serj. pedicellaris Radlk.* zu unterscheiden im Stande sei. Ich habe schon hervorgehoben, dass ich die *Serj. chartacea* in den Herbarien mit *Serj. pedicellaris* vermengt gefunden habe. Wenn Sagot bei seiner Bemerkung eine solche eingemengte Pflanze im Auge hatte, dann hat er sicherlich Recht. Dann ist dieselbe eben nichts anderes als *S. pedicellaris*. Hat er aber, wie aus seiner Mittheilung über die Autopsie der bisher nur von Leprieur gesammelten *S. chartacea* im Pariser Herbare hervorzugehen scheint, diese selbst vor sich gehabt, dann zeigt seine Bemerkung nur, wie schwer Manche zur Auffassung von Unterschieden wie „einfach“ und „zusammengesetzt“ — mit Beziehung auf den Holzkörper — und wie „concav“ und „convex“ — mit Hinsicht auf die bei *S. chartacea* canellirten, bei *S. pedicellaris* stumpf gerippten Zweige — zu bringen sind.

19. Serjania confertiflora Radlk. (15, p. 117.)

Hieher ist das schon oben in den Ergänzungen zu den cultivirten Arten (p. 50) und zu der chronologischen Tabelle I n. 100 (p. 53) Angeführte zu beziehen und demgemäss als Litteraturstelle einzufügen:

Paullinia pinnata (non Linn.) Pasquale Catal. Hort. Neapol., (1867) p. 76! Cf. Radlk. in Sitzungsbericht Münch. Acad. Bd. VIII (1878, Ueb. Sapindus etc.) p. 224, annot.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Macrae! (Hb. Hook.). — Culta in Horto Neapolitano sub nomine „Paull. pinnata" ao. 1875! (Cf. supra).

Zusatz. Die Pflanze zu der obigen Litteraturstelle, welche ich im Herbste 1875 lebend im botanischen Garten zu Neapel gesehen und von welcher ich beblätterte Zweige aufbewahrt habe, ist wohl in Samen durch irgend einen Reisenden nach Europa gekommen. Obwohl die Pflanze nur im sterilen Zustande untersucht werden konnte, bleibt über ihre Zugehörigkeit zu *S. confertiflora* nach der anatomischen Beschaffenheit der Zweige und Blätter (besonders mit Rücksicht auf die für diese Art characteristischen durchsichtigen Elemente) kein Zweifel.

Sectio II. Ceratococcus.

20. Serjania cornigera Turcz. (16, p. 117.)

Der Litteratur ist nun beizufügen:

Serjania cornigera Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Americ., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 7.

Zusatz A. Bei Hemsley ist der von mir nach einer Angabe von Moritz Wagner angeführte Standort Maume (oder Maumee, wie Sutton Hayes bei *Paullinia turbacensis Kunth* im Hb. Kew. schrieb) in „Mamei" verändert, unter *Serj. trachygona R.* dagegen in „Macume".

Zusatz B. Bezüglich fehlerhafter, übrigens nicht veröffentlichter Bestimmung der M. Wagner'schen Pflanze, auch des Fruchtexemplares, durch Grisebach, ebensowohl vor, wie in anderer Weise nach dem Erscheinen meiner Monographie, will ich lediglich für künftige Durchforscher seines Herbariums, und damit nicht einem neuen Synonyme Entstehung gegeben werde, das hervorheben, dass derselbe dadurch auch gehindert wurde, meine gleichfalls von ihm unrichtig bestimmte *Serj. insignis* (s. diese), die ihm in Exemplaren von M. Wagner mit der *Serj. cornigera* früher von München aus zur Bestimmung mitgetheilt worden war, nach den Angaben meiner Monographie zu erkennen. Grisebach liess sich, wie es scheint, bei der Benützung meiner Monographie mehr von dem Namen des Sammlers als von den angegebenen Characteren leiten, die wenigstens für das Fruchtexemplar der *S. cornigera*, zumal sie

schon aus dem Namen derselben hervorleuchten, nicht schwer aufzufassen gewesen wären. Darnach kann es allerdings nicht Wunder nehmen, wenn Grisebach gelegentlich (Symbolae ad Flor. argentin., 1879, p. 79 unter n. 449, *Serj. fulta Griseb.*) darüber klagt, dass er nicht einmal die von mir gebildeten Sectionen der Gattung *Serjania* zu erkennen im Stande gewesen sei. Ich werde bei Betrachtung seiner *Serj. fulta*, d. i. *Serj. glabrata Kunth*, darauf zurückzukommen Gelegenheit haben.

Sectio III. Eurycoccus.

25. **Serjania Salzmanniana** Schlecht. emend. (21, p. 122.)

Der Litteratur kann, zur Ausschliessung möglicher Verwechselung beigefügt werden:

Non Serjania Salzmanniana Seemann Bot. Voy. Herald I (1852—57) p. 92 n. 141; cfr. Serj. acuta Tr. & Pl.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen, und zwar unter Forma 1:

Gaudichaud n. 46! (Bahia; Hb. Franqueville).

27. **Serjania pedicellaris** Radlk. (23, p. 124.)

Der Litteratur ist nunmehr beizufügen:

Serjania pedicellaris Sagot Catal. des Plantes de la Guyane franc. in Ann. Scienc. na., IV. Sér., XII (1882) p. 190.

Zusatz. Ich habe schon hervorgehoben, dass in den Herbarien diese Art nicht selten mit *Serj. membranacea* Splitg. verwechselt erscheint, und diese Verwechslung mag auch Sagot zu der (von mir übrigens, da ich blosse Herbarsynonyme fern halten wollte, nicht erwähnten) irrigen Bestimmung seiner hierher gehörigen, unter n. 1000 (wie ich bei *Serj. pedicellaris* angeführt habe) vertheilten Pflanze geführt haben. Um desswillen ist aber die Pflanze noch keineswegs sehr nahe verwandt mit *Serj. membranacea*, wie Sagot nunmehr meint („Proxima est *S. membr. Splitg.*“ etc.). Die beiden Arten sind vielmehr durch den Fruchtbau sehr wesentlich von einander verschieden und werden durch denselben in verschiedene Sectionen der Gattung verwiesen. Doch will ich zugeben, dass das allerdings schon etwas schwerer aufzufassen ist, als das, was die für Sagot, seinem eigenen Geständnisse nach, auch kaum von *Serj. pedicellaris* unterscheidbare *Serj. chartacea* auszeichnet (s. ob. p. 88 unter *Serj. chartacea*).

28. **Serjania altissima** Radlk. (24, p. 125.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Matthews n. 1322! (Tarapoto, Peru, ao. 1835; Hb. Kew.).

33. **Serjania deflexa** Gardn. (29, p. 129.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Glaziou n. 8595! (Rio de Janeiro; Hb. Eichl., Warming).

35. **Serjania elegans** Camb. emend. (31, p. 130.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Glaziou n. 7550! 8296! (Rio de Janeiro; Hb. Eichl., Warming), 14579! (ibid., ao. 1883—84; Herb. Kew.).

36. **Serjania corrugata** Radlk. (32, p. 131.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

J. de Saldanha n. 7454! (Serra dos Orgãos); Langsdorff n. 2088! (Minas Geraës, ao. 1817; Hb. Ber.).

38. **Serjania gracilis** Radlk. (34, p. 134.)

Der Characteristik ist nach den nunmehr vorliegenden, von Mosén und Glaziou gesammelten Fruchtexemplaren (s. unt. im Materialienverzeichnisse) beizufügen:

Fructus sectionis cordatus, mediocris, 2,3 cm longus, basi 2 cm, ad medios loculos vix 1 cm latus, apice angustato emarginatus, infra loculos vix vel ne vix constrictus, glaber, junior rubicundus, maturus (siccus) fuscescens, loculis sat tumidis semiellipticis dorso et apice conspicue sed angustius cristatis, crista in alam continuata, endocarpio pilis crispatis pallide subfuscis puberulo; semen supra loculi basin insertum, ellipsoideum, latere interiore rectum, fuscum, hilo basilari macula arillosa pallida parva notato; cotyledones curvatae.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Glaziou n. 10433! (foliolis lateralibus interdum dente uno alterove grosso instructis; Rio de Janeiro; Hb. Eichl., Warming); Mosén n. 3602! (Brasil. prov. S. Paulo, Santos, prope S. Vincente in margine sylvae litoralis, m. April. 1875, fruct.; Herb. Holm.).

40. **Serjania macrostachya** Radlk. (36, p. 135.)

Um etwaigen Verwechslungen vorzubeugen, mag bemerkt sein, dass die Pflanze in keinerlei Beziehung steht zu der folgenden Litteraturstelle:

„Paullinia macrostachya Turcz." (sphalmate, loco Paull. polystachya Turcz.) Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 207 sub n. 21: Serjania polystachya Radlk.; cf. infra n. 108.

42. Serjania depauperata Radlk. (37, a.)

Scandens, fruticosa, subglabra; rami graciles, 5-angulares, angulis prominentibus, lateribus concavis canaliculato-sulcatis, glabri; corpus lignosum simplex, 5-angulare, duriusculum (fasciculis vasorum angulis subjectis corporum lignosorum peripheriorum speciem praebentibus, ut in *S. laxiflora* etc.), cavitate medullari parva; folia inferiora subbiternata, reliqua triadum inferiorum in foliola singula transmutatione (semper?) depauperata, 5-foliolato-pinnata, foliolis lateralibus inferioribus quam superiora fere dimidio minoribus, brevissime petiolata; foliola superiora ovato-oblonga, obsolete (terminalia vix obsolete) crenato-dentata, subacuta, inferiora breviter ovata, insignius crenato- vel subserrato-dentata, obtusa, omnia mucronata, lateralia basi ovata, terminale basi attenuata subsessilia, supra glabra, subtus in nervis nec non margine pilis adspersa, fuscescentia, subtus pallida, subcoriacea, punctis pellucidis vix ullis notata, epidermide mucigera (paginae superioris quoque juxta nervos stomatibus instructa); thyrsi solitarii, sat laxiflori, glaberrimi; alabastra subglabra; flores mediocres, longe pedicellati, petalis eglandulosis, tori glandulis abbreviatis; fructus —.

Rami thyrsigeri diametro 1,5 mm, internodiis 2—7 cm longis. Folia 6,5 cm longa, 6 cm lata; foliola terminalia 4,5 cm longa, 2,2 lata, lateralia superiora 3 cm longa, 1,6 cm lata, lateralia inferiora 1,7 cm longa, 1,5 cm lata; petiolus communis 1—3 mm, foliorum subbiternatorum 1—1,4 cm, petiolus intermedius (rhachis) 6 mm — 1,4 cm longus; stipulae breviter triangulares. Thyrsi folia superantes, rhachi quam pedunculus communis breviore; cincinni breviter stipitati, pauci- (2—4-) flori; bracteae bracteolaeque parvae, subulatae; pedicelli 5—6 mm longi, ad tertiam inferiorem partem articulati; alabastra subglobosa, 2-millimetralia. Flores hermaphroditi non suppetebant; masculi: Sepala rubra (ut videtur), duo exteriora breviora, subglabra, interiora praesertim margine basique pube tenerrima adspersa. Petala rubicunda (ut videtur), ex obovato attenuata, 4 mm longa, 2,5 mm lata, praeter marginem ciliolatam glaberrima, nec extus nec intus glandulosa; squamae margine villosulae, superiores crista obcordato-bifida, laciniis intus concavis saepius in margine exteriore in apiculum productis, appendiceque deflexa brevi margine villosula, superiores crista aliformi oblique emarginata instructae. Tori glandulae superiores transverse ellipticae, laterales minores. Stamina basi hirtella; antherae glabrae. Germinis rudimentum trigonum, glandulis obsitum, stylo rudimentario trifido coronatum.

In Guatemala: Bernouilli & Cario n. 2929! (Santa Rosa, m. Oct. 1877, flor.; Herb. Gottingense).

Zusatz. Die Pflanze steht nach der Beschaffenheit der Blüthe und Inflorescenz so zu sagen in der Mitte zwischen *Serj. gracilis* und *Serj. laxiflora*, der letzteren jedoch sich mehr als der ersteren nähernd und in der betreffenden Artengruppe der Sectio III, *Eurycoccus*, durch das Fehlen von Secretzellen im Blatte ausgezeichnet, wie in anderen Artengruppen derselben Section die *Serj. eucardia* einerseits und die einander auch nach anderen Beziehungen sehr nahe stehenden *Serj. altissima*, *glutinosa*, *comata*, *acoma* und *cuneolata* andererseits.

43. Serjania diversifolia Radlk. (38, p. 136.)

Eine theilweise Ausschliessung erfährt die p. 139 der Monographie angeführte Litteraturstelle:

Serjania lucida Griseb. Flor. Brit. West Ind. Isl. (1859—64) p. 123, n. 6, partim.

So weit dieselbe nämlich die schon damals mit Recht als kaum hieher gehörig bezeichnete Pflanze von Wullschlägel aus Jamaica betrifft, ist dieselbe dem Ausweise des Herb. Grisebach gemäss zu *Serj. mexicana* zu übertragen, was schon damals als eine nahe liegende Möglichkeit betrachtet worden ist (vergl. weiter unten die Ergänzungen zu der Uebersicht und Deutung der von Grisebach aufgeführten westindischen und mittelamericanischen Arten unter *Serj. subdentata*, sowie die dort weiter angegebenen Stellen).

Als neues Synonym, dann als neue Litteraturstelle sind (das erstere vor *Serj. lucida Griseb.*, die letztere darnach, p. 139 der Monographie) beizufügen:

Serjania cubensis Ramon de la Sagra Historia economico-politica de ... Cuba (1831) p. 353, c. nom. vulg.: „Bejuco colorado"; cf. infra obs.

Serjania lucida (non Schum. etc.) „Griseb." Sauvalle et Wright Flora Cubana (1873) p. 24 n. 421, c. nom. vulg.: „Bejuco colorado".

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Mac Lean! (Cuba; Hb. Turczaninow).

Dagegen ist im Materialienverzeichnisse die an erster Stelle im Obigen erwähnte, schon früher als höchst fraglich bezeichnete Pflanze von Wullschlaegel aus Jamaica — und damit Jamaica überhaupt aus dem Verbreitungsgebiete der Pflanze — zu streichen.

Zusatz. Der eben angeführte, von Ramon der Pflanze gegebene Name war mir früher wohl aus dem Hb. DC. und Hb. Franqueville bekannt, woselbst er sich bei den in Zusatz 9 (p. 144 der Monographie) erwähnten Exemplaren von Ramon n. 208 eingetragen findet, doch hielt ich ihn für einen blossen Herbarnamen, der unerwähnt zu bleiben hatte, bis ich ihn jüngst an der angeführten Stelle veröffentlicht fand. Der ihm beigefügte Vulgärnamen „Bejuco colorado" hätte ihn auch ohne jene Herbarmaterialien interpretirbar gemacht, da der gleiche Vulgärname bekanntlich in der Flor. Cub. von A. Richard für die dort unter dem De Candolle'schen Synonyme „*Serj. Ossana*" aufgeführte Pflanze Ramon's erwähnt ist. Wie schon in Zusatz 9 angedeutet ist, mag sich dieser Vulgärname auf die röthlichen Zweige, er mag sich aber auch auf die rothen Blüthen beziehen.

Ueber den gleichfalls in Zusatz 9 früher schon erwähnten, vielleicht in unrichtiger Schreibweise bei der in Rede stehenden Pflanze des Hb. Franqueville eingetragenen weiteren Vulgärnamen mag erwähnt sein, dass er statt „Bejuco de cotales" vielleicht B. de corales oder B. de corrales zu lesen sein mag, von deren Deutung schon a. a. O.

(p. 144) die Rede war, vielleicht aber auch B. de-costales, wornach eine Verwendung der Pflanze zum Flechten von Sattelkörben (costales) vermuthet werden könnte, also eine ähnliche Verwendung, wie sie durch die Bezeichnung „Basket-wood“ für *Serj. polyphylla* ausgesprochen ist.

Der Name „Bejuco colorado“ ist auch von Grisebach im Catal. pl. Cub. p. 296 (bis) und an der oben eingefügten Litteraturstelle von Sauvalle und Wright für *Serj. diversifolia* (unter dem unrichtigen Namen *Serj. lucida*) angeführt.

Die ebenfalls aus der Sammlung von Wright noch hieher gehörige (und zwar allein von Allem, was Grisebach sonst noch *Serj. lupulina* genannt hat, hieher gehörige) *Serj. lupulina var. parvula* ist von Sauvalle und Wright auffallender Weise gar nicht erwähnt worden.

Ebenso, wie für diese Art, trifft auch die Angabe des Vulgärnamens „Bejuco de corrales“, d. h. Zaunliane, bei Richard Flor. Cub., Griseb. Cat. pl. Cub. p. 296 (ter) und Sauvalle & Wright Flor. Cubana l. c. auf ein und dieselbe Art, die (als *Serj. paniculata K.* unrichtig bezeichnete) *Serj. subdentata Juss. ed. Poir.* zusammen. Von Sauvalle & Wright wird zwar der gleiche Name auch für das Mixtum compositum dessen, was Grisebach von den Pflanzen Wright's unter *Serj. lupulina* zusammen geworfen hat, angeführt, aber es ist darunter eben auch wieder *Serj. subdentata* (nämlich Wright n. 108, a, coll. 1859—60) enthalten.

Sectio IV. Eucoccus.

44. Serjania dentata Radlk. (39, p. 144.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Macrae! (Hb. Grisebach); Boog! (Hb. Hook.); Glaziou n. 8599! 12504! 13630! (Rio de Janeiro; Hb. Eichl., Warming, Kew.); J. de Saldanha n. 5354!

47. Serjania caracasana Willd. (42, p. 146.)

Als neue Litteraturstelle ist anzuführen:

Serjania caracasana Hemsley in Salvin & Godm. Biol. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 5.

Als neue Synonyme sind nach den oben, p. 52 angeführten Ergänzungen zu der chronologischen Tabelle beizufügen:

Serjania bignonioides Klotzsch ed. Rich. Schomburgk in Reisen in Brit. Guiana III (1848) p. 1180. (Coll. Rich. Schomb. n. 427! in Herb. Berol.; Serj. carac. f. 1, nitidula R.). Cf. infra obs. et Monogr. Serj. p. 148.

Serjania grandiflora, non Camb., Griseb. Symbol. ad Flor. argentin. in Abh. Götting. Ges. der W. XVII (1879) p. 79 n. 450; coll. Lorentz & Hieron.!

Paullinia elegans, non Camb., Griseb. Symbol. ad Flor. argentin. l. c. (1879) p. 80 n. 456, partim, nempe quoad coll. Balansa n. 2490, Paraguay, ex parte!
Paullinia spec. Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 210 n. 11; coll. Endres n. 142! Costarica.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Forma 1: In Brasiliae provincia Rio de Janeiro, in Paraguay nec non in Republica Argentina (omnia foliis depauperatis, plerumque 5-foliolato-pinnatis); Glaziou n. 10414! (Rio de Jan.; Herb. Eichl.); Balansa n. 2482! (Paraguay, „Paraguari dans les bois", ao. 1877), 2490! partim (partim *Paull. elegans Camb.* quae et sub 2490, a in Hb. DC. obvia; Paraguay, „L'Assomption dans les haies", m. Apr. 1874, flor.; *Paull. elegans Griseb.* l. c.); Lorentz & Hieron. n. 532! (Argentin. prov. Oran, Tabaccal, m. Jul. 1873, flor. et fruct. submat.; Hb. Griseb., „*Serj. grandiflora Camb.* ex descr."), 588! (Argentin. prov. Gran Chaco, Dragones, m. Aug. 1873, flor.; Hb. Griseb. sub eodem nom. ac anteced.). — Forma 3: Endres n. 142! (Costa Rica; Hb. Kew.; „Paull. spec." Hemsley l. c.); Glaziou n. 7549! 7860! (Rio de Jan.).

Zusatz. Ueber „*Serjania bignonioides Kl. nov. spec. Mss.*", wie Rich. Schomburgk die Pflanze an der citirten Stelle seines Reisewerkes bei Aufzählung der Pflanzen aus der „Region der Savanne" bezeichnet hat, ohne dieser Bezeichnung etwas Weiteres beizufügen als die Bemerkung: „An den Rändern der Oasen; blüht im April; holzige Schlingpflanze", bemerke ich, dass nach Ausweis des Berliner Herbares dieser Name von Klotzsch auf die in Betracht stehende Art, und zwar auf die oben angegebene Nummer 427 von Richard Schomburgk zu beziehen ist, welcher jedoch auch andere Nummern, aber aus der im Berliner Herbare nur theilweise enthaltenen Sammlung von Robert Schomburgk, zur Seite stehen (4—5, 637; sieh die Monogr. von *Serj.*, p. 148).

Bei der erwähnten Nummer 427 findet sich jener Name (*Serj. bignonioides Kl.*) in der Handschrift von Klotzsch eingetragen.

Dieser Befund war mir schon bei der Ausarbeitung meiner Monographie von *Serjania* bekannt. Ich habe es jedoch absichtlich vermieden, die Bezeichnung von Klotzsch zu erwähnen, da sie nur als ein sogenannter Herbarname sich darstellte. Dass sie, wie noch andere derartige Namen von Klotzsch, aber nicht alle, in dem Reisewerke von Rich. Schomburgk aufgeführt ist, war mir damals, wie auch bei der Ausarbeitung meiner Abhandlungen „Ueber *Sapindus*" etc. und „Ueber *Cupania*" etc. unbekannt. Erst nach Veröffentlichung meiner Abhandlung über *Cupania* wurde ich darauf (im September 1879) aufmerksam. Wäre das schon früher der Fall gewesen, so würde ich diese Namen, soweit sie bei den von Klotzsch untersuchten Materialien Richard Schomburgk's im Berliner Herbare niedergelegt sind, an den betreffenden Stellen erwähnt und bei Benennung neuer Arten, wie De Candolle in seinen Nomenclaturregeln empfiehlt, berücksichtiget haben, obgleich denselben als blossen Namen, bei deren Veröffentlichung das unter ihnen zu Verstehende durch nichts characterisirt wurde, keinerlei Geltung und keinerlei Anspruch auf Priorität zugeschrieben werden kann. Jetzt ist eine derartige Berücksichtigung nur mehr in einem Falle, für

eine an ihrem Platze, in der Monographie von *Paullinia*, alsbald näher zu betrachtende, aus „*Schmidelia? conduplicata Klotzsch*“ hervorgehende *Paullinia conduplicata m.* möglich.

Was die übrigen Fälle, in denen eine solche Berücksichtigung hätte stattfinden können, betrifft, so mag es als fraglich erscheinen, ob es jetzt, nachdem die inzwischen gegebenen Namen Giltigkeit erlangt haben, noch angemessen sei, auf die von Klotzsch herrührenden Namen zurückzukommen, und ob es nicht zweckmässiger wäre, alle diese Namen in dem bisherigen Dunkel zu belassen. Da aber wenigstens in den Fällen, in welchen ältere Namen, wie *Paullinia bipinnata Poir.* von Klotzsch (unter Veröffentlichung durch Schomburgk) unrichtig angewendet worden sind, ein Eingehen auf die Auffassungen von Klotzsch kaum vermieden werden kann, um einer unrichtigen Anschauung über die Verbreitung solcher Arten entgegen zu wirken, und da einige dieser Namen, wie ich gefunden habe, auch in andere Herbarien übergegangen sind, wie z. B. in das Henschel'sche und damit in das zu Leiden, so dass eine Aufklärung darüber für Manchen erwünscht sein wird, so mag hier, um die von Schomburgk in den vier nach Regionen zusammengestellten Pflanzenlisten seines Reisewerkes unter den Sapindaceen aufgeführten Namen gleichartig zu behandeln, eine Verzeichnung und Interpretation aller gegeben sein, soweit sie nicht etwa unter nicht mehr zu den Sapindaceen gerechneten Gattungen aufgeführt sind, wie *Ophiocaryon paradoxum Schomb.* Die nicht in Schomburgk's Florenlisten enthaltenen Namen von Klotzsch lasse ich, wie früher, unerwähnt.

Dabei ist zu bemerken, dass die zwei ersten Listen Schomburgk's, einerseits die Region der Küste, andererseits die Region des Urwaldes umfassend, grossentheils nur nach den Angaben anderer Autoren, von welchen Schomburgk selbst in der Einleitung Aublet, Rudge, G. Meyer und Miquel nennt, zusammengestellt sind (s. das Nähere in den Anmerkungen zu diesen Listen), und dass eigentliche Belegstücke dafür, wenigstens was die Sapindaceen betrifft, unter den von Rob. und Rich. Schomburgk gesammelten Pflanzen gar nicht zu suchen sind. In der dritten Liste über die Pflanzen aus der Region der Sandsteinformation sind Sapindaceen überhaupt nicht enthalten. In der vierten Liste endlich, welche sich auf die Region der Savanne bezieht, kommen allein die erwähnten Namen von Klotzsch vor.

Das folgende Verzeichniss A nun enthält in einer ersten Rubrik die von Schomburgk aufgeführten Namen in dessen Reihenfolge; in einer zweiten Rubrik aber die durch „=“ mit ihnen verbundenen jetzt giltigen oder anzunehmenden Namen der betreffenden Pflanzen — welche Namen, soweit sie von mir selbst herrühren, grösstentheils in den eingangs erwähnten Schriften über *Serjania* (1875), *Sapindus* (1878) und *Cupania* (1879) bereits veröffentlicht sind — unter Anführung der betreffenden Belegstücke, d. h. der im Berliner Herbare mit den Etiquetten von Klotzsch versehenen Robert und Richard Schomburgk'schen Collectionsnummern, und zwar in fetten, letztere zugleich in liegenden Ziffern. Nur in einem Falle

bildet das betreffende Belegstück für den von Klotzsch gegebenen Namen („*Cupania dentata*“) eine Pflanze der Sammlung von Hostmann aus Surinam. Weiter füge ich diesen Belegnummern auch die übrigen auf die gleiche Art sich beziehenden Nummern der Robert und Richard Schomburgk'schen Sammlungen bei, die ersteren — mit so viel Sicherheit als die mangelhaften Angaben in den Herbarien gestatten — durch gewöhnlichen, die letzteren wieder durch liegenden Druck gekennzeichnet.

Endlich lasse ich unter B eine nach Nummern und eine nach Gattungen und Arten geordnete Aufzählung der in den Sammlungen von Robert und Richard Schomburgk enthaltenen Sapindaceen aus Guiana folgen, unter Beisetzung der Namen von Klotzsch und unter Hervorhebung der gleichen Beziehungen wie im Obigen durch den verschiedenen Druck der Ziffern.

A. Verzeichniss der in dem Reisewerke von Rich. Schomburgk als Arten von Sapindaceen-Gattungen aufgeführten Pflanzen.

I. Region der Küste. Schomburgk Reisen etc. III, 1848, p. 790 etc.[1])

p. 847:

Paullinia Cururu L.	=	Paullinia Curura L.
— barbadensis Jacq.	=	— barbadensis Jacq.
Sapindus Saponaria L.	=	Sapindus Saponaria L.
Melicocca bijuga L.	=	Melicocca bijuga L
Dodonaea viscosa L.	=	Dodonaea viscosa L.

1) Diese Liste scheint mit Rücksicht darauf, dass ein gewisser Zusammenhang der Küstenflora Guiana's mit der Flora der nächst gelegenen Antillen, wie Barbados, erwartet werden kann, lediglich nach Maycock Flora barbadensis (1830) zusammengestellt zu sein. Sie enthält genau die Sapindaceen, welche Maycock (mit Recht oder Unrecht) anführt, nebst den von ihm beigefügten Vulgärnamen. Nur *Cardiospermum Halicacabum* L. ist weggelassen. Die von Schomburgk beigefügten Angaben über das Vorkommen der Pflanzen scheinen nicht auf Beobachtung zu beruhen, sondern scheinen nur Möglichkeiten andeuten zu sollen. Für die Arten von *Paullinia* und *Dodonaea* findet sich die übereinstimmende Angabe „in aufgegebenen (verwilderten) Plantagen“ und für *Sapindus* und *Melicocca* „in Gärten cultivirt (eingeführt).“ So ist es erklärlich, dass die bisher nur aus den Antillen bekannte und selbst dort nur ein beschränktes Vorkommen (auf Jamaica) zeigende *Paullinia barbadensis Jacq.*, die schon bei Maycock nur auf ihren Namen hin aufgeführt erscheint, von Schomburgk hier genannt wird. Es ist demnach nicht nothwendig, hinter dieser Angabe irgend eine materielle Grundlage, eine unrichtig bestimmte andere *Paullinia*-Art etwa, wie z. B. die *Paullinia fuscescens Kunth*, zu suchen. Dass in dieser Liste vielfach „den Antillen eigenthümliche Pflanzen aufgenommen sind“, hat Schomburgk am Schlusse der Einleitung, p. 801, selbst ausgesprochen, zugleich aber zu verstehen gegeben, dass es sich dabei um „eingeführte Pflanzen“ handelt, welche „einem grossen Theile nach“ jetzt wirkliches Bürgerrecht in der Flora Guiana's erlangt zu haben scheinen. Dass dabei auch solche berücksichtiget sind, von welchen es, wie von *Paull. barbadensis*, nur denkbar ist, dass sie sich eingebürgert haben könnten, hätte, um diese Liste nicht als mehr erscheinen zu lassen, als sie ist, nicht verschwiegen werden sollen.

II. Region des Urwaldes. Schomb. l. c. p. 861 etc.[1])

p. 1004:

Cardiospermum Halicacabum L.	=	Cardiospermum Halicacabum L.
— Corindum L.	=	— Corindum L.
— acuminatum Miq.	=	— Halicacabum L., var. microcarpum Bl.
Serjania paucidentata DC.	=	Serjania paucidentata DC.
— sinuata Schum., c. syn. „Paull. Seriana L."	=	Serjania sinuata Schum.[2])
Toulicia guianensis Aubl.	=	Toulicia guianensis Aubl.
Paullinia difersiflora Miq., c. syn. „Paull. nitida Steud." et „Paull. Hostmanni Steud."	=	Paullinia pinnata L. emend.

---

1) Von den in dieser zweiten Liste aufgeführten Pflanzen sind die erste, zweite und fünfte augenscheinlich nach Aublet, unter Rücksichtnahme auf die Synonymie bei De Candolle, was auch für die vorletzte gilt, die übrigen nach den bei den Pflanzen selbst (in der ersten Rubrik) genannten Autoren aufgeführt.

Die Angaben über das Vorkommen sind ähnlich wie in der ersten Liste übereinstimmend und allgemein gehalten, so dass sie eine Gewähr für eine Beobachtung der betreffenden Pflanzen in Britisch Guiana nicht darbieten. Es heisst entweder „über die ganze Region verbreitet", oder „an den Ufern der Flüsse", oder „am Essequibo", das Letztere z. B. auch bei *Serjania paucidentata* DC., welche zwar dreimal in den Schomburgk'schen Sammlungen vorhanden ist, aber niemals vom Essequibo, sondern mit den Standortsangaben R. Quitoro: n. 577, Roraima: n. 992, Demerara: n. 1710 (s. unter IV: *Urvillea Schomburgkii Klotzsch*), alle drei Nummern erst von Bentham richtig bestimmt (in Hook. Journ. Bot. & Kew Gard. Misc. III, 1851, p. 193).

Warum bei solcher Art der Zusammenstellung dieser Liste manche Arten der darin als Gewährsmänner erscheinenden Autoren übergangen sind, ist mir nicht erfindlich. So werden, ohne etwa in der ersten oder letzten Liste dafür genannt zu sein, vermisst: Aus G. Meyer Fl. Essequeb. die *Paullinia pinnata L.*, von welcher Schomburgk die Identität mit *Paull. diversiflora Miq.* nicht bekannt war, so wenig wie die der *Serj. paucidentata DC.* und *Paull. protracta Steudel*, welche beide angeführt sind; aus Aublet abermals *Paull. pinnata L.*, *Paull. tetragona Aubl.*, *Enourea capreolata Aubl.*, i. e. *Paull. capreolata Radlk.*, *Sapindus arborescens Aubl.* i. e. *Matayba arborescens Radlk.* und *Racaria sylvatica Aubl.* i. e. *Talisia sylvatica Radlk.*; endlich die, abgesehen von den ursprünglichen Quellen, schon in De Candolle Prodr. zusammengetragenen *Paullinia sphaerocarpa Rich. ed. Juss.*, einschliesslich dessen *Paull. cupaniaefolia, P. connarifolia* i. e. *P. capreolata Radlk., fibulata, rufescens, ingaefolia id., Schmidelia? macrophylla DC. (Ornitrophe m. Poir.)* i. e. *Paull. Cambessedesii Tr. et Pl., Cupania geminata Poir. = Cup. diphylla Vahl, Cupania? nitida DC.* i. e. *Paull. tricornis Radlk.*, welchen noch *Cupania scrobiculata* und *laevigata L. C. Rich.* (Act. Soc. Hist. nat. Paris. I, 1792, p. 109) beizufügen gewesen wären, die letztere theils aus *Matayba arborescens Radlk.*, theils aus *Matayba guianensis Aubl. em.* bestehend.

2) Dass die *Serjania sinuata Schum.* (*Paull. Seriana L.* part.), obwohl ein Exemplar derselben mit der Bezeichnung „Aublet, Guiana" im Hb. Banks vorhanden ist, welches als Belegstück für „*Paull. Seriana L.*" in Aublet Pl. Guian. I (1775) p. 354 n. 1 gelten kann, wahrscheinlich doch nur auf S. Domingo und selbst dort nicht häufig vorkommt, habe ich schon in der Monographie v. Serj. p. 178, Zusatz 7, erörtert. Das erwähnte Exemplar ist von Aublet wohl selbst auch auf S. Domingo gesammelt und erst später als aus Guiana stammend betrachtet worden. Eine Standortsbezeichnung fehlt bei Aublet. Schomburgk hat auch hier seine allgemeine Angabe „an den Ufern der Flüsse" beigefügt.

Paullinia protracta Steud.	= Serjania paucidentata DC.
— micropterygia Miq.	= Paullinia fuscescens Kunth.
Sapindus frutescens Aubl.	= Pseudima frutescens Radlk.
— surinamensis Poir.	= Picraena excelsa Lindl. (Simarubac.)[1]
Matayba guianensis Aubl.	= Matayba guianensis Aubl.
— Patrisiana DC.	= Swartzia alata Willd. — DC. Prodr. (Leguminos.)[2]

p. 1005:

Matayba Vouarana DC.	= Vouarana guianensis Aubl.
Cupania reticulata Splitg.	= Cupania scrobiculata L. C. Richard, forma 1. reticulata Radlk.
Talisia glabra DC.	= Talisia guianensis Aubl.
— rosea Vahl, scil. apud DC. in synon. T. guian. (non Aubl.) DC., ex syn. „T. guianens. Aubl.“, potius DC. et „T. mollis G. Don“ potius Kunth ed. Camb.	= — mollis Kunth ed. Camb.
Thouinia polygama G. Meyer	= ?? Simarubacea.[3]

III. Region der Sandsteinformation. Schomb. l. c. p. 1041 etc.

Enthält keine Sapindaceen.

---

1) Sieh darüber: Radlkofer, Ueber *Sapindus* etc., Sitzungsber. d. Münch. Akad., 1878, p. 365.

2) Ich habe schon in meiner Abhandlung über *Sapindus* etc., Sitzungsber. d. Münch. Akad. 1878, p. 312, nach dem, was ich im Hb. De Candolle zu Genf flüchtig hatte eruiren können, die *Matayba Patrisiana* DC. Prodr. als nicht zu den Sapindaceen gehörig bezeichnet, und auf dieser Stelle fusst Sagot, wenn er in seinem Catal. des Pl. de la Guyane franc., Ann. Scienc. nat., VI. Sér., XII (1881) p. 201 sagt: „*Matayba Patrisiana DC.* Prodr. ex Radlkofer e Sapindaceis excludenda. Vidi in herbario Prodromi specimen authenticum, plantam mihi omnino ignotam praebens.“

An einer anderen Stelle, im Anschlusse nämlich an die Wiederherstellung der Gattung *Matayba Aubl.* in meiner Abhandlung über *Cupania* etc., Sitzungsb. d. Münch. Acad. 1879, p. 639 habe ich bezüglich der *Matayba Patrisiana DC.*, die ich hier abermals in Betracht zu ziehen Veranlassung hatte, die Vermuthung ausgesprochen, dass sie „eine Leguminose, und wahrscheinlich eine Swartziee“ sein möchte, und geäussert, dass unter Rücksichtnahme auf anatomische Charactere wohl eine endliche Bereinigung dieser Pflanze werde zu erzielen sein.

Ich freue mich nunmehr, da ich zum drittenmale dieser Pflanze Erwähnung zu thun habe, mittheilen zu können, dass sich meine Vermuthung vollauf bestätiget hat. Herr Casimir De Candolle hat nämlich auf mein briefliches Ansuchen hin die Güte gehabt, die Pflanze mit Rücksicht auf meine Anschauung näherer Prüfung zu unterwerfen. Was er mir als Resultat seiner Untersuchung mitgetheilt hat, ist, „dass die Pflanze sowohl nach ihrer Structur als nach der Gestalt der Blätter identisch ist mit *Swartzia alata* Willd. des Prodromus von DC.“ — wie oben angegeben.

3) Ueber die Deutungen, welche diese Pflanze bisher erfahren hat, vergleiche Radlkofer, Ueber *Sapindus* etc., Sitzungsber. der Münch. Acad. 1878, p. 324, 325.

IV. Region der Savanne. Schomb. l. c. p. 1105 etc.

p. 1179:

Cardiospermum Halicacabum L.	= Cardiospermum Halicacabum L., var. microcarpum Bl.	— Schomb.	n. ***685***; 382.
Urvillea pubescens Klotzsch	= Urvillea ulmacea Kunth, forma 1, genuina Radlk.	— „	n. ***1118***; 639.

p. 1180:

Urvillea Schomburgkii Kl.	= Serjania paucidentata DC	— „	n. ***1710***; 577, 992.
Serjania baramensis Kl.	= Serjania membranacea Splitg.	— „	n. ***1524***; *1524 B.*
— bignonioides Kl.	= — caracasana W., forma 1, nitidula Radlk.	— „	n. ***427***; 4—5, 637.
— micrantha Kl.	= — oblongifolia Radlk.	— „	n. ***49***; 133.
Paullinia bipinnata Poir.	= Paullinia leiocarpa Griseb.	— „	n. ***1296***; 213, 758.
— podocarpa Kl.	= — pinnata L. emend.	— „	n. ***30***; 94.
Schmidelia guianensis Kl.	= Schmidelia velutina Turcz.	— „	n. **741**; 280.
— mollis Kl.	= — occidentalis Sw.	— „	n. ***523***.
— ? conduplicata Kl.	= Paullinia conduplicata Radlk.	— „	n. ***1291***[1])
Cupania velutina Kl.	= Cupania hirsuta Radlk.	— „	n. ***1393***; 877.
— Schomburgkii Kl.	= — —	— „	n. ***62***; 877.
— quercifolia Kl.	= — rubignosa Radlk.	— „	n. ***781***; 616, 730; ***1105***.
— affinis Kl.	= Matayba macrostylis Radlk.	— „	n. **783, 783 bis**; *1573*.
— retusa Kl.	= Cupania scrobiculata L. C. Richard, f. 1, reticulata Radlk.	— „	n. ***163***; 196.
— subsinuata Kl.	= — rubiginosa Radlk.	— „	n. ***1105***: 616, 730; ***781***.

p. 1181:

Cupania dentata Kl.	= — scrobiculata L. C. Richard, f. 2, guianensis Radlk.	— Hostmann	n. 295.
Lasianthemum unijugum Kl.	= Talisia squarrosa Radlk.	— Schomb.	n. ***1351***; 738.
— bijugum Kl.	= Matayba inelegans Radlk. ? [2])	— „	n. 381 ?
Lamprospermum Schomburgkii Kl.	= Matayba camptoneura Radlk.	— „	n. ***348***; 332, 411.
— guianense Kl.	= — macrostylis Radlk.	— „	n. **783, 783 bis**; *1573*.
Koernickea guianensis Kl.	= Paullinia anisoptera Turcz.	— „	n. **781**.
Monopteris guianensis Kl.	= Matayba arborescens Radlk.	— „	n. ***1499***; 622, 814, 953.

---

1) Zur Characterisirung dieser neuen Art mag in Kürze folgendes dienen:
Paullinia conduplicata sp. n., maxime affinis *Paulliniae sphaerocarpae Rich. ed. Juss.*, sed rhachi foliorum nuda; foliola conduplicata, falcato-recurvata, coriacea, laxe venosa; thyrsi robusti (fructus ignotus).

2) Von *Lasianthemum bijugum Klotzsch* ist mir das betreffende Original mit der Etiquette von Klotzsch aus dem Berliner Herbare bis jetzt nicht bekannt geworden und wahrscheinlich überhaupt nicht zugekommen. Ich kann desshalb nur vermuthungsweise eine Deutung desselben versuchen. Man möchte im Anschlusse an *Lasianthemum unijugum Kl.* zunächst ebenfalls eine *Talisia* darunter erwarten. Es ist aber aus Britisch-Guiana und zumal unter den Pflanzen von Schomburgk eine darauf beziehbare Art von *Talisia* nicht vorhanden. Dagegen ist es nicht unwahrscheinlich, dass Klotzsch die *Matayba inelegans*, welche mir in Blüthenexemplaren von Rob. Schomburgk unter der oben angegebenen Nummer 381 aus dem Herb. Delessert vor-

B. Verzeichniss der in Britisch-Guiana von Robert Schomburgk, 1835—39 und 1840—44, sowie von Richard Schomburgk, 1840—44, gesammelten Sapindaceen.

(NB. Die von Rich. Schomb. herrührenden Nummern sind cursiv und die in directer Beziehung zu den Namen von Klotzsch stehenden fett gedruckt, wie schon oben, p. 97 angegeben.)

a) Nach Nummern geordnet: [1]

4—5. Serjania caracasana W., f. 1, nitidula R.; cf. ***427***; 637.
30. Paullinia pinnata L. emend. (P. podocarpa Kl.); cf. 94.
49. Serjania oblongifolia R. (S. micrantha Kl.); cf. 133.
62. Cupania hirsuta R. (C. Schomburgkii Kl.); cf. 877; ***1393***.
94. Paullinia pinnata L. emend.; cf. 30.
133. Serjania oblongifolia R.; cf. ***49***.
163. Cupania scrobiculata L. C. Rich., f. 1, reticulata R. (C. retusa Kl.); cf. 196.
196. Cupania scrobiculata L. C. Rich., f. 1, reticulata R.; cf. ***163***.
213. Paullinia leiocarpa Griseb.; cf. 758; ***1296***.
280. Schmidelia velutina Turcz.; cf. **741**.
332. Matayba camptoneura R. (Lamprospermum Schomburgkii Kl.); cf. 348, 411.
348. Matayba camptoneura R.; cf. 332, 411.
381. Matayba inelegans R. (Lasianthemum bijugum Kl. ?).
382. Cardiospermum Halicacabum L., var. microcarpum Bl.; cf. ***685***.
411. Matayba camptoneura R.; cf. 332; ***348***.
427. Serjania caracasana W., f. 1, nitidula R.; (Serj. bignonioides Kl.); cf. 4—5, 637.
523. Schmidelia occidentalis Sw. (Sch. mollis Kl.).
577. Serjania paucidentata DC.; cf. 992; ***1710***.
616. Cupania rubiginosa R ; cf. 730; ***781***, ***1105***.
622. Matayba arborescens R.; cf. 814, 953; ***1499***.
637. Serjania caracasana W., f. 1, nitidula R.; cf. 4—5; ***427***.
639. Urvillea ulmacea K., f. 1, genuina R.; cf. ***1118***.
685. Cardiospermum Halicacabum L., var. microcarpum Bl.; cf. 382.
687 apud Walpers, sphalmate, = 637.
730. Cupania rubiginosa R.; cf. 616; ***781***, ***1105***.
738. Talisia squarrosa R.; cf. ***1351***.
741. Schmidelia velutina Turcz. (Sch. guianensis Kl.); cf. 280.
758. Paullinia leiocarpa Griseb.; cf. 213; ***1296***.
781. Paullinia anisoptera Turcz. (Koernickea guianensis Kl.).
781. Cupania rubiginosa R. (C. quercifolia Kl.); cf. 616, 730; ***1105***.

---

liegt, wegen der stark behaarten, mit dem Gattungsnamen von Klotzsch in Einklang stehenden Blumenblätter, und da ihre dicklichen Blättchen sie dem *Lasianthemum unijugum*, d. i. *Talisia squarrosa*, auch im Habitus nicht unähnlich erscheinen lassen, als zu der gleichen Gattung gehörig betrachtet und ihrer zweijochigen Blätter halber als *Lasianthemum bijugum* jener *Talisia squarrosa* an die Seite gestellt habe. Sie mag im Berliner Herbare an eine unrichtige Stelle gelangt und desshalb mir nicht zugekommen sein. Wenn das nicht zutreffen sollte, möchte wohl an eine Pflanze aus anderer Familie zu denken sein.

1) Ob nicht einzelne Nummern noch nachzutragen sein werden, bleibt dahingestellt.

783. Matayba macrostylis R. (Cupania affinis Kl.); cf. **783 bis**; *1573*.
783 bis. Matayba macrostylis R. (Lamprospermum guianense Kl.); cf. **783**; *1573*.
814. Matayba arborescens R.; cf. 622, 953; ***1499***.
877. Cupania hirsuta R.; cf. ***62***, ***1393***.
953. Matayba arborescens R.; cf. 622, 814; ***1499***.
986. Porocystis toulicioides R.
992. Serjania paucidentata DC.; cf. 577; ***1710***.
1105. Cupania rubiginosa R. (C. subsinuata Kl.); cf. 616, 730; ***781***.
1118. Urvillea ulmacea K., f. 1, genuina R. (U. pubescens Kl.); cf. 639.
1291. Paullinia conduplicata R. (Schmidelia? conduplicata Kl.).
1296. Paullinia leiocarpa Griseb. (P. bipinnata, non Poir., Kl. ed. Schomb.); cf. 213, 758.
1351. Talisia squarrosa R. (Lasianthemum 1-jugum Kl.); cf. 738.
1393. Cupania hirsuta R. (C. velutina Kl.); cf. ***62***; 877.
1499. Matayba arborescens R. (Monopteris guianensis Kl.); cf. 622, 814, 953.
1524. Serjania membranacea Splitg. (S. baramensis Kl.); cf. *1524 B*.
1524, B. Serjania membranacea Splitg.; cf. ***1524***.
1573. Matayba macrostylis R.; cf. **783**, **783 bis**.
1710. Serjania paucidentata DC. (Urvillea Schomburgkii Kl.); cf. 577, 992.

b) Nach Gattungen und Arten geordnet:

Serjania caracasana W., f. 1, nitidula R. (S. bignonioides Kl.) 4—5; ***427***; 637.
— membranacea Splitg. (S. baramensis Kl.) ***1524***; *1524 B*.
— oblongifolia R. (S. micrantha Kl.) ***49***; 133.
— paucidentata DC. (Urvillea Schomburgkii Kl.) 577, 992; ***1710***.
Paullinia pinnata L. (P. podocarpa Kl.) ***30***; 94.
— leiocarpa Griseb. (P. bipinnata, non Poir., Kl.) 213, 758; ***1296***.
— conduplicata R. (Schmidelia? conduplicata Kl.) ***1291***.
— anisoptera Turcz. (Koernickea guianensis Kl.) **781**.
Urvillea ulmacea K., f. 1, genuina R. (U. pubescens Kl.) 639; ***1118***.
Cardiospermum Halicacabum L., var. microcarpa Bl. 382; ***685***.
Schmidelia velutina Turcz. (Sch. guianensis Kl.) 280; **741**.
— occidentalis Sw. (Sch. mollis Kl.) ***523***.
Porocystis toulicioides R. 986.
Talisia squarrosa R. (Lasianthemum 1-jugum Kl.) 738; ***1351***.
Cupania scrobiculata L. C. Rich., f. 1, reticulata R. (C. retusa Kl.) ***163***; 196.
— hirsuta R. (C. Schomburgkii Kl.) ***62***; 877; (C. velutina Kl.) ***1393***.
— rubiginosa R. (C. quercifolia Kl.) 616, 730; ***781***; (C. subsinuata Kl.) ***1105***.
Matayba macrostylis R. (Cupania affinis Kl.) **783**; (Lamprospermum guianense Kl.) **783 bis**; *1573*.
— arborescens R. (Monopteris guianensis Kl.) 622, 814; *953*; ***1499***.
— inelegans R. (Lasianthemum 2-jugum Kl.?) 381.
— camptoneura R. (Lamprospermum Schomburgkii Kl.) 332; ***348***; 411.

48. Serjania grandiflora Camb. (43, p. 151.)

Als auszuschliessende Litteraturstelle ist beizufügen:

Non Serjania grandiflora Grieseb. Symb. ad Flor. argentin. in Abh. d. Götting. Ges. d. W. XVII (1879), p. 79 n. 450, coll. Lorentz et Hieron.!; cfr. Serj. caracasana W.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Mosén n. 369! (Brasil. prov. S. Paulo, inter Campinas et Mogi-Mirim, m. Aug. 1873, flor. et fruct. immat.); Glaziou n. 12507! (Rio de Jan.; Hb. Eichl.).

49. Serjania crenata Griseb. (44, p. 152.)

Der Litteratur ist beizufügen:

Serjania lupulina, non Schum. nec Griseb., Sauvalle et Wright Flor. Cubana (1873) p. 24 n. 422, partim, solummodo nempe quoad syn. „S. crenata Griseb." (Cat. Pl. Cub. p. 44) i. e. coll. Wright 1856—57 n. 108 a, excl. coll. Wright n. 2160 a Griseb. l. c. ex errore adjecto, in Addendis vero ibid. p. 288 deleto; cfr. S. crassinervis et S. subdentata, f. 4, nec non obs. A.

Zusatz A. Die eben erwähnte Stelle bei Sauvalle und Wright lautet: „n. 422. Serjania lupulina Schum. S. crenata Griseb. Var. angustifolia. — Bejuco de corrales." An anderer Stelle und als selbständige Art wird *S. crenata* nicht mehr aufgeführt. Daraus und aus der Vergleichung mit Grisebach Cat. Pl. Cub. ergibt sich, dass die genannten Autoren zur Einstellung der *Serj. crenata* als Synonym bei *S. lupulina* nur durch einseitige Rücksichtnahme auf die von Grisebach angeführten Collectionsnummern gekommen sind, unter Vernachlässigung oder nur theilweiser Berücksichtigung der Addenda von Grisebach, wodurch sie die von Grisebach selbst schon angestellte Verwirrung noch erhöht haben.

Grisebach hat nämlich selbst schon unter dem Namen *S. lupulina Schum.* dreierlei Pflanzen aus den Sammlungen von Wright zusammengeworfen, wie folgt: Auf p. 44 des Cat. Pl. Cub. die Nummer 2160 als *var. angustifolia* — d. i. zum Theile *Serj. crassinervis* Radlk. und zum Theile, wie unter *Serj. crassinervis* zu erörtern, die *Serj. subdentata forma 4* — und die Nummer 2164 als *var.? parvula* — d. i. die *Serj. diversifolia Radlk.* (*Serj. lupulina Schum.*) *var. parvula*; in den Addendis ferner p. 287 die Nummer 2161 — d. i. abermals die *Serj. crassinervis Radlk.* — und die Nummer 108 a coll. 1859—60 — d. i. die *Serj. subdentata Juss. ed. Poir.* Zu *Serj. crenata* weiter führt Grisebach p. 44 die Nummer 108 a an, mit dem Beisatze „coll. 1856—57" in den Addendis — d. i. die eigentliche von Grisebach neu aufgestellte *Serj. crenata* — und n. 2160, welche schon vorhin gedeutete Nummer in den Addendis gestrichen wird.

Diesen letzteren Umstand nun scheinen Sauvalle und Wright übersehen zu haben, gleichwie auch die Präcisirung der daneben stehenden Nummer 108 a durch den Beisatz „coll. 1856—57". So musste ihnen dann freilich der ganze Inhalt der *Serj. crenata* nur als eine Wiederholung des schon unter *Serj. lupulina* von Grisebach Aufgeführten erscheinen, was sie durch die Uebertragung der *Serj. crenata* in die Synonymie von *Serj. lupulina* ausdrückten. Umgekehrt ist nun ihre *Serj. lupulina*, soweit die ächte *Serj. crenata* einen Theil derselben bildet, als Synonym zu dieser zu beziehen, wie oben geschehen.

Zusatz B. Nicht unterlassen will ich, hervorzuheben, dass die schon früher (Monographie p. 153, Zusatz 1) erörterte Frage über die Zugehörigkeit der *Serj. crenata* zu *Serj. caracasana W.* gerade durch die Materialien, welche ich in dem Herb. Grisebach von ihr kennen gelernt habe, sehr an Gewicht für mich gewonnen hat.

51. Serjania Laruotteana Camb. (46, p. 154.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Regnell III, 346! partim (partim Serj. multiflora Camb.; Brasil. prov. Minas Geraës, Caldas, m. Jun. 1869, fruct. submat.), III, 1751! (ibid. m. Apr. et Maj. 1870 flor., m. Jul. fruct.), III, 1752! (ibid. ad rivulum Gerivas, m. Sept., fruct. plurimi decisi); Mosén n. 1814! 1816! 1955! (ibid. Caldas, „in dumeto campi sicci aprici", „ad Capivari in adscensu montis Serra dos Cabrilos", „in ripa rivuli campestris scandens", m. Apr. et Maj. 1874 flor., m. Jul. fruct. juvenil.), n. 2423! 3834! (Bras. prov. S. Paulo, Campinas „in fruticetis", „in margine sylvae" m. Jun., Aug. 1874, fruct.); Glaziou n. 12497! (Rio de Jan.); Fritz Müller n. 325! (Bras. prov. S. Catharina, ao. 1869; Hb. Kew.); Fox n. 57! (Rio Grande, Bras.; Hb. Kew.); Balansa n. 2484! partim (partim Serj. glabrata K., f. 1, genuina Radlk.; Paraguay, „L'Assomption, dans les haies" m. Jun. 1874, fruct. immat.; Herb. Kew., Hb. Boiss.).

52. Serjania pyramidata Radlk. (47, p. 155.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Sodiro! (Andes Quitenses, ad ripam flum. Pilatou pr. S. Vicente, m. Sept. 1874, flor.; Herb. Haynald).

54. Serjania Seemanni Tr. & Pl. (49, p. 157.)

Als Litteraturstelle ist nunmehr noch zu erwähnen:

Serjania Seemanni, Hemsley in Salvin & Godm. Biol. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 27.

Sectio V. Pachycoccus.

55. Serjania reticulata Camb. (50, p. 158.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Forma 1: Mosén n. 1168! 3836! 3952! (Bras. prov. S. Paulo, „Mogi-Mirim in nemore" m. Mart. 1874, flor.; „Campinas in margine sylvae caeduae" m. Jun. et Jul. 1875, fruct.). — Forma 2: Mosén n. 1810! 1811! 1812! 1813! (Bras. prov. Minas Geraës, Caldas, „in fruticetis, in margine sylvae" m. April. 1874 flor., m. Maj. fruct. junior.). — Quoad formam indeterminata: Pearce! (Coroico, Bolivia, alt. 3—6000 ped., m. Mart. 1866, flor.; Hb. Kew.).

Zusatz. Die Rippung der Zweige spiegelt sich auch in dem Umrisse des Holzkörpers wieder, und zwar bei älteren Zweigen in stärkerem Maasse als bei jungen. Die vorspringenden Theile scheinen im Dickenwachsthum mehr und mehr begünstiget zu werden.

56. Serjania marginata Casar. (51, p. 159.)

Als Litteraturstellen sind beizufügen:

Paullinia pinnata, non L., Lorentz et Hieronymus Flora Argentina (exsicc., 1873), sine no. (n. 1002 in Hb. Griseb.), Lules prov. Tucuman, m. Jan. 1873!

— — non L., Griseb. Symbol. ad Flor. argentin. (1879) p. 80 n. 453; coll. Lor. et Hieron.!, cf. loc. anteced.

(?) — — non L., Hieronymus Pl. diaphoricae Florae Argentinae (1882) p. 67; prov. Tucuman! Salta etc.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Forma 1: Lorentz et Hieronymus! (Argentin. prov. Tucuman, pr. Lules, m. Jan. 1873, flor., foliis partim depauperatis; Hb. Boiss. sine no., Hb. Griseb. „n. 1002" sub nomine „Paull. pinnat."); Balansa n. 2478! („Sommet du Cerro San Thomas, près de Paraguari", Paraguay, m. Apr. 1875, flor., foliis partim depauperatis; Hb. DC.; deest in Hb. Griseb.; Pearce! (Bolivia?, in apice montis supra Poquicha, alt. 6—7000 ped., m. Jun. 1865, flor. et fruct., foliis depauperatis; Herb. Kew.).

Zusatz. Die unrichtige Deutung, welche Grisebach den eben erwähnten, mit Blüthen versehenen Materialien der *S. marginata* an der citirten Stelle gegeben hat, wird jeder leicht vermeiden, der die dabei in Mitleidenschaft gezogene Pflanze, *Paullinia pinnata*, je des näheren in's Auge gefasst hat.

Doppelt gedreite Blätter, wie sie der *Serj. marginata* normal zukommen und wie sie (neben verarmten) auch an den hier in Rede stehenden Exemplaren von Lorentz & Hieron. normal (und nicht, wie Grisebach meinte, als Monstrosität) ausgebildet sich finden, sind meines Wissens bei *Paullinia pinnata* überhaupt niemals beobachtet worden, und das (wie bei *Serj. reticulata*) quer laufende Venennetz zeichnet, um von Anderem zu schweigen, die Blättchen der *Serj. marginata* so deutlich vor denen der *Paull. pinnata* aus, dass sie auch vereinzelt nicht damit zu verwechseln sind.

Die *Paull. pinnata* ist in der Sammlung von Lorentz und Hieronymus, soweit ich diese kennen gelernt habe, überhaupt nicht enthalten, und ebenso wenig ist sie mir in anderen Sammlungen aus Argentinien begegnet. Demgemäss ist es wahrscheinlich, dass auch bei Hieronymus an der angeführten Stelle der Pl. diaphoric. unter „*Paull. pinnata*" die *Serj. marginata* zu verstehen ist, wenigstens, was die Pflanze aus „Tucuman" betrifft, während bezüglich der aus „Salta etc." bestimmtere Anhaltspunkte zur Beurtheilung fehlen. Das was Hieronymus über die Eigenschaften der *Paull. pinnata* (nach Martius) anführt, bezieht sich übrigens allerdings auf *Paull. pinnata*.

Ein Vorkommen der *Paull. pinnata* in Argentinien gehört trotzdem nicht zu den Unwahrscheinlichkeiten, da die Art zu den weitest verbreiteten zählt und in dem benachbarten Paraguay wiederholt gesammelt worden ist. So auch von Balansa, dessen dahin gehörige Nummer 2479 (Villa-Occidental, m. Maj. 1874, fruct.) auch in dem Herb. Grisebach sich findet. Grisebach hat dieselbe übrigens in den Symbol. nicht, wie die übrigen Pflanzen von Balansa erwähnt, offenbar weil er über ihre

Bestimmung nicht im Klaren war. Es geht das daraus hervor, dass er sie in seinem Herbare ohne Speciesbezeichnung an das Ende der Gattung verbracht hat. Die Blättchen dieser Exemplare sind von etwas abweichender Gestalt, schmäler und dabei tiefer gezähnt als sonst bei *Paull. pinnata.* Ebenso bei Balansa n. 2479, a (Paraguari, ao. 1877, sine flor. et fruct.) im Herb. De Candolle. Etwas Aehnliches wird weiter unten bei *Serj. perulacea* hervorzuheben sein.

57. Serjania erecta Radlk. (52, p. 161.)

Den Litteraturstellen ist nach dem Vorhergehenden beizufügen:

Serjania erecta Griseb. Symb. Flor. argentin. (1879) p. 80 n. 452; coll. Lor. et Hieron. n. 517!

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Lorentz et Hieronymus n. 517! (Argentin. prov. Salta, in fruticetis prope S. José, m. Febr. 1873, flor. et fruct. junior.; Hb. Griseb.); Mosén n. 1167! (Bras. prov. S. Paulo, Mogi-Mirim in campo sicco aprico, m. Mart. 1874, flor.), 4034! (ibid. prope oppidum S. João de boa virtu in Campo Triste, m. Dec. 1875, flor.); Colley-Parodi! (Rio Paraná ad 26—27° Lat. merid., ad confines inter Entrerios et Paraguay, ao. 1883; Hb. Kew.).

Zusatz. Die Pflanze von Lorentz und Hieronymus ist, wie schon Grisebach a. a. O. hervorgehoben hat, etwas abweichend durch eine stärkere Behaarung der Zweige, wie auch der unteren Blattfläche. Weiter findet sich hier der in Zusatz 5 der Monographie bereits erwähnte Uebergang zu höherer Zusammensetzung des Blattes noch mehr ausgebildet. Einzelne Blätter nämlich zeigen statt der unteren Seitenblättchen fast vollständig ausgebildete Triaden von Blättchen. Unter diesen ist dafür die Flügelung des zugleich verkürzten Blattstieles nahezu auf Null reducirt.

Sectio VI. Holcococcus.

59. Serjania membranacea Splitg. (54, p. 164.)

Der Litteratur ist beizufügen:

Serjania baramensis Klotzsch ed. Schomb. in Reisen in Brit. Guiana III (1848) p. 1180 (coll. Schomb. n. 1524!, cf. supra p. 53 et Monogr. Serj. p. 165.)

?Serjania glabrata, non Kunth, Griseb. in Lechler Pl. peruv. ed. Hohenack. n. 2332!, in scheda; cf. Monogr. Serj. p. 165.

61. Serjania grandifolia Sagot. (56, p. 166.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania grandifolia Sagot Catal. des Pl. de la Guyane franc. in Ann. Scienc. nat., IV. Sér., XII (1882) p. 190!

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Schwacke III, 21! (Brasilia, prope Pará, m. Januar. 1882, flor.; Hb. Gotting.); Glaziou n. 13620! (Brasil., Amazonas? Hb. Eichl.; cf. obs.).

Zusatz. Bei den in neuerer Zeit mitgetheilten Pflanzen Glaziou's ist im Herb. Warming gelegentlich das Amazonas-Gebiet als Fundort genannt (so z. B. bei *Serj. lethalis*). Das veranlasst mich, im Zusammenhange damit, dass die *Serj. grandifolia*, die früher nur aus Guiana bekannt war, wohl sicher nur in dem an Guiana stossenden Theile Brasiliens erwartet werden kann, anzunehmen, dass die zu dieser Art gehörige n. 13620 der Glaziou'schen Pflanzen, falls sie überhaupt einer spontan in Brasilien zur Entwicklung gekommenen Pflanze entnommen ist, ebenfalls aus dem Amazonas-Gebiete herrühre und nicht aus Rio de Janeiro (wie die allen Pflanzen von Glaziou im Herb. Eichler hinzugefügte Etiquette besagt). Das betreffende Exemplar hat überdiess eine so grosse individuelle Aehnlichkeit mit den Materialen von Schwacke aus Pará, dass man vermuthen möchte, es sei von dem letztgenannten Sammler an Glaziou mitgetheilt worden.

63. Serjania glabrata Kunth. (58, p. 168.)

Als neue Synonyme sind, wie schon oben p. 52 in den Ergänzungen zur chronologischen Tabelle I, n. 15, zu verzeichnen:

Serjania fulta Griseb. Plant. Lorentzian. (1874) p. 60 n. 169; coll. Lorentz & Hieron.! Cf. infra.
— — Griseb. Symbol. ad Flor. argentin. (1879) p. 79 n. 449; coll. Lorentz & Hieron.!, coll. Balansa n. 2484! Cf. infra.
Paullinia brachystachya Griseb. Plant. Lorentzian. (1874) p. 61 n. 171; coll. Lorentz & Hieron.! Cf. infra.
— — Griseb. Symbol. ad Flor. argentin. (1879) p. 80 n. 455; coll. Lorentz & Hieron.! Cf. infra.

Der ausgeschlossenen Litteratur ist beizufügen:

Non Serjania glabrata Griseb. in Lechler Pl. peruv. ed. Hohenack. n. 2332, in scheda; cfr. Serj. membranacea Splitg.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Forma 1: Mosén n. 1808! (Brasil. prov. Minas Geraës, Caldas, Capivari in nemore campi sicci, m. Maj. 1874, fruct.); Gibert n. 1036! (Paraguay, Assuncion, m. Jan. 1873, flor.; Hb. Kew.); Balansa n. 2484! partim (partim *Serj. Laruotteana* Camb. in Hb. Kew. et Hb. Boiss., non in Hb. Griseb. nec in Hb. DC.; Paraguay „L'Assomption, dans les haies" m. Jun. 1874, fruct.; Hb. Griseb., DC.) — Forma 2: Jameson n. 184! (Ecuador, prope Loxa; Hb. Hook.); Glaziou n. 10417! (Rio de Jan.; Hb. Eichl.); Pearce! (Argentin., „plaines of Tucuman and Salta, El Arenal", m. Jan. 1864, flor.; Hb. Kew.); Lorentz et Hieronymus n. 713! 792! 928! (Argentin. prov. Tucuman, Sierra de Tucuman, pr. Siambon, in fruticetis subtropicis, m. Febr., Mart. 1872—74, flor. et fruct. junior.; Hb. Griseb. sub nom. „*Serj. fulta Griseb.*"), n. 50! (ibid. pr. Rozo al alto in tractu ab urbe Tucuman meridionali, in fruticetis humilibus, m. Dec. 1871, alab.; Hb. Griseb. sub nom. „*Paull. brachystachya Griseb.*").

Zusatz. Grisebach hat sich hier, wie bei *Serj. marginata*, von dem alten, aber ungerechtfertigten Herkommen leiten lassen, nicht fructificirte Materialien von Sapindaceen-Lianen mit höher zusammengesetzten Blättern der Gattung *Paullinia* (lieber als der Gattung *Serjania*) zuzuweisen. Dadurch ist er hier wie dort in die Irre geführt worden.

Sein Irrthum bei der gegenwärtig in Betrachtung stehenden Art ist um so auffallender, als sich die Materialien, auf welche er seine *Paullinia brachyphylla* basirte, an die seiner *Serjania fulta* — da sie ja nicht bloss derselben Art (*Serj. glabrata*) sondern ein und derselben Form dieser Art (forma *mollior*) angehören — in ihrer ganzen Erscheinung und ausserdem in ihrem Entwicklungszustande so innig anschliessen, dass es Grisebach schwer gefallen sein muss, sie davon zu trennen.

Vergleicht man die betreffenden Characteristiken bei Grisebach, so findet man auch in der That, da der Ausdruck „sepala distincta" über die Zahl der von Grisebach gefundenen Kelchblätter im Ungewissen lässt, nichts angeführt, was nicht als blosser Altersunterschied aufzufassen wäre.

Nur ein merklicher Unterschied tritt hervor — in dem Längenmaasse der Blättchen (4—2″ bei *Paull. brachyphylla*, 2—1½″ bei *Serjania fulta*). Aber auch dieser ergibt sich nur, wenn man auf der einen Seite die grössten, auf der anderen die kleineren Blättchen auswählt. In Wirklichkeit finden sich auch bei den als *Serjania fulta* in Grisebach's Herbar bezeichneten Materialien von Lorentz und Hieronymus Blättchen, welche ohne Einrechnung des Stielchens 4 Zoll lang sind.

Auch eine andere Angabe Grisebach's finde ich an dem Materiale seines Herbares nicht bestätiget, die nämlich über das Vorkommen verarmter Blätter bei der sogenannten *Paull. brachyphylla*, wenn man nämlich von verletzten Blättern absieht.

Für die Angaben über die Grössenverhältnisse der reifen Früchte müssen Grisebach noch andere Materialien zu Gebote gestanden haben, als die in seinem Herbare aus der Sammlung von Lorentz und Hieronymus niedergelegten, kaum aber die wohl erst nach 1874 hinzugekommenen (im Hb. Grisebach nicht wie in anderen Herbarien mit *Serj. Lamotteana Camb.* vermengten) Fruchtexemplare von Balansa (n. 2484), welche er erst später, in den Symbolae (1879), erwähnt.

Dass Grisebach nicht wenigstens in dieser späteren Zeit und an diesen Exemplaren (von Balansa), nachdem er (wie die in den Symbolae seiner früheren Beschreibung der sogenannten *Serj. fulta* beigefügten Verbesserungen darthun) den zusammengesetzten Holzkörper der Pflanze auffassen und die durchsichtigen Punkte auffinden gelernt hatte — was aber bei der eine Seite später folgenden *Paullinia brachyphylla* schon wieder vergessen oder verlernt ist — nachdem er ferner die volle Fünfzahl der Kelchblätter, deren er früher (wie Cambessedes und wie bei seiner *Serj. foveata*, s. diese) nur vier gezählt hatte, richtig bestimmt und nachdem er selbst eine Annäherung im Bau der Frucht an den bei der Section *Syncoccus* herausgefunden hatte, auf welche Annäherung ich in der Characteristik der die *Serj. glabrata* in sich schliessenden Section *Holcococcus* durch die Worte „loculi saepius . . . spurie syncocci" wohl deutlich

genug hingewiesen habe, — dass Grisebach nicht wenigstens nunmehr zur richtigen Bestimmung seines Materiales gelangte, könnte wohl Wunder nehmen, wenn nicht eben dieses Material die Erklärung dafür an die Hand gäbe. Eben dieses Material zeigt ja, dass Grisebach, um von der Wiedererkennung einer Pflanze nach ihrer Characteristik zu schweigen, nicht einmal eine von ihm selbst aufgestellte Art, seine *Serj. fulta*, in den damit zur gleichen Form der gleichen Art gehörigen und buchstäblich bis auf's Haar damit übereinstimmenden Materialien seiner doch gleichzeitig ihm vor Augen gewesenen *Paullina brachyphylla* wiederzuerkennen vermochte — ja so wenig dieser Uebereinstimmung sich bewusst wurde, dass er die letzterwähnten Materialien sogar einer anderen Gattung zuwies — aus den Exemplaren ein und derselben Form ein und derselben längst bekannten und ausgezeichneten Art somit zwei neue Arten, und zwar von zweierlei Gattungen bildend.

Bei diesem Sachverhalte ist es auch leicht erklärlich, dass Grisebach, wie er gerade bei *Serj. fulta* in den Symbolae ausspricht, nicht einmal die von mir aufgestellten Sectionen wieder erkannte. Es ist das um so leichter verständlich, wenn man erwägt, dass sein Eingehen auf die Sectionscharacteristiken wohl nur ein sehr mangelhaftes gewesen sein kann, denn sonst hätte ihn allein schon der bereits erwähnte Hinweis auf die gelegentlich unecht synkokken Früchte in dem Sectionscharacter von *Holcococcus* auf die rechte Spur leiten müssen, und hätte ihn der ebenfalls schon im Sectionscharacter, und nur für Arten der Section *Eurycoccus* hervorgehobene, radiär getheilte Holzkörper meiner *Serj. paradoxa* hindern müssen, in seinem Herbare die *Serj. fulta* gerade mit dieser durch die Zweigbeschaffenheit ganz einzig in ihrer Art dastehenden und desshalb bei einiger Aufmerksamkeit mit keiner anderen zu verwechselnden Art zu identificiren, wovon ich hier nicht reden würde, wenn Grisebach nicht mit dem vermeintlichen „Synonyme: *Serj. paradoxa Radlk.*“ versehene Exemplare seiner *Serj. fulta* auch an das Herbarium zu Kew, wie ich daselbst gesehen habe, mitgetheilt hätte. Und was soll man endlich sagen, wenn Grisebach nicht einmal die Section *Ceratococcus*, in deren Namen schon die Characteristik enthalten ist, an der *Serj. cornigera*, in deren Namen sie abermals hervortritt, und von der sein Herbar wohl ausgebildete Früchte enthält, wiederzuerkennen vermochte, wie schon bei dieser Art erwähnt worden ist.

Was die von Grisebach hervorgehobene, aber wohl nur aus der Abbildung von Cambessedes erschlossene habituelle Aehnlichkeit mit *Serjania velutina Camb.* betrifft, so reducirt sich dieselbe bei näherer Betrachtung auf die hier wie dort doppelt gedreiten Blätter, welche aber der weitaus überwiegenden Mehrzahl der Serjanien überhaupt zukommen. Schon die Gestalt der Blättchen zeigt erhebliche Verschiedenheiten, von der Gestalt der Früchte dieser zur Section *Eurycoccus* gehörigen Art nicht zu reden. Was soll man aber überhaupt diesem Vergleiche für einen Werth beimessen, wenn man sieht, dass Grisebach bei den als *Paull. brachyphylla* bezeichneten Exemplaren der gleichen Pflanze (eine Seite weiter) den Habitus überhaupt nicht mehr dem von *Serjania*, vielmehr dem von *Paullinia* ähnlich findet („Habitu magis

ad Paulliniam quam ad Serjaniam accedit"). Und was soll es überhaupt heissen, von einem besonderen *Paullinia*-Habitus gegenüber dem von *Serjania* zu sprechen? Als ob nicht diese beiden Gattungen in vollständigem Parallelismus dieselbe reichgliedrige Formenreihe durchliefen, so dass wohl beiderseitigen Stücken von ihnen (Arten oder Artgruppen) der gleiche — bis zur Ununterscheidbarkeit im nicht fructificirten Zustande sie verähnlichende Habitus, nicht aber der Gattung als solcher ein besonderer Habitus zugeschrieben werden kann, wenn auch in einzelnen Fällen gewisse Merkmale dem mit der Beschaffenheit einer grossen Zahl von Arten Vertrauten eine Andeutung hinsichtlich der Gattungszugehörigkeit zu geben im Stande sind.

Sectio VII. Dictyococcus.

65. Serjania sinuata Schum. (60, p. 171.)

Der Litteratur ist beizufügen:

Serjania sinuata Rich. Schomburgk Reisen in Guiana, III, 1848, p. 1004, c. syn. Paull. Seriana L.; cfr. „Paull. Seriana L. apud Aubl." c. obs. n. 7 in Monogr. Serj. p. 172 et 178, nec non supra p. 98.

Den Synonymen ist beizufügen (s. ob. p. 52):

Serjania apiculata C. Wright (?), Flora Domingensis, collected by C. Wright, C. C. Parry, H. Brummel, Jan.—March 1871, distributed by United States Departement of Agriculture, n. 158! Cf. infra.

Der auszuschliessenden Litteratur ist hinzuzufügen:

Non Paullinia Seriana Burman, N. L., Flor. Ind. (1763) p. 90 quoad stirpem javan. in Herb. N. L. Burman servatam, ad Allophylum fulvinervem Bl. var. Burmannianum referendam et quoad nomen malaicum „Galing Galing" a Doct. Pryon indicatum, ad Cissi speciem referendum teste Blume in Rumphia III (1847) p. 135.

Dem Materialienverzeichnisse ist einzufügen:

Forma 2: Hamilton! („West-India"; Hb. Turczan.); C. Wright(?) in Flora Domingens. n. 108! (Distributa sub nomine „*Serj. apiculata*"; Hb. Kew.; cf. supra).

66. Serjania polyphylla Radlk. (61, p. 179.)

Ueber einige der von Grisebach herrührenden Litteraturstellen kann ich nun auf Grund der Durchsicht seines Herbares die folgenden näheren Aufschlüsse geben.

1. Zu „*Serjania lucida* Griseb. Veget. d. Caraib.", p. 183 meiner Monographie und zu dem darauf bezüglichen Zusatz n. 3 bemerke ich, dass die Duchassaing'sche

Pflanze aus S. Thomas in der That zu *Serj. polyphylla* gehört, wie schon früher angenommen worden war. (Vergl. die Ergänzungen zu der Uebersicht und Deutung der von Grisebach aufgeführten Arten unter *Serj. subdentata.*)

2. Zu „*Serjania lucida* Griseb. Fl. Brit. West. Ind. Isl.", p. 183 der Monographie, ist bezüglich der Wullschlaegel'schen Pflanze aus Jamaica und des dabei angezogenen Zusatzes n. 2 zu *Serj. equestris*, wie schon unter *Serj. diversifolia* in diesem Supplemente geschehen ist, zu bemerken, dass diese mit Recht schon damals in hohem Maasse beanstandete Pflanze zu *Serj. mexicana W.* gehört, wie schon früher vermuthet worden war. (Vergl. die Ergänzungen zu der Uebersicht und Deutung der von Grisebach aufgeführten Arten unter *Serj. subdentata*, sowie die dort weiter angegebenen Stellen.)

3. Zu „*Serj. triternata* Griseb. Cat, pl. Cub. p. 45 n. 7 in obs.", p. 184 meiner Monographie, bemerke ich, dass die „specimina haitiensia" des Herb. Grisebach (von Mackenzie gesammelt) in der That zu *Serj. triternata W.*, d. i. *Serj. polyphylla m.* gehören, wie schon früher angenommen. (Vergl. die Ergänzungen zu der Uebersicht und Deutung der von Grisebach aufgeführten Arten unter *Serj. subdentata.*)

Als neue Litteraturstelle ist (p. 184) beizufügen:

Serjania triternata Bello Apuntes para la Flor. de Puerto-Rico, Anales de la Sociedad Española de Historia Natural, X (1881, Madrid) p. 216 n. 109.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

S. Domingo: Mackenzie! (Hb. Griseb., „Serj. triternata W."; cf. supra); — Porto-Rico: Bello: (Serj. triternata W." l. c.; cf. obs.); P. Sintenis n. 274! (Maricao in sylvis montis „Montoso" m. Nov. 1884, flor.), n. 274, b! (Mayagüez in fruticetis litoralibus ad Guanajibo versus, m. Jan. 1885, fruct. immat.); Garber A. P. n. 124! (Yanco ao. 1880, foliis supradecompositis; Herb. Kew.); — S. Thomas: Duchassaing! („S. lucida Schum." Hb. Griseb.; cf. supra); Eggers n. 192! (ed. Toeppfer ao. 1880; Raphun in fruticetis siccis, m. Nov. 1880, flor.).

Zusatz. Bello setzt a. a. O. dem Namen der Pflanze ein Fragezeichen bei. Dasselbe kann unbeanstandet weggelassen werden, da die *S. polyphylla* (*S. triternata W.*) die einzige bisher aus Porto-Rico bekannt gewordene *Serjania*-Art ist (s. die tabellarische Uebersicht über die Verbreitung der *Serjania*-Arten im später Folgenden und in der Monographie der Gattung, p. 356—57).

Bello beschreibt die Blätter als „folia triternata, petiolulis 2 intermediis adjectis ternatis". Dieselben gehören also zu denjenigen, welche ich (a. a. O. p. 186) unter der Bezeichnung „f. triternato-bipinnata" zusammengefasst habe, und welche auch noch reicher, als Bello angibt, gegliedert sein können. Die gleiche Form, wie Bello, mit 33 Blättchen, habe ich an Pflanzen aus S. Domingo gesehen.

67. Serjania crassinervis Radlk. (62, p. 200.)

Das Herbarium Grisebach enthält unter der Bezeichnung „*Serjania lupulina var. angustifolia*, Wright n. 2160“ ausser der von mir als *Serj. crassinervis* bezeichneten Pflanze noch eine zweite, in andere Herbarien nicht übergegangene, welche dem Blatte nach der *Serj. crassinervis* sehr ähnlich ist, dagegen unverkennbar die Früchte der *Serj. subdentata*, sowie auch die kürzeren Stiele der Blüthen und Wickeln derselben besitzt. Diese Pflanze, welche von Wright ursprünglich unter einer besonderen Nummer, nämlich n. 57, von *Serj. crassinervis*, n. 58, unterschieden und so mit dieser im Jahre 1860 (laut der Etiquetten des Herb. Griseb.) übersendet worden war, ist erst von Grisebach mit Materialien der *Serj. crassinervis*, von welchen ein anderer Theil die Nummer 2161 und die Bezeichnung *Serj. lupulina Schum.* schlechthin (in den Addend. des Cat. pl. Cub.) erhalten hatte, unter n. 2160 als *Serj. lupulina Schum. var. angustifolia* zusammengebracht worden.

Diesem Befunde des Herb. Grisebach gemäss ist nunmehr der unter *Serj. crassinervis* (p. 200) angeführten Litteraturstelle „*Serjania lupulina* (non *Schum.*) *Griseb.* Cat. pl. Cub. ... quoad Wright n. 2161! et quoad *var. angustifoliam Griseb.*, Wright n. 2160!“ etc. bezüglich der letzteren Nummer beizufügen: partim (partim *Serj. subdentata, forma 4, angustifolia Radlk.*, cf. infra).

In dem Materialienverzeichnisse ist der Nummer 2160 der gleiche Zusatz: „partim“ etc. beizufügen.

Als neue Litteraturstelle, zu welcher das über die davon auszuschliessende *Serj. crenata* bei dieser Gesagte (s. ob. p. 103) verglichen werden mag, kommt hinzu:

Serjania lupulina (non Schum.) Sauvalle et Wright Fl. Cubana (1873) p. 24 n. 422 partim, nempe quoad var. angustifoliam Griseb., Wright n. 2160, partim et quoad synon. „Serj. crenata Griseb.“ partim, i. e. quoad sub hoc synonymo auctores illi errore capti intelligunt numerum illum 2160, a Griseb. ex errore in Cat. pl. Cub. cum Wright n. 108a, coll. 1856—57 sub Serj. crenata citatum, in Addendis vero p. 288 deletum, reliquis exclusis; cfr. Serj. subdentata Juss. et Serj. crenata Griseb.

68. Serjania subdentata Juss. ed. Poir. (63, p. 201.)

Der Litteraturstelle (p. 202): *Serjania lupulina* (non *Schum.*) *Griseb.* Cat. pl. Cub. ist nach den Worten „quoad coll. Wright 1859—60 n. 108, a“ gemäss dem unter *Serj. crassinervis* eben Erörterten noch beizufügen: nec non quoad *var. angustifoliam Griseb.*, Wright n. 2160, partim (partim *Serj. crassinervis*, cf. supra).

Als neue Litteraturstellen sind anzuführen:

Serjania paniculata (non Kunth) Sauvalle et Wright Fl. Cubana (1873) p. 24 n. 420, c. nom. vulg. „Bejuco de corrales“ (de quo cf. supra p. 93 obs. ad Serj. diversifol.).

Serjania lupulina (non Schum.) Sauvalle et Wright Fl. Cubana (1873) p. 24 n. 422 partim, nempe quoad pl. Wrightian. supra sub Serj. lupulina Griseb. indicatas et quoad nom. vulg. „Bejuco de corrales“ (cf. loc. anteced.), reliquis exclusis; cfr. S. crassinervis et S. crenata.

Serjania albopunctata Sauvalle et Wright Fl. Cubana (1873) p. 24 n. 424.

Als Vulgärname ist beizufügen:

Hen's foot, teste Robinson (cf. infra).

Den p. 204 unterschiedenen drei Formen ist als vierte dem unter *Serj. crassinervis* Erörterten zufolge noch anzureihen:

Forma 4: angustifolia (*Serj. lupulina*, non *Schum.*, *Griseb.* Cat. pl. Cub., *var. angustifolia Griseb. Herb.*, Wright n. 2160, partim): Foliola anguste lanceolata vel sublinearia, remote et obsolete dentata.

Im Materialienverzeichnisse ist die am Ende aufgeführte, früher nur der Art, nicht auch der Form nach bestimmte Pflanze von Rugel, n. 52, nach den im Herb. Grisebach mir vorliegenden Fragmenten, den Materialien der Forma 1 anzureihen, sowie auch die folgende Pflanze:

Governor Robinson n. 25! („Bahamas, March 1877; colonial name: Hen's foot“; Hb. Kew.), mit welcher der bisher bekannt gewesene Verbreitungsbezirk der Pflanze über Cuba hinausgerückt erscheint; endlich ist als Forma 4 die oben und unter *Serj. crassinervis* als ein Theil von Wright n. 2160 bereits erwähnte Pflanze aus Cuba aufzuführen.

Was schliesslich die in Zusatz 8, p. 207—209 früher gegebene Uebersicht und Deutung der in den verschiedenen Schriften von Grisebach aufgeführten wirklichen oder angeblichen *Serjania*-Arten betrifft, so bin ich nunmehr, dank der directen Einsichtnahme von Grisebach's Herbarium, welche mir Herr Graf Solms-Laubach in anerkennenswerthester Weise ermöglichte, im Stande, die früher gelassenen Lücken und Zweifel vollständig zu beseitigen, abgesehen von einer Pflanze, nämlich der wahrscheinlich zu *Serj. equestris Macf.* gehörigen und mit dieser von Grisebach in der Flora Brit. West Ind. Isl. unrichtiger Weise zu *Serj. paniculata K.* als Synonym gerechneten Art eben dahin gezogenen Pflanze von Wilson aus Jamaica. Ich habe in dem Herb. Grisebach nur eine Pflanze von Wilson aus Jamaica gefunden, und das ist die richtig von demselben a. a. O. unter *Paullinia barbadensis Jacq.* aufgeführte. Die noch weiter in der Flora Brit. West Ind. Isl. aufgeführte *Serj. divaricata Sw.*, d. i. *Serj. mexicana W.* aus Jamaica von Wilson ist im Herb. Hooker vorhanden. Vielleicht ist das auch bezüglich jener angeblichen *Serj. paniculata* der Fall. Mir ist sie dann eben dortselbst entgangen.

Ich stelle die betreffenden Ergänzungen hier entsprechend der Reihenfolge der früheren Lücken zusammen:

Vegetation der Caraiben, Abh. Götting. Gesellsch., 1857, p. 187:

Nro. 253. *Serjania lucida*; S. Thomas, Duchassaing — ist nach dem Herb. Grisebach . . . . . *Serjania polyphylla Radlk.* (*S. lucida Schum.*)

Novitiae Florae panamensis, Bonplandia 1858, p. 3:

Im Zus. *Serjania pubescens Kunth*, coll. Duchassaing — ist (abweichend von der früheren Vermuthung einer Uebereinstimmung mit einem Exemplare der *Paullinia fuscescens Kunth* von Duchassaing im Pariser Museum, wovon in Zus. 1 zu *Serj. mexicana* unter *Serj. samydea* Gr. p. 249 die Rede war) nach dem Herb. Grisebach . *Serjania rhombea Radlk.*

(Es ist diese Pflanze also identisch mit jener anderen im Pariser Museum befindlichen Pflanze von Duchassaing, welche ich unter *Serj. rhombea* p. 325 bereits aufgeführt habe und auf welche ich in den Ergänzungen zu den bezeichneten Stellen der Monographie von *Serjania*, p. 249 und 325, zurückkommen werde.)

Flora Brit. West Ind. Isl. (1859—1864) p. 123:

Nro. 5. *Serjania paniculata Kunth*; Jamaica, Wilson — von mir nicht gesehen und im Herb. Griseb. nicht vorhanden, der Vermuthung nach . . *Serjania equestris Macf.?*

Nro. 6. *Serjania lucida Schum.*; Jamaica, Wullschlaegel — ist sammt dem Beisatze „Manchester“ (einem Orte auf Jamaica nämlich), welcher mir früher auf eine Pflanze anderen Ursprunges hinzudeuten schien, nach dem Inhalte des Herb. Grisebach, worauf ich bei Besprechung des früher citirten Zusatzes n. 2 zu *Serj. equestris*, wie in der Litteratur von *Serj. mexic.* zurückkommen werde, zugehörig zu . . . . . *Serjania mexicana Willd.* (*S. divaricata Schum.*)

Serjania lucida Schum.; Manchester — gehört zu der vorausgehenden Pflanze, d. i. zu . . . *Serjania mexicana Willd.* (*S. divaricata Schum.*)

Nro. 7. *Serjania divaricata Sw.*; Jamaica, Alex. Prior — ist nach dem Herb. Grisebach . . . . . *Serjania mexicana Willd.* (*S. divaricata Schum.*)

Catalogus Plant. Cub., 1866, p. 44 et Addenda p. 287:

Nro. 4. *Serjania lupulina Schum.*; Wright n. 2160, coll. 1860—64 — ist nach dem Herb. Grisebach (s. ob. p. 112) nicht lediglich Serj. crassinervis, sondern theilweise, nämlich Wright mss. n. 57, *Serjania subdentata Juss., forma 4, angustifolia Radlk.*;

theilweise, nämlich Wright mss. n. 58, . . *Serjania crassinervis Radlk.*

Nro. 7, Zus.: *Serjania triternata W.*; specimina haitiensia — nach dem Herb. Grisebach (coll. Mackenzie) . *Serjania polyphylla Radlk.* (*S. triternata W.*)

Was die übrigen, nach Materialien aus anderen Herbarien schon früher interpretirten Angaben von Grisebach betrifft, so mögen hier diejenigen den vorstehenden angereiht sein, welche, wie die vorstehenden im Herb. Grisebach selbst auch in Belegstücken vertreten sind. Ich setze die Bezeichnungen dieser Belegstücke in eckige Klammern, wenn sie nicht von Grisebach selbst an den betreffenden Litteraturstellen angeführt sind.

Veget. d. Caraib.

Paullinia curassavica L., Guadeloupe, Duchassaing — . *Paullinia Plumierii Tr. & Pl.*

Novit. Flor. panam.

Nro. 32. *Serjania samydea Griseb.* [coll. Duchassaing] — *Serjania mexicana W.*

Flor. Brit. West Ind. Isl.

Nro. 5. *Serjania paniculata K.*, Cuba [Wright n. 2162] — *Serjania subdentata Juss.*
Nro. 6. *Serjania lucida Schum.*, S. Thomas [Duchassaing, nach Veg. d. Caraib., sieh oben] . . . . *Serjania polyphylla Radlk. (S. lucida Schum.)*
Nro. 8. *Serjania paucidentata DC.*, Trinidad, Crüger . . *Serjania paucidentata DC.*
Serjania paucidentata DC., Guiana [Kappler n. 2129, Wullschlaegel n. 921] . . . . . *Serjania paucidentata DC.*

Plantae Wrightianae c Cuba or.

Alle Angaben, in den angeführten Nummern von Wright — Interpretation wie früher.

Catal. Plant. Cub.

Alle auf die Sammlung von Wright bezüglichen Angaben, in den angeführten Nummern von Wright — Interpr. wie früher oder wie oben.
Nro. 4. *Serjania lupulina Schum.*; Rugel n. 52 . . . . *Serjania subdentata Juss.*

69. Serjania paniculata Kunth. (64, p. 209.)

Als neue Litteraturstelle kommt hinzu:

Serjania paniculata Hemsley in Salvin & Godm. Biol. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 207 n. 19.

Der ausgeschlossenen Litteratur ist beizufügen:

Non Serjania paniculata A. Richard Flor. Cubens., in Ramon Hist. de Cuba, I (1845) p. 278, quoad specimen descriptum, florigerum, a Ramon collectum, ad Serj. subdentatam Juss. recensendum (cfr. ibid.). Fructus descriptio sola, quae ex Kunthii opere huc allata est, veram S. paniculatam K. spectat.
Non — — Sauvalle et Wright Fl. Cubana (1873) p. 24 n. 420; cfr. Serj. subdentata Juss., p. 112 huj. Suppl.

Zusatz. Dass die unter *Serj. paniculata Griseb.* p. 210 und in Zusatz n. 3, p. 213 erwähnte, wahrscheinlich zu *Serj. equestris Macf.* zu beziehende Pflanze von Wilson aus Jamaica im Herb. Grisebach sich nicht findet, davon war schon oben p. 113 unter *S. subdentata* die Rede.

70. Serjania scatens Radlk. (65, p. 213), nunc: **Serjania atrolineata** Sauvalle et Wright.

Der angeführten Litteratur ist vorauszustellen:

Serjania atrolineata Sauvalle et C. Wright Flora Cubana (1873) p. 24 n. 423 c. syn. „Serj. divaricata Gris. non Schum.", excl. ex parte fructus descriptione, cf. infra obs.

Serjania scatens Radlkofer Conspect. Sectionum Specierumque Generis Serjaniae, e Monogr. Gen. seors. edit. (1874) p. 9 (89); Monogr. Serj. (1875) p. 213 n. 65.

— — Hemsley in Salvin & Godm. Biol. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 26.

Dem Materialienverzeichnisse ist einzufügen:

Duchassaing! (Panama; Hb. Griseb., sub nominib. non edit. nec edend.); P. Lévy n. 420! (Nicaragua, „environs de Grenade, forêts, alt. 40 m", m. Januar. 1870, flor.; Hb. Paris., DC., Boiss.); Bernouilli et Cario n. 2934! (Guatemala, Retalulen, m. Febr. 1878, flor.; Hb. Gotting.).

Zusatz. Der von mir dieser Art gegebene und zuerst in den Separatabzügen des Conspectus Specierum, 1874, veröffentlichte Name ist dem Gesetze der Priorität gemäss, wie schon oben p. 54 im Anschlusse an die Ergänzungen zu den Tabellen p. 67—80 (hier speciell p. 78) der Monographie bemerkt wurde und in der Ueberschrift geschehen ist, durch den um ein Jahr älteren der oben angeführten Flora Cubana zu ersetzen, welchem folgende Angaben beigefügt sind: „Spec. nov. alte scandens; foliis 2-ternatis, epunctatis, subtus atrolineatis, foliolis oblongis acuminatis, supra medium paucidentatis, lateralibus basi abrupte, terminali longius angustatis, subsessilibus; petiolo exalato; panicula longissima, albido-tomentella, ramis divaricatis; ala cordato-oblonga carpidia glabrata dorso marginante. Serj. divaricata Gris. non Schum.

Es ist fast überflüssig auf die Uebereinstimmung in dem Sinne des von mir gewählten und des in der Fl. Cubana gebrauchten Namens hinzuweisen, deren jeder auf die mit reichlichem, durch das Trocknen dunkel gewordenem Inhalte erfüllten Milchsaftelemente hindeutet, welche ausser in der Diagnose auch in Zusatz n. 2 meiner Monographie die entsprechende Hervorhebung erfahren haben, gleichwie auch in Zusatz n. 3 die rispenartige, sparrige Gesammtinflorescenz nebst ihrem Verhältnisse zu ähnlichen und anderen Vorkommnissen bei anderen Arten. Eine Abweichung von meiner Darstellung findet sich in der Flora Cubana nur hinsichtlich der Frucht. Dazu habe ich zu bemerken, dass die Früchte wohl schliesslich mehr oder minder kahl werden mögen; an den mir vorliegenden Materialien aber, und namentlich an den nur mit unreifen Früchten versehenen Exemplaren von Wright (n. 1587 partim) sind sie nicht kahl. Ferner zieht sich über den Rücken des Fruchtfaches nicht wirklich ein Flügelsaum fort, sondern nur eine erhabene Linie als sogenannte Rückennaht, und gegen den Flügel ist das Fach, wie ich es in der Characteristik hervorgehoben habe, deutlich und sogar in auffallender Weise abgesetzt. Die abweichenden Angaben der Flora Cubana lassen vermuthen, dass darin die Früchte der *Serj. crenata*, auf deren Vermengung mit der hier in Betrachtung stehenden Art ich in Zusatz n. 4 zu dieser schon aufmerksam gemacht

habe, oder selbst die grossentheils lose beiliegenden der *Serj. crassinervis*, auf welche jene Angaben wirklich passen, mit verstanden seien, zumal die *Serj. crassinervis* in den Herbarien wieder mit *Serj. crenata* verwechselt zu sein pflegt, da die betreffende Nummer 2160 von Grisebach im Catal. Pl. Cub. p. 44 unter *S. crenata* aufgeführt und erst in den Addendis p. 288 als nicht dahin gehörig bezeichnet wurde. Dieselbe Nummer ist von Grisebach auch unter *S. lupulina* (a. a. O. p. 44) aufgeführt worden, unter welchem Namen von Grisebach, wie ich in Zusatz 8 zu *S. subdentata*, p. 209, No. 4 und oben p. 114 verzeichnet habe, bald die *S. subdentata*, bald die *S. crassinervis* und bald die *S. diversifolia* zu verstehen ist. Diese Pflanzen scheinen schon von dem Sammler nicht sorgfältig genug auseinandergehalten worden zu sein, da denselben noch ausserdem, worauf Grisebach schon aufmerksam gemacht hat (a. a. O. p. 44), die Flügelfrüchte einer ganz anderen Gattung, der Gattung *Thouinia*, beigemengt waren.

Bezüglich der neu hinzugekommenen Materialien ist nur zu bemerken, dass die Pflanze von Duchassaing, durch welche nun auch Panama in dem Verbreitungsbezirke der Art direct vertreten erscheint, von Grisebach, da er mit ihrer Bestimmung nicht in's Reine kam, in seinen Publicationen gänzlich übergangen worden ist. In andere Herbarien scheint sie nicht Eingang gefunden zu haben.

71. **Serjania equestris** Macfad. (66, p. 216.)

Bezüglich der im Zusatz n. 2 erwähnten, von Grisebach in der Flor. Brit. West. Ind. Isl. p. 123 als *Serj. lucida Schum.* aufgeführten Pflanze von Wullschlaegel aus Jamaica, sei hier, wie schon in den Ergänzungen zu *Serj. diversifolia*, (p. 93) *polyphylla* (p. 111) und *subdentata* (p. 114) bemerkt, dass dieselbe ausweislich des Hb. Grisebach nichts anderes ist, als die in der Sammlung von Wullschlaegel unter n. 785 enthaltene *Serj. mexicana W.*, welche schon früher bei der Erwägung der Angabe Grisebach's in Betracht gezogen und an ihrer Stelle bei *Serj. mexicana W.*, p. 243 der Monographie, aufgeführt worden ist. Es wird das Nähere über sie bei *Serj. mexicana* im Anschluss an die dorthin nunmehr ihrem Haupttheile nach zu übertragende *Serj. lucida*, non *Schum.*, *Griseb.* l. c. seinen Platz finden.

Sectio VIII. Simococcus.

73. **Serjania oblongifolia** Radlk. (68, p. 219.)

Als Synonym ist nach den oben, p. 53, angeführten Ergänzungen zu den chronologischen Tabellen beizufügen:

Serjania micrantha Klotzsch ed. Schomb. in Reisen in Brit. Guiana, III (1848) p. 1180. (Coll. Schomb. n. 49! cf. supra p. 100 et Monogr. Serj. p. 220.)

74. Serjania subrotundifolia Radlk. (68, a.)

Scandens, fruticosa, puberula; rami juniores (nec non inflorescentiae) rufo-hirtelli, adultiores glabrati, 8-sulcati, 8-costati, costis acutis contiguis e corporibus lignosis peripheriicis centrale majus cingentibus exstructis; folia biternata; foliola elliptica, lateralia inferiora subrotunda, obtusa, immo retusa et glandula s. callo apicali transversim ovali in pagina inferiore instructa, subintegerrima, basi attenuata vel contracta subsessilia, nervis lateralibus arcuatim ascendentibus instructa, margine nec non in nervis praesertim subtus puberula, caeterum glabra, supra subtusque nitentia, membranaceo-coriacea, fuscescentia, punctis pellucidis aegre perspiciendis notata, epidermide mucigera; petioli omnes nudi; flores parvi, sepalis exterioribus hirtello-, interioribus adpresse tomentellis; fructus —.

Rami thyrsigeri diametro 3—4 mm, internodiis 3—8 cm longis puberulis vel glabratis. Folia superiora 15 cm longa, 12 cm lata; foliola terminalia 6,5 cm longa, 3,5 cm lata, lateralia 2,5 cm longa, vix 2 cm lata. Thyrsi in paniculam laxam congesti, sat dense cincinniferi; cincinni breviter stipitati, stipite pedicellis 2 mm longis vix longiore; alabastra obovoidea, pedicellos subaequantia. Flores hermaphroditi non suppetebant; masculi: Sepala exteriora duo breviora, interiora vix 2,5 mm longa. Petala ex obovato attenuata, 2,5 mm longa, 1 mm parum latiora, intus vix glanduligera: squamae (cristis exclusis) petala dimidia superantes, margine villosae, superiores crista brevi dilatata subemarginata appendiceque deflexa squamam dimidiam aequante barbata, inferiores crista dentiformi oblique emarginata instructae. Tori glandulae perparvae, superiores breviter ovatae, inferiores subannulares. Stamina villosiuscula, antherae glabrae. Germinis rudimentum parvum, glabrum, stylo rudimentario trifido coronatum.

In Peruvia: Lechler Pl. peruv. 2331 (?)! (adjecta n. 2332 in Hb. Kew.).

Zusatz. Die Pflanze gehört nach der Beschaffenheit der Blüthe und der Zweigstructur wohl zweifellos zu den kleinblüthigen Arten der Section VIII, Simococcus, und ist, so viel beim Fehlen der Früchte sich beurtheilen lässt, wohl mit der das Vaterland mit ihr theilenden Serj. tenuifolia am nächsten verwandt. Ich habe sie unter den Lechler'schen Pflanzen nur im Herb. Kew gefunden mit der unter *Serj. membranacea Splitg.* aufgeführten n. 2332; die Nummer der betreffenden Etiquette schien mir übrigens ursprünglich 2331 geheissen zu haben.

76. Serjania fuscifolia Radlk. (70, p. 221.)

In der Characteristik sind mit Rücksicht auf einige der neu hinzukommenden Materialien die Angaben über die Behaarung der Blätter (namentlich mit Rücksicht auf Glaziou n. 8603) und der Früchte (besonders mit Rücksicht auf Mosén n. 3835 nnd Gibert n. 64) zu modificiren, wie schon oben (p. 71) an der betreffenden Stelle des Conspectus Specierum. Für die Blätter hat es statt „subtus undique rufescenti-pubescentia“ zu heissen: subtus undique plus minus rufescenti-pubescentia, und für die Frucht ist nach den Worten „ad loculos velutino-pubescens“ beizufügen: rarius subglaber

Dem Materialienverzeichnisse sind beizufügen:

Gibert n. 64! (Paraguay, „Assumption m. Jun. 1858“, flor. et fruct. junior. loculis subglabris; Hb. Kew.); Balansa n. 2489! (Paraguay, „L'Assomption, dans les haies“ m. Jun. 1874, flor.; Hb. DC., Boiss.; deest in Hb. Griseb.); Mosén n. 3835! (Brasil. prov. S. Paulo, Campinas in margine sylvae caeduae, m. Jun. 1875, flor., in fruticeto campi sicci, m. Jul., fruct.), n. 2424! (Bras., Rio de Janeiro, Caminho dos Macacos, m. Sept. 1874, fruct.); Widgren n. 410½! (Bras. prov. Minas Geraës; Hb. Holm.); Glaziou n. 8298! 8594! 8603! (Rio de Jan.).

78. **Serjania clematidifolia** Camb. (72, p. 224.)

Als Synonym ist entsprechend der oben, p. 52, angeführten Ergänzung zu den chronologischen Tabellen die schon in meiner Abhandlung über *Sapindus* etc., Sitzungsber. d. Münchener Akademie, 1878, p. 224, Anmerk. nach einem von Asa Gray übersendeten Fragmente hieher gebrachte, folgende Bezeichnung beizufügen:

Paullinia barbadensis, non Jacq., Gray in Wilkes Un. St. Expl. Expedit. XV. Bot. I (1854) p. 249! Cf. supra p. 52 et Radlk. über Sapindus etc., Sitzungsber. Münch. Akad. 1878, p. 224, annot.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Widgren sine no.! (Rio de Janeiro, 1844; Hb. Holm.); Wilkes Exped.! (Rio de Jan.; „Paull. barbadensis Jacq.?“ Gray l. c.); Miers n. 3193! (Bras.; Hb. Kew.); Mosén n. 2425! 2426! (Rio de Jan., Tejuca, Corcovado, m. Sept. 1874, fruct.); J. de Saldanha n. 6213! (Bras. prov. Rio de Jan., Pico de Santa Cruz; Hb. Eichl.); Glaziou n. 8604! (Rio de Jan.).

Der Zusatz 3 ist von dem Beginne des zweiten Satzes an („diese Eigenthümlichkeit“ etc.) zu streichen, da sich das darin besprochene Stammstück bei erneuter Untersuchung als nicht hieher gehörig erwiesen hat. Dessen Bestimmung war bisher nicht möglich.

80. **Serjania pinnatifolia** Radlk. (74, p. 226.)

Als neues Material kommt hinzu:

Mosén n. 3837! (Bras. prov. S. Paulo, Campinas in margine sylvae caeduae, m. Jun. 1875, fruct.; Hb. Holm.).

Sectio IX. Ococcus.

81. **Serjania perulacea** Radlk. (75, p. 227.)

Als Synonym ist entsprechend den oben, p. 53, angeführten Ergänzungen zu den chronologischen Tabellen namhaft zu machen:

Paullinia australis (non St. Hil.) Grisebach Symbolae ad Flor. argentin. (1879) p. 80 n. 454, partim, nempe quoad coll. Balansa n. 2480! Cf. supra p. 53 et infra obs.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Balansa n. 2480! (Paraguay, „Paraguari, dans les haies“ m. April. 1874, flor. et fruct. junior.).

Zusatz. Das Exemplar von Balansa, welches an Grisebach gelangt ist, hat, was nicht bei allen der Fall ist, junge Früchte von nahezu 1 cm Länge, an welchen die characteristische Beschaffenheit der Serjania-Früchte mit aller Deutlichkeit bereits ausgeprägt ist. Wie Grisebach diese Pflanze mit der zierlichen *Paullinia australis St. Hil.*, welche ihm in einem schönen Blüthenexemplare von Lorentz aus „Concepcion del Uruguay“ vorlag, zusammenwerfen, sie eigenhändig mit der betreffenden Bestimmung versehen und unter dieser veröffentlichen konnte, ohne der Früchte an ihr gewahr zu werden, ist schwer begreiflich, liefert aber den Schlüssel zum Verständniss der zahlreichen anderen Unbegreiflichkeiten in Grisebach's Schriften.

Mit der Pflanze von Balansa hat die frühere Angabe über das Vorkommen der *Serj. perulacea* in Paraguay nach einem Exemplare von Gibert, ihre volle Bestätigung erhalten. Ueberdies habe ich inzwischen die früher nur flüchtig gesehene Pflanze von Gibert erneuter Prüfung unterwerfen können.

Die Blättchen dieser südlicheren Exemplare zeichnen sich durch grosse Schmalheit und durch tief gehende grobe Zahnung aus. Aehnliches findet sich z. B. auch bei Exemplaren der *Paullinia pinnata L.* aus der gleichen Gegend (s. ob. im Zusatze zu *Serj. marginata*, p. 106). Zugleich sind sie dünner und das bedingt, dass im durchfallenden Lichte nicht nur die der oberen Blattseite genäherten Secretzellen als zerstreute durchsichtige Punkte und Strichelchen, wie bei den Exemplaren aus Minas Geraës, sondern auch die zu einem unterbrochenen Netzwerke angeordneten Milchsaftzellen an der unteren Blattfläche als verästelte durchscheinende Linien hervortreten, welche bei den Exemplaren aus Minas Geraës deutlicher im auffallenden Lichte als im durchfallenden zu beobachten sind.

82. **Serjania lethalis** St. Hil. (76, p. 227.)

Den Vulgärnamen ist beizufügen:

Sacha, teste Weddell, Voyage dans le Nord de la Bolivie (1853) p. 449 (nec 442, uti Ernst p. 11 refert in Memoria bot. sobre el Embarbascar, Caracas 1881, del Tomo I de los Esbozos de Venezuela por A. A. Level).

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Regnell III, 348a! partim (partim *Serj. obtusidentata* Radlk.; Uberava, prov. Minas Ger., in margine sylvae, m. Sept. 1848, flor.; Hb. Holm.), III, 348c! (ibid., m. Jul. 1848, flor.; Hb. Holm.); Glaziou n. 9705! (foliolis insignius dentatis; Amazonas, prov. Pará?; Hb. Warming).

84. **Serjania ichthyoctona** Radlk. (78, p. 230.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

J. de Saldanha n. 5913! (Rio de Jan., Alto da Boa Vista; Hb. Eichl.); Mosén n. 2427 (Rio de Jan., Corcovado, m. Sept. 1874, flor.); Glaziou n. 7862! (Rio de Jan.).

85. **Serjania paucidentata** De Cand. (79, p. 230.)

Als Litteraturstellen sind an ihrem Orte einzufügen:

Serjania paucidentata Schomburgk, Rich., Reisen in Britisch Guiana, III (1848) p. 1004 („an den Ufern des Essequibo"), p. 1180 („an den Ufern der Flüsse"). Cf. supra p. 98 et Monogr. Serj. p. 231.

— — Sagot Catal. des Pl. de la Guyane franc. in Ann. Scienc. nat., IV. Sér., XII (1882) p. 190.

Paullinia protracta Schomburgk, Rich., Reisen in Britisch Guiana III (1848) p. 1004 („an den Ufern der Flüsse"). Cf. supra p. 99.

Als Synonym ist hinzuzufügen:

Urvillea Schomburgkii Klotzsch ed. Rich. Schomburgk in Reisen in Brit. Guiana III (1848) p. 1180. (Coll. Rich. Schomb. n. 1710!) Cf. supra p. 100 et Monogr. Serj. p. 231.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Fendler n. 273! (Trinidad, 1877—80; Hb. Kew.); Glaziou n. 9702! (Brasilia; Hb. Warming); Trail n. 119! („Lower Amazonas, Prainha", m. Nov. 1873, flor. et fruct. jun.; Hb. Kew.); E. F. im Thurn! (Brit. Guiana, Corentine River, m. Nov. 1879; Hb. Kew.); G. S. Jenman n. 1191! (Brit. Guiana, Essequebo River, m. Sept. 1881; Hb. Kew.). — Culta in Horto Parisiensi annis 1867 et 1868! (Hb. Monac.).

Zusatz. Wie schon oben bei der Betrachtung der Blattstructur im allgemeinen in diesen Ergänzungen (p. 39, 44) hervorgehoben worden ist, bildet die *Serj. paucidentata* mit der ihr vorausgestellten Art, *Serj. ichthyoctona*, und mit den beiden ihr folgenden Arten, *Serj. acutidentata* und *Serj. obtusidentata*, eine Gruppe enger aneinander geschlossener Arten innerhalb der Section, wie durch das gemeinschaftliche Auftreten von Sclerenchymfasern dargethan wird, die sich von dem Hartbaste der Gefässbündel, besonders reichlich an deren Enden, abzweigen, und einzeln zwischen die Zellen des Diachym's, theilweise bis zur Epidermis hin, sich einschieben.

Durch Rücksichtnahme auf dieses Verhältniss liess sich die Bestimmung einer zu *Serj. paucidentata* gehörigen Pflanze sicher stellen, welche ich in den Jahren 1867 und 1868 in dem Pariser Garten in Cultur stehend fand — einerseits im Freilande („École"), andererseits als Topfpflanze, unter verschiedenen, schon vielfach in Gärten missbrauchten, hier besser unerwähnt zu lassenden Namen —, und für welche früher die betreffende Bestimmung wegen gewisser Eigenthümlichkeiten der Zweige und des Blattstieles zweifelhaft geblieben war, so dass ich es vorzog, diese Pflanze, die überdiess wenige Jahre später aus dem Garten verschwunden ist, in der Monographie von *Serjania* zu übergehen, sowohl bei der Aufzählung der cultivirten Arten als auch unter *Serj. paucidentata* selbst. Von den im Herb. Monacense durch mich niedergelegten Zweigen dieser Pflanze erscheinen nämlich die älteren nicht mit concaven, sondern mit ziemlich ebenen Flächen versehen, welche nur wenig tiefer als die Kanten liegen. Weiter zeigt sich nur gelegentlich eine oder die andere der 5—6 Kanten (doch auch

zwei gleichzeitig auf demselben Querschnitte) aus einem peripherischen Holzkörper gebildet, wie in Crüger's Figur von der Basis eines Zweiges, s. bot. Zeit. IX, 1851, Taf. VIII, Fig. 15, während im übrigen die Zweige einen einfachen Holzkörper besitzen — Abweichungen, welche wohl den Cultureinflüssen zugeschrieben werden müssen, unter welchen die Pflanze überhaupt nicht lianenartig, sondern zu einem buschigen Strauche sich entwickelt hatte. Dass bei nicht rankenden Individuen die Bildung der peripherischen Holzkörper unterbleiben kann, hat schon Crüger angeführt (l. c. p. 488). Dazu kommt noch eine schwache Flügelung auch der gemeinschaftlichen Blattstiele. Das Letztere findet sich übrigens, wie in der Characteristik von *Serj. paucidentata* angegeben ist, gelegentlich auch bei spontanen Exemplaren angebahnt („petiolus communis nudus vel rarissime submarginatus"), und was die Zweigbeschaffenheit betrifft, so sind die oberen Zweigenden an der cultivirten Pflanze deutlich gefurcht, und erscheinen die unteren auch an spontanen Exemplaren zwischen den Kanten nicht selten beträchtlich abgeflacht.

Es ist also *Serj. paucidentata*, wie schon oben p. 50 geschehen, unter den cultivirten Arten mit aufzuzählen.

Zu den in Desfontaine's Catalogen des Pariser Gartens aufgeführten Arten aus den Gattungen *Serjania* und *Paullinia* möchte die Pflanze kaum in Beziehung stehen. Die Mehrzahl der betreffenden Pflanzen, *Paull. pinnata*, *Paull. cauliflora*, *P. caribaea*, d. i. *Serj. mexicana*, und *Serj. caracasana* haben sich selbst auch im Pariser Garten, wie ich p. 63 der Monographie erwähnt habe, vorgefunden; nicht so allerdings *Serj. triternata*, d. i. *Serj. polyphylla*. Kaum auch scheint sie eher, als nach früherer Vermuthung (s. a. a. O. p. 63) die *Paull. pinnata*, die Pflanze zu sein, welche als *Paull. alata* aus dem Pariser Garten zur Untersuchung der Stammstructur an Nägeli mitgetheilt worden ist; denn die letztgenannten beiden Arten besitzen die gleiche Anordnung und Zahl von Blättchen, auf welche Verhältnisse bei Bestimmung von *Paullinia*- oder *Serjania*-Arten früher vor allem, und namentlich in Gärten, Werth gelegt wurde.

86. **Serjania acutidentata** Radlk. (80, p. 232.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Glaziou n. 13623! (Brasil. prov. Rio de Janeiro; Hb. Eichl.).

87. **Serjania obtusidentata** Radlk. (81, p. 233.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Regnell III, 348 b! (Brasil. prov. Minas Geraës, Uberava, m. Sept. 1848, fruct.; Hb. Holm.)

89. Serjania lamelligera Radlk. (82, a.)

Scandens, fruticosa, pubescens; rami acutissime sexangulares, angulis 3 alternis (altero folio opposito, alteris juxta folium decurrentibus) magis prominentibus, inter angulos profunde canaliculati, e viridi fuscescentes, juniores undique, adultiores ad angulos hirtelli; corpus lignosum compositum e centrali majore triangulari et peripherici 3 a lateribus quam maxime compressis lamelliformibus, singulis centralis faciebus impositis et angulis magis prominentibus subjectis; folia biternata; foliola ovato-lanceolata, petiolulata, acuta et mucronulata, terminalia cuspidata, lateralia triadum inferiorum abbreviata, obtusa, subduplicato-serrata, supra laxe, subtus dense velutino-pubescentia, submembranacea, supra fuscescentia, impunctata, epidermide mucigera; petioli omnes nudi, rufulo-hirtelli; thyrsi solitarii, folia bis terve superantes, rhachi folia aequante sulcata laxe cincinnigera cincinnisque stipitatis robustioribus confertifloris cano-pubescentibus; flores mediocres, bracteis bracteolisque magnis elliptico-oblongis sepala aemulantibus suffulti atque superati, sepalis omnibus tomento brevi sordide cano indutis, petalis intus eglandulosis; fructus (vix semimaturus) puberulus, loculis tumidulis contiguis vix vel ne vix cristatis cano-tomentosis, endocarpio laxius crispato-piloso, semine ad basin loculi inserto.

Rami thyrsigeri diametro 3—4,5 mm, internodiis 4—9 cm longis. Folia circ. 8 cm longa, fere totidem lata, superiora minora; foliola terminalia 5—5,5 cm longa, 2,7 cm lata, in petiolulum abruptius attenuata, cuspide 3—4 mm longa instructa, lateralia decrescentim minora; petiolus communis brevis, vix 1 cm longus, intermedius subduplo longior, laterales 8 mm longi; stipulae pro genere majusculae, 2—3 mm longae, ovato-lanceolatae, scariosae. Thyrsi inferiores 25 cm longi, superiores minores; cincinni stipite 5—6 millimetrali incluso 1 cm vix superantes; bracteae bracteolaeque 5 mm longae, 2,5 mm latae, alabastra ellipsoidea 3 mm longa obvolventes. Flores hermaphroditi non suppetebant; masculi: Sepala exteriora duo parum breviora, interiora 4—5 mm longa. Petala subspathulata, sepala vix vel ne vix superantia, 2,5 mm lata, apice undulata crenulataque; squamae angustiores, superiores crista obovata appendiceque deflexa brevi villosa, inferiores crista oblique dentiformi instructae. Tori glandulae superiores ovatae, glabrae, laterales minores annulares. Stamina pilosiuscula, antherae glabrae. Germinis rudimentum trigonum, apice pilosiusculum, stylo rudimentario trifido coronatum. Fructus maturus non suppetebat.

In Brasiliae provincia Rio de Janeiro(?): Glaziou n. 12506! (Hb. Eichl., Warm., Kew., recepta ao. 1882).

Zusatz. Die Pflanze ist einerseits ausgezeichnet durch die Zweigstructur, über welche dem oben in der Characteristik Gesagten und im Namen schön Angedeuteten Wesentliches nicht mehr hinzuzufügen ist, andererseits durch die grossen Bracteen, wohl die grössten aller *Serjania*-Arten, welche die von ihnen überdeckten Blüthenknospen grösser erscheinen lassen, als sie sind, und selbst die geöffneten, durch Grösse ihrerseits weit hinter die anderer Arten zurücktretenden Blüthen überragen.

Der Beurtheilung der Verwandtschaftsverhältnisse steht das Fehlen reifer Früchte sehr im Wege.

Im Habitus ist die Pflanze zunächst der *Serj. clematidifolia*, welche auch verhältnissmässig grosse Bracteen besitzt, ähnlich, so sehr, dass bei Nichtbeachtung der

Zweigstructur leicht eine Verwechslung damit stattfinden kann. Das Blatt für sich findet seines Gleichen bei *Serj. comata* und *Serj. communis*, die Zweigstructur dagegen vorzugsweise bei *Serj. thoracoides*, einer ebenfalls mit ziemlich grossen Bracteen versehenen Art, deren Frucht aber durch stärkere, in Form von Querrippen hervortretende Gefässbündel ausgezeichnet ist, ein Verhältniss für dessen Auftreten bei der in Betrachtung stehenden Pflanze an den doch wohl schon halb reifen Früchten irgend ein Fingerzeig nicht zu finden ist. Diese Früchte möchten sich bei weiterer Entwicklung durch Verbreiterung der Flügelbasis und deutlichere Absetzung der jetzt noch wenig hervortretenden Fruchtfächer, an denen keine Eindrückung oder Abflachung des Rückens angedeutet ist, so dass an eine Zugehörigkeit zur Section VIII, deren Arten auch alle eine gleichförmige, andere Zweigstructur besitzen, kaum gedacht werden kann, am ehesten noch den Früchten der zur Section IX gehörigen Arten näheren. Bei gewissen Arten der Section IX finden sich auch wieder, wenn auch nicht in dem Maasse wie bei *Serjania thoracoides*, ähnliche Verhältnisse der Zweigstructur. Das zusammengenommen mag es gerechtfertiget erscheinen lassen, die Pflanze diesen Arten anzureihen, obwohl sie in dieser Section die einzige Art ohne Secretzellen im Blatte darstellt und neben *Serj. perulacea* die einzige mit stärker behaartem Blatte.

Sectio X. Phacococcus.

91. Serjania mexicana Willd. (84, p. 235.)

Für die Litteratur sind folgende Ergänzungen und Veränderungen anzuführen:

1. Als neues Synonym ist entsprechend den Ergänzungen zu den chronologischen Tabellen, p. 52, nach *Paullinia mexicana* p. 237 einzufügen:

Paullinia curassavica Linn., non Spec. Pl., Amoenit. acad. V (1760) p. 378 (Sandmark Flor. Jamaic., Dec. 1759) partim (partim Ampelidea) fide Herb. Linn.; coll. P. Browne!; cf. infra obs. A.

2. Ebenso nach *Serjania samydea* p. 240:

Serjania lucida, non Schum., Grisebach Flora Brit. West Ind. Isl. (1859—64) p. 123 quoad stirpem jamaicensem descriptam, a Wullschlaegel prope Manchester (t. Griseb.) lectam, excl. syn. „S. Ossana DC." et indicat. „Cuba, S. Thomas"; coll. Wullschlaegel n. 785 in Hb. Griseb.!; cf. infra obs. B.

3. Ebenso nach *Serjania floribunda* p. 240:

Paullinia spec. Hemsley in Salvin & Godman Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 211 n. 18; „Friedrichsthal n. 5!, Guatemala".

4. Als neue Litteraturstellen sind p. 239 einzufügen:

Serjania mexicana Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 207 n. 18.
— — Watson in Proceed. Americ. Acad. XXI (1886), p. 463 n. 49; coll. Watson, Guatemala (specimen non vidi).

5. Ebenso p. 240:

Serjania samydea Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 24: „Panama, Duchassaing" (t. Griseb.). — „Colombia". Cf. infra. obs. C.

6. In die auszuschliessende Litteratur p. 240 kann am Anfange, wenn man die damit gewonnene Bestimmtheit höher anschlägt als den kleinen Nachtheil einer Vermehrung der Synonymie, die ich früher fern zu halten gewillt war (s. d. Monogr. von Serj., Gattungsgesch. p. 23), eingefügt werden:

Non Paullinia mexicana Linn. Herb. partim; cf. Monogr. Serj., Hist. Gen. p. 21 et 24, Nr. 4, b, c.

7. An den Schluss der auszuschliessenden Litteratur tritt nun die p. 239 zu streichende Stelle „*Serjania pubescens* (?) *Grisebach* Novit. Flor. Panamens." unter entsprechender Veränderung nach dem schon oben unter *S. subdentata* p. 114 berichteten Befunde des Herb. Grisebach:

Non Serjania pubescens (non Kunth) Grisebach Novit. Flor. Panamens. in Bonplandia VI (1858) p. 3, in observat. ad Serj. samydeam Gris., specimen a Duchassaing in Panama lectum!, ad Serj. rhombeam Radlk. recensendum, et specimina ibid. a Seemann lecta (sub Serj. pubesc. Seem. Bot. Voy. Herald p. 92 n. 143, in Monogr. Serj. p. 240 jam exclusa) et ad Paull. fuscesc. Kunth relata. Cf. infra obs. D. nec non supra p. 114.

8. Hinzuzufügen sind dem Befunde des Herb. Grisebach gemäss (s. ob. p. 114) die hier durchschossen gedruckten Worte in der folgenden Stelle, p. 238:

Serjania divaricata („Sw.") Grisebach Flor. Brit. West Ind. Isl. (1859—64) p. 123 n. 7! („coll. Distan" et „Wilson" in Herb. Hook., nec non „coll. Alex. Prior, Jamaica", in Hb. Griseb.)....

Im Materialienverzeichnisse p. 242 hat es Zeile 8 unter Coulter n. 881! statt San Blas de Guadalaxara zu heissen „San Blas to Guadalaxara".

Beizufügen sind dem Materialienverzeichnisse:

Friedrichsthal n. 5! („Guatemala", resp. Nicaragua, cf. infra obs. ad Serj. setulosam; „Paull. sp. n. 18" Hemsley l. c.; Hb. Kew.); C. Wright! (Nicaragua; „Hb. of the U. S. North Pacific Explor. Exped. under Commanders Ringgold and Rogers, 1853—56"; Hb. Griseb.); Watson (Guatemala, prov. Yzabal, „banks of Chocon River"; cf. supra lit.); O. Kuntze n. 1390! (Caracas, m. Maj. 1874, fruct.); Patrik Browne! (Jamaica; *Paull. curassavica Linn.* Amoenit. V, p. 378 part.; Hb. Linn.; cf. obs. A); R. C. Alexander Prior! (Jamaica, ao. 1850; Herb. Griseb.).

Zusatz A. Was die *Paull. curassavica* der Flora Jamaicens. non Linné betrifft, so habe ich seiner Zeit schon in der Gattungsgeschichte von *Serjania* bei Betrachtung des Herb. Linné p. 21 und 24 Nr. 5, a und in dem Zusatze n. 1 zu

Serj. mexicana p. 246 (am Ende) hervorgehoben, dass unter dem Namen *Paull. curassavica* im Herb. Linné auf einem ersten Blatte („a" nach meiner Bezeichnung — die unter „b" aufgeführte, wahrscheinlich von Houston herrührende Pflanze, *Paullinia fuscescens K.*, steht in keiner Beziehung zu Linné's Flora Jamaicensis und bleibt im Folgenden desshalb unberücksichtiget) Fragmente von verschiedenen Pflanzen aus dem Herb. P. Browne sich finden, und zwar, wie ich nach neuerdings im Herbste 1885 vorgenommener und in der Monographie von *Paullinia* (wie schon oben p. 48 angegeben) näher darzulegender Untersuchung des Herb. Linné nun zu bemerken habe, von zweierlei (nicht, wie ich früher annahm, dreierlei) Pflanzen, nämlich ein Blatt von *Serj. mexicana* und ein Zweig einer Ampelidee mit einem (nach der erneuten, durch die inzwischen gewonnenen Hilfsmittel der anatomischen Methode vervollständigten Untersuchung) dazu gehörigen Blatte, welche Fragmente unter *Paull. curassavica* der Flora Jamaic. in den Amoenit. bot. von Linné gemeint sind.

Es gehört somit diese Stelle theilweise in die Synonymie von *Serj. mexicana W.*

Die besagte Stelle ist mir nebst ihrer Beziehung zu den in Rede stehenden Fragmenten erst nach der Veröffentlichung meiner Monographie von *Serjania* bekannt geworden.

Ich werde auf die Interpretation dieser Stelle, da hiebei ähnliche Gesichtspunkte massgebend sind, wie bei einer zweiten derselben Flora Jamaicensis, an welcher Linné mit dem Namen *Paullinia pinnata* eine der Gattung *Weinmannia* angehörige, von P. Browne herrührende Pflanze bezeichnet hat (sieh p. 21 und 24 Nr. 7 der Gattungsgeschichte von *Serjania*), bei Besprechung dieser in der Monographie von *Paullinia*, unter *Paull. pinnata* zurückkommen und dort auch auf die an der obigen Stelle noch weiter berührte Pflanze aus der Familie der Ampelideen eingehen.

Zusatz B. Zu dem neuen Synonyme: *Serjania lucida*, non *Schum.*, *Griseb.* Flor. Brit. West Ind. Isl., „Jamaica!, Wullschlaegel, Manchester" ist Folgendes zu bemerken:

Die in Westindien im Jahre 1849 von Wullschlaegel gesammelten Pflanzen sind, wie die nähere Nachforschung darüber ergeben hat, in den Jahren 1850—52 in 4 Sendungen zu ungefähr je drei Centurien an Martius, den damaligen Conservator der botanischen Sammlungen in München gelangt und sind in voller Zahl (n. 1—760 fast sämmtlich aus Antigua, n. 761—1395 nahezu alle aus Jamaica) und mit den Originaletiquetten von Wullschlaegel in das Herb. Monacense übergegangen, während die Doubletten in ziemlich vollständiger Reihe an das Herb. Martius kamen, zu welchen sich Martius eigenhändig die Etiquetten mit den Bestimmungen und sonstigen Angaben Wullschlaegel's copirte, aber unter Hinweglassung der Nummern, die er aus einem von dem damaligen Studirenden Aug. Progel angefertigten, nach Nummern geordneten und im Herb. Monac. noch vorhandenen Verzeichnisse in wünschenswerthen Fällen leicht ersehen zu können annehmen durfte.

Eine zweite Reihe von Doubletten dieser Sammlung ist an Grisebach gelangt, wie mir das Herbarium desselben zeigt, und da die ihnen beiliegenden Etiquetten von

Grisebach selbst geschrieben sind, einschliesslich der betreffenden Nummern, auf welche Grisebach mehr Werth als Martius gelegt zu haben scheint, so ist wohl anzunehmen, dass Grisebach zur betreffenden Zeit selbst in München anwesend und so in der Lage war, zu den von ihm persönlich entgegengenommenen Pflanzen auch eigenhändig die Wullschlaegel'schen Originaletiquetten einschliesslich der Nummern zu copiren, übrigens, wie ich sehe, unter Hinweglassung der näheren Standorte und anderer Bemerkungen.[1])

So lautet die Etiquette der von Wullschlaegel auf Jamaica im Fruchtzustande gesammelten *Serj. mexicana W.* (für welche im Materialienverzeichnisse der Monogr. von *Serjania* p. 243 die Nummer und die Jahreszahl dem dabei nicht ausdrücklich erwähnten Herb. Monacense entnommen ist) im Herb. Monacense (buchstäblich): Nr. 785, *Seriana divaricata Schum.*, Fairfield, Jamaica, Wullschlaegel 1849; im Herb. Martius: *Serjana divaricata Schum.*, Fairfield, Jamaica, communicavit Wullenschlaegel 1850; im Herb. Grisebach: *Serjania divaricata Schum.*, Jamaica, Wullschlaegel 785.

Auf diese Pflanze des Herb. Griseb. passt nun vollständig und nach der Randbeschaffenheit, sowie nach den (p. 709 vergeblich veränderten) Maassangaben allein auf sie die in der Fl. Brit. West Ind Isl. unter „*Serj. lucida Schum.*“ gegebene Beschreibung, für welche sich bei näherer Vergleichung ergibt, dass sie nicht nach Schumacher oder Willdenow oder Schlechtendal wiedergegeben ist, sondern dass sie nach der dabei angeführten Pflanze von Wullschlaegel, wie die Angaben „leaflets subentire, 5″—2″ long, samarae glabrous“ zeigen, von Grisebach verfasst ist, wobei allerdings die fehlerhafter Weise von ihm damit zusammengeworfenen Pflanzen aus „Cuba“ — d. i. nach Ergänzung aus Griseb. Pl. Wright. und Cat. Pl. Cub. (s. d. Monogr. p. 208) theils *Serj. diversifolia R.* („*S. Ossana DC.*“), theils *Serj. subdentata Juss.* — und aus „S. Thomas“ — d. i. die eigentliche, zu *Serj. polyphylla R.* gehörige *Serj. lucida Schum.* — mehr oder weniger mit hereingezogen sein mögen. Es ist in dieser Beschreibung auch nicht ein prägnanter Character, da die Pubescenz der Zweige oder Früchte ein solcher nicht ist, gegenüber der folgenden „*Serj. divaricata Sw.*“, wie Grisebach schreibt, d. i. der *Serj. mexicana W.*, zu welcher die in Rede stehende Pflanze von Wullschlaegel eben auch gehört, hervorgehoben, und Wullschlaegel hätte eben auch hier neben Distan, Wilson und Alex. Prior, den anderen Sammlern der *Serj. mexicana* auf Jamaica, genannt werden sollen (während March nicht hier, sondern als Sammler der *Serj. equestris* Macf. zu nennen gewesen wäre).

---

1) Mit den surinam'schen Pflanzen Wullschlaegel's verhält es sich, wie hier noch beigefügt sein mag, anders. Sie sind in das Herb. Martius übergegangen mit Einschluss der Originaletiquetten. Das Herb. Monacense besitzt diese Pflanzen nicht. Im Herb. Grisebach aber, wie ich sehe, befinden sich davon, wie von der westindischen Sammlung, Doubletten mit eigenhändig von Grisebach copirten Etiquetten.

Dazu kommt, dass von Wullschlaegel überhaupt nur eine *Serjania*-Art auf Jamaica (und zwar im Fruchtzustande, wie Grisebach angibt) gesammelt worden ist, wie dessen Originalsammlung im Herb. Monacense mit Bestimmtheit darthut.

Da dieser Umstand früher nicht ebenso sicher, wie jetzt, eruirt war, so gab ich der Annahme Raum, dass von den überhaupt noch auf Jamaica vorkommenden Arten, d. i. *Serj. nodosa R.* (?) und *Serj. equestris Macf.* vielleicht auch die letztere von Wullschlaegel gesammelt und von Grisebach gemeint sein könne. Diese Annahme fällt nunmehr hinweg, wie ich in den vorausgehenden Ergänzungen zu *Serj. equestris* und den anderen von Grisebach hereingezogenen Arten, *S. diversifolia*, *subdentata* und *polyphylla* schon angeführt habe, und wornach der frühere Zusatz n. 12 zu ändern ist, in welchem zugleich das früher mir unbekannt gewesene Exemplar von Alex. Prior den richtig bestimmten anzureihen ist.

Was die eingangs des gegenwärtigen Zusatzes wiederholte, der Pflanze Wullschlaegel's von Grisebach beigefügte Angabe „Manchester" betrifft, so ist dieselbe wohl als nähere Standortsangabe zu betrachten, da es nach brieflicher Mittheilung aus England einen Ort dieses Namens auf Jamaica gibt. Wie Grisebach dazu kommt, diesen Ort statt des von Wullschlaegel angeführten „Fairfield" zu nennen, mag dahin gestellt sein.

Dass die bei Grisebach a. a. O. unter *S. lucida* in der dritten Zeile stehenden Worte „wing or" sinnlos und desshalb zu eliminiren oder durch andere zu ersetzen sind, wenigstens das erstere, wird dem Leser selbst auffallen. Eine Aenderung dieser Stelle findet sich unter den „Verbesserungen" p. 709 nicht.

Dagegen ist die dort sich findende Aenderung „leaflets 1″—2″ long (statt 5″—2″)", wie schon angedeutet, keine Verbesserung, sondern eine Verschlechterung, da sie offenbar auf den fälschlich mit der Pflanze von Wullschlaegel identificirten Exemplaren der echten *Serj. lucida Schum.*, d. i. *Serj. polyphylla R.* aus S. Thomas beruht.

In dem Herb. Grisebach ist Wullschlaegel's Pflanze bloss mit der oben schon angeführten Etiquette versehen, welcher Grisebach noch die Bezeichnung „*S. mexic. 84 Radlk.*" als Hinweisung auf meine Monographie beigefügt hat. Ich fand sie in einem Umschlagsbogen mit der „*S. divaric.*", d. i. *S. mexicana* von Alexander Prior und der ebenfalls mit der Bezeichnung „*S. mexic. 84 Radlk.*" von Grisebach versehenen früheren *Serj. samydea Griseb.* liegen, was auf eine spätere Zusammenordnung dieser Materialien gelegentlich der Durchsicht meiner Monographie schliessen lässt.

Zusatz C. Dass Hemsley (a. a. O., 1879—81) die *Serj. samydea Griseb.* wieder als selbständige Art behandelt, nachdem ich ihr (1875) ihren Platz in der Synonymie von *Serj. mexicana W.* angewiesen hatte, kann auf einem Uebersehen derselben in meiner Monographie, woselbst sie übrigens nach dem Register leicht zu finden ist, beruhen, oder auf einer abweichenden Meinung über den Werth derselben.

Es lässt sich das Erstere daraus, dass Hemsley bei *Serjania samydea* auf meine Monographie nicht verweist, noch nicht mit Sicherheit folgern, da das auch gelegentlich bei anderen Arten, rücksichtlich deren Hemsley, wie z. B. rücksichtlich der *Serj. caracasana W.*, lediglich auf den Angaben meiner Monographie fusst, nicht geschehen ist. Irgend ein Princip scheint dieser Hinweisung, oder ihrer Unterlassung (bei noch 5 anderen Arten: *Serj. acuta*, *emarginata*, *grandis*, *mexicana*, *Schiedeana*), überhaupt nicht zu Grunde zu liegen.

Demgemäss ist auch die zweite Annahme möglich — eine abweichende Meinung über den Werth der *Serj. samydea Griseb.* Diese müsste, da Hemsley die Pflanze von Duchassaing kaum gesehen hat, wie aus dem Mangel eines Hinweises auf das „Herb. Kew" erhellt, auf einem besonderen Zutrauen zu den Aufstellungen Grisebach's beruhen. Der am Schlusse des vorigen Zusatzes erwähnte Umstand, dass Grisebach selbst in seinem Herbare die Pflanze nach dem Erscheinen meiner Monographie dieser entsprechend bezeichnet und eingeordnet hat, dürfte meiner Anschauung die ihr früher versagte Geltung vielleicht nunmehr gewinnen.

Auf welchen Materialien Hemsley's Angabe „Colombia" für das weitere Verbreitungsgebiet der Pflanze beruht, ist nicht ersichtlich gemacht. Die Angabe fällt mit der gleichen unter *Serj. mexicana W.* natürlich zusammen und mag durch irgend ein von Hemsley auf *Serj. samydea* bezogenes Exemplar der *Serj. mexicana* aus Columbien veranlasst sein. Die von Triana und Planchon seiner Zeit (1862) zu *Serj. samydea* gerechnete *Serj. paucidentata*, non *DC.*, *Seem.* kann wohl nicht den Grund zu dieser Angabe bilden, da die betreffende, von mir zu *Serj. rhombea R.* verwiesene Pflanze auch aus Panama (Darien) ist und von Hemsley selbst auch unter *Serj. rhombea* aufgeführt wird.

Zusatz D. Ueber die von Grisebach in den Novitiae Flor. Panamens. mit seiner *Serj. samydea*, Panama, Duchassaing, in Vergleich gezogene, oben unter n. 7 ausgeschlossene und zu *Serj. rhombea R.* verwiesene *Serj. pubescens* (non *Kunth*) *Griseb.* konnte ich früher in der Monographie von *Serjania* p. 208 im Zusatze n. 8 zu *Serjania subdentata*, ferner p. 239 unter *Serj. pubescens* und namentlich in Zusatz n. 1 zu *Serj. mexicana* bei Besprechung der *Serj. samydea*, p. 249 (in der zweiten Hälfte des dritten Absatzes), da ich die Pflanze nicht gesehen hatte, nur einer Vermuthung Raum geben — dahin gehend, dass diese Pflanze vielleicht übereinstimme mit einem von mir gesehenen Exemplare von Duchassaing im Pariser Museum, welches schon Triana und Planchon in Ann. Scienc. nat. 1862, p. 357 mit einer von Seemann in Panama gesammelten und von Grisebach an der besagten Stelle auf die Pflanze von Duchassaing unter dem gleichen Namen (*Serj. pubescens*) bezogenen *Serj. pubescens*, non *Kunth*, *Seem.*, d. i. *Paull. fuscescens Kunth*, zusammengestellt hatten, und welches, wie die ebenfalls aus Autopsie mir bekannte Pflanze von Seemann zu *Paullinia fuscescens Kunth* gehört.

Der Befund des Herb. Grisebach hat diese Vermuthung nicht bestätiget.

Die betreffende Pflanze von Duchassaing im Herb. Grisebach, welche ihrer Etiquette gemäss Grisebach schon mit der von ihm angenommenen Bezeichnung *Serj. pubescens* von Duchassaing erhalten hatte, stimmt allerdings, wie sich nunmehr zeigt, mit einer im Pariser Museum von mir gesehenen Pflanze dieses Sammlers überein, aber nicht mit der eben erwähnten *Paull. fuscescens K.*, sondern — was früher der Vermuthung durch den Vergleich mit der Pflanze von Seemann bei Grisebach fern gerückt war — mit der von mir p. 325 der Monographie unter *Serj. rhombea R.* nach dem Pariser Museum aufgeführten Pflanze von Duchassaing aus Panama, die ihrerseits auch durch eine Pflanze von Seemann vertreten ist, aber nicht durch jene *Serj. pubescens*, non *Kunth*, *Seem.*, i. e. *Paull. fuscescens K.*, mit welcher Grisebach die in Rede stehende Pflanze von Duchassaing (statt der von dessen Sammlung wirklich dahin gehörigen *Paull. fuscescens K.*) identificirt wissen wollte, sondern durch die *Serj. paucidentata*, non *DC.*, *Seem.*, welche ich unter *Serj. rhombea* ebenfalls aufgeführt habe, und mit welcher wieder Triana und Planchon irriger Weise die von Grisebach als *Serj. samydea* bezeichnete *Serj. mexicana* von Duchassaing aus Panama, ohne sie gesehen zu haben, zusammengebracht haben (Ann. Scienc. nat., 1862, p. 346).

Es sind somit 3 in dem eben Gesagten berührte Pflanzen von Duchassaing aus Panama wohl zu unterscheiden, welche im Herb. Grisebach sämmtlich, im Herb. Paris. aber nur theilweise enthalten sind, und dazu kommen dann, um die Aufzählung und Besprechung der von Duchassaing in Panama gesammelten Arten von *Serjania* und *Paullinia* zu einer vollständigen zu machen noch 3 weitere Pflanzen, von welchen ich die eine, meine *Serj. insignis*, nur im Herb. Paris., die beiden anderen, nämlich *Serj. atrolineata Sauv. et Wright* (*Serj. scatens Radlk.*) und *Paullinia Cururu L.* nur im Herb. Grisebach gesehen habe. Diese 6 Pflanzen von Duchassaing mögen im Folgenden, um jede Unklarheit über sie für die Zukunft auszuschliessen, rücksichtlich der Auffassungen, welche sie erfahren haben, gesondert in's Auge gefasst sein, und zwar in der Reihenfolge, wie sie im Vorausgehenden berührt worden sind.

1. An erster Stelle ist zu nennen die von Grisebach als *Serj. samydea* beschriebene *Serjania mexicana W.*, welche Grisebach mit Unrecht von der gleichfalls zu *Serj. mexicana* gehörigen *Serj. pubescens Kunth* unterscheiden zu müssen und ebenso unrichtig mit *Serj. velutina* (non *Camb.*) *var. pellucido-punctata Seem.*, d. i. der späteren *Serj. Seemanni Tr. & Pl.* vereinigen zu müssen glaubte. Triana und Planchon trennten mit Recht die ihnen aus Autopsie bekannte Pflanze Seemann's von der im Pariser Herbare nicht vorhandenen und ihnen desshalb unbekannt gebliebenen Pflanze Duchassaing's, vereinigten aber mit der letzteren unrichtiger Weise eine andere Pflanze Seemann's, die *Serj. paucidentata*, non *DC.*, *Seem.*, i. e. *Serj. rhombea R.* (coll. Seemann n. 599/1), welche allerdings mit einer Pflanze von Duchassaing, aber nicht mit dieser identisch ist, sondern mit einer von Triana

und Planchon, wieder irrthümlich, zu *Paull. velutina DC.*, d. i. *Paull. fuscescens Kunth* gerechneten (s. unter 2 und 3).

2. Eine zweite ist die von Grisebach bei seiner Besprechung der vorigen Pflanze Duchassaing's in den Novitiae Fl. Panam. mit einer von Seemann fälschlich auf *Serj. pubescens K.*, i. e. *Serj. mexicana*, bezogenen Pflanze, der *Serj. pubescens*, non *Kunth*, *Seem.* (Seemann n. 597 sammt der als *forma glabrescens* von Seemann, resp. Tr. & Pl. bezeichneten n. 1642), d. i. *Paullinia fuscescens Kunth*, ebenfalls unrichtiger Weise identificirte *Serjania rhombea Radlk.*, welche auch Triana und Planchon in einem Exemplare des Pariser Museums auf *Paull. fuscescens Kunth* oder nach ihrer Ausdrucksweise auf *Paull. velutina DC.* bezogen haben, indem sie zugleich darin die folgende, wirklich zu *Paull. fuscescens K.* gehörige, von Grisebach als *Paull. fusca* beschriebene Pflanze erkannt zu haben glaubten.

3. Eine dritte ist die wirklich zu *Paullinia fuscescens Kunth* gehörige, somit auch mit der unter 2. erwähnten *Serj. pubescens*, non *Kunth*, *Seem.* (*forma glabrescens Seem.*, resp. *Tr. & Pl.*, Seemann n. 1642) zusammengehörige Pflanze, welche Triana und Planchon in einem schwach behaarten, von Duchassaing an das Pariser Museum mitgetheilten Exemplare richtig mit der eben genannten Seemann'schen Pflanze zusammengebracht, sammt ihr aber auf die ihnen nicht genügend klar gewordene *Paull. carthagenensis Jacq.*, d. i. *Serj. curassavica R.* bezogen haben, und welche Grisebach in etwas stärker behaarten Exemplaren als eine neue, „der *Paull. fuscescens Kunth*“ („*Paull. pubescens* apud DC. sphalmate“, wie er richtig beifügt) verwandte Art von *Paullinia* unter dem Namen *Paullinia fusca* in den Novitiae Flor. Panamens. beschrieben hat. Triana und Planchon führen in der Synonymie der *Paull. velutina DC.*, d. i. *Paull. fuscescens K.*, sowohl diese *Paull. fusca Griseb.* als mit Recht auch die *Serj. pubescens*, non *Kunth*, *Seem.* auf, abgesehen von der eben erwähnten *forma glabrescens* (Seemann n. 1642), die aber auch hieher gehört hätte. Die im Materialienverzeichnisse dagegen von ihnen neben Fendler n. 43 erwähnte Pflanze von Duchassaing aus Panama ist nicht, wie man meinen sollte, die *Paull. fusca Griseb.* Es ist darunter nach dem Ausweise des Pariser Herbariums — und auf dieses ist hier zurückzugreifen, da Triana und Planchon die betreffende Pflanze von Duchassaing nicht, wie bei *Serj. samydea*, mit dem Beisatze „fide Grisebach“ aufführen, dadurch also andeuten, dass sie eine von ihnen selbst gesehene Pflanze meinen — vielmehr das dort befindliche, schon unter 2. erwähnte Exemplar der *Serj. rhombea R.* zu verstehen, mit welchem auch die daneben genannte Pflanze von Fendler, n. 43, nach Gattung und Art übereinstimmt. Ich habe diese beiden Pflanzen unter *Serj. rhombea* in der Monographie von *Serjania* p. 325 bereits aufgeführt, ohne jedoch auf ihre Deutung durch Triana und Planchon damals zu achten, so dass das entsprechende Synonym „*Paullinia velutina*, non *DC.*, *Triana & Planch.*, Ann. Scienc. nat., 1862, p. 358 partim“ erst jetzt bei den Ergänzungen zu *Serj. rhombea* (s. unten) seinen Platz findet.

Es ist die *Serj. rhombea* aus der Sammlung von Duchassaing somit sowohl von Grisebach wie von Triana und Planchon mit der *Paull. fuscescens Kunth* zusammengeworfen worden — von dem ersteren (s. unter 2.) mit weniger behaarten, von den letzteren mit stärker behaarten Exemplaren derselben (*Paull. fusca Griseb.*), wie sie auch in den Formen der nichts anderes als die *Paull. fuscescens Kunth* darstellenden *Serj. pubescens*, non *Kunth*, *Seem.* (coll. Seemann n. 1642 einerseits, n. 597 andererseits) vorliegen, und das ist bei der von Exemplar zu Exemplar wechselnden Behaarung der *Serj. rhombea* ebenso wie der *Paull. fuscescens* leicht verständlich. Andererseits ist die *Paull. fuscescens* der Sammlung Duchassaing's weder von Grisebach noch von Triana und Planchon in den ihnen vor Augen gewesenen Exemplaren direct als solche erkannt worden.

4. Als vierte Pflanze aus der Sammlung von Duchassaing mag nun die *Serjania insignis Radlk.* genannt sein, welche Grisebach nicht besass und desshalb übergangen hat. Triana und Planchon haben sie irriger Weise der von ihnen nur theilweise richtig aufgefassten *Serj. paniculata Kunth* beigesellt, zu welcher sie auch von Seemann als *Serj. paniculata* unrichtig bestimmte Exemplare der *Serj. mexicana W.* gerechnet haben.

5. Die fünfte ist die früher noch nirgends erwähnte *Serjania atrolineata Sauv. et Wr.* (*Serj. scatens Radlk.*), welche mir erst aus dem Herbarium Grisebach bekannt geworden ist, und welche so erst in den Ergänzungen zu der genannten Art (s. oben p. 116) ihre Stelle finden konnte. Grisebach hat sie in seinem Herbarium mit einer nahe verwandten Art, Duchassaing mit einer ferner stehenden identificirt, worauf weiter einzugehen keine Veranlassung gegeben ist.

6. Die sechste endlich ist die von Grisebach in den Novitiae Fl. panam. genannte und auf Grund dessen auch von Triana und Planchon aufgeführte *Paullinia Cururu L.*, welche Grisebach richtig erkannt hat, obwohl sie ihm unter einem nicht zu veröffentlichenden neuen Gattungsnamen zugekommen war, zu dessen Ertheilung sich der Sammler durch die rothen Samenkörner der Pflanze veranlasst gefühlt hat.

Eine kurze Zusammenstellung der Synonymie und Litteratur für die ersten 4 dieser Pflanzen von Duchassaing mit Einschluss der erwähnten Pflanzen anderer Sammler aus Panama ist folgende:

1. Serjania mexicana W. (Serj. samydea Griseb., Hemsley; Tr. & Panch. part.). Huc: Serj. paniculata, non Kunth, Seem.; Tr. & Planch. part.

2. Serjania rhombea Radlk. (Serj. pubescens, non Kunth, nec Seem., Griseb.; Paull. velutina, non DC., Tr. & Planch. part., incl. Fendler n. 43). Huc: Serj. paucidentata, non DC., Seem. (Serj. samydea, non Griseb., Tr. & Planch. part.).

3. Paullinia fuscescens Kunth (Paull. fusca Griseb.; Paull. velutina DC. apud Tr. & Planch. part., nempe quoad syn. Griseb., minime quoad collect. Duchassaing cum coll. Fendler, n. 43, enumeratam, ad Serj. rhombeam R. recensendam; Paull.

carthagenensis, non Jacq., Tr. & Planch., partim, incl. syn. „Serj. pubescens, forma glabrescens Seem.“). Huc: Serj. pubescens, non Kunth, Seem. incl. forma glabresc. Seem., resp. Tr. & Pl.

4. Serjania insignis Radlk. (Serj. paniculata, non Kunth, Tr. & Pl. part.).

Nur die letzte der obigen 6 Pflanzen von Duchassaing war, wie man sieht, gleich unter dem rechten Namen zur Veröffentlichung gelangt. Eine andere, die fünfte, ist überhaupt vor heute noch nicht veröffentlicht gewesen. Von den übrigen vier war keine, weder von Grisebach noch von Triana und Planchon richtig bestimmt worden. Doch haben Triana und Planchon zwei derselben richtig mit panamischen Pflanzen aus anderen Collectionen zusammengebracht, die zu *Serj. rhombea* gehörige mit Fendler n. 43 (nicht aber auch mit der ebenfalls dahin gehörigen Seemann n. 599/1) und die zu *Paullinia fuscescens* gehörige (in schwach behaarter Form) mit *Serj. pubescens*, non *K.*, *Seem. forma glabrescens*. Grisebach weiter kam bei einer Pflanze der richtigen Auffassung wenigstens in der Beurtheilung der Verwandtschaftsverhältnisse sehr nahe, durch die Vergleichung nämlich seiner *Paull. fusca* mit der *Paull. fuscescens Kunth*, während er für seine *Serj. samydea* nur Unterschiede gegenüber der damit identischen *Serj. pubescens Kunth*, d. i. *Serj. mexicana* hervorzuheben wusste.

Nur die so mannigfachen Missgriffen ausgesetzt gewesenen ersten 3 von diesen 6 Pflanzen sind auch in der Sammlung von Seemann aus Panama enthalten; doch ist das für die erste derselben, *Serj. mexicana*, bei den früheren Autoren unbeachtet geblieben, da sie unter dem von Seemann ihr gegebenen, von Triana und Planchon wiederholten, falschen Namen „*Serj. paniculata Kunth*“ nicht leicht zu erkennen war.

Dass diese weit verbreitete Art, *Serj. mexicana W.*, überhaupt weder von Seemann, noch von Grisebach, noch von Triana und Planchon in den ihnen aus Panama vor Augen gewesenen Materialien erkannt und von den letzteren dafür, statt der *Serj. paniculata* Seem., vielmehr die zu *Serj. rhombea* gehörige *Serj. paucidentata* Seemann (in deren Deutung als *Serj. samydea*) genommen wurde, während von ihnen Materialien der *Serj. mexicana* aus Neu-Granada unter dem Namen *Serj. floribunda* als neue Art aufgestellt wurde (was damit zum achten Male für die *Serj. mexicana* stattfand), mag einigermassen durch die Formschwankungen dieser Art entschuldiget werden, die übrigens doch nur auf unwesentliche Dinge wie Stacheln und Haare, Blattstielberandung und Blattgliederung u. s. w. sich erstrecken, wie schon in Zusatz n. 3 der Monographie von *Serjania*, p. 250, des näheren erörtert ist.

93. Serjania longipes Radlk. (86, p. 256.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Sodiro! (Ecuador, pr. Guayaquil, in collibus sylvaticis, m. Aug. 1872, flor.; Herb. Haynald).

94. Serjania brevipes Benth. (87, p. 257.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Sodiro! (Ecuador, pr. Guayaquil, in collibus sylvaticis, m. Aug. 1872, flor., m....? fruct.; Hb. Haynald).

96. Serjania brachycarpa Asa Gray. (89, p. 259.)

Als Litteraturstellen sind beizufügen:

Serjania brachycarpa Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 205 n. 3.
— — Watson in Proceed. Amer. Acad. XVII (1882) p. 337; coll. Palmer n. 125!

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Berlandier n. 2271! (Victoria de Tamaulipas, m. Nov. 1830, fruct.; Hb. Francqueville); Palmer n. 125! („Corpus Christi Bay, South Western Texas", ao. 1879—80; Hb. Kew.).

Zusatz. Die neuen Materialien dieser Art machen es mir beim Vergleiche mit ausnahmsweise kleinfrüchtigen Exemplaren der *Serj. racemosa* von Liebmann (n. 1, 2, 3) noch mehr als früher (sieh Zusatz 1 der Monographie) wahrscheinlich, dass die *Serj. brachycarpa* der *Serj. racemosa* unmittelbar anzuschliessen sei, ja dass sie vielleicht nur als eine kleinfrüchtige und zugleich durch besondere, mehr filzige Behaarung ausgezeichnete Form der *Serj. racemosa* anzusehen sei. Doch mag die Entscheidung darüber und über eine etwa sich daraus ergebende Veränderung in der Stellung der *Serj. racemosa* vertagt bleiben, bis reife Früchte von allen Formen der letzteren zur Vergleichung vorliegen werden.

Sectio XI. Physococcus.

97. Serjania Grosii Schlechtend. (90, p. 261.)

Beizufügen ist:

Serjania Grayii, sphalmate loco Grosii, Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 12; cf. supra p. 53.

98. Serjania emarginata Kunth. (91, p. 262.)

Beizufügen ist:

Serjania emarginata Hemsley in Salvin & Godm. Biol. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 9.

99. Serjania racemosa Schum. (92, p. 264.)

In der Litteratur sind zwei Stellen, welche sich auf inzwischen erst mir zu Gesicht gekommene Materialien beziehen, ganz oder theilweise zu eliminiren, ganz die Stelle von Asa Gray. welche in die auszuschliessende Litteratur und zu *Serj. macrococca R.* zu übertragen ist, und theilweise die Stelle von Turczaninow, welche bezüglich Ghisbreght n. 197 zu *Serj. goniocarpa R.* zu versetzen ist, wie das bezüglich eines Theiles der Nummer 876 von Botteri schon in der Monographie (p. 265) geschehen ist.

Es hat demnach zu heissen:

Serjania racemosa Turczaninow in Bullet. Mosc. XXXII (1859) Pars I, p. 267 partim, nempe quoad coll. Botteri n. 876"! (sphalmate „576") partim, ut in loco antecedente (partim nempe Serj. goniocarpa R.), exclusa vero „coll. Ghisbreght n. 197"! ad Serj. goniocarpam recensenda; cf. ibid.

Non Serjania racemosa Asa Gray Plant. Wright. Texano-Mexic. in Smithon. Contrib. III, Artic. V, Pars I (1850) p. 38 sub n. 98, „prope Monterey, coll. Eaton & Edwards"!; cfr. Serj. macrococca Radlk. (Caveas ne confundas hanc cum C. Wright n. 98, i. e. S. incisa Torrey.)

Neue Litteraturstellen sind:

Serjania racemosa Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 207 n. 22 incl. coll. Bilimek n. 240!, excl. vero coll. Eaton & Edwards ex Asa Gray hic enumerata, ad Serj. macrococcam R. recensenda.

— — Watson in Proceed. Amer. Acad. XVII (1882) p. 337; „coll. Dugès, ad Guanajuato" (specimen non vidi).

Als neues Synonym ist anzuführen:

Serjania spec. Hemsley l. c. (1879—81) p. 208 n. 35; „coll. Salvin & Godman, Guatemala ad Dueñas"!

Im Materialienverzeichnisse sind einzufügen:

Forma 1: Salvin & Godman n. 302! (Guatemala, Dueñas, ao. 1861; „Serj. sp." Hemsley l. c.; Hb. Kew.); Salvin sine no.! (Guatemala, Dueñas, Volcano de Fuego, alt. 5000 ped., m. Nov. 1873, flor.; Hb. Kew.); E. Kerber n. 129! partim (partim forma 3; Atoyac, Mexico, m. Nov. 1882, flor.; Hb. Kew.). — Forma 2: Coulter n. 880! (Mexico; Hb. Kew.). — Forma 3: Bilimek n. 240! (Mexico, Cuernavaca, ao. 1866; Hb. Kew.); Bourgeau n. 1744! (Mexico, in valle Cordubensi, m. Januar. 1866, fruct.; Hb. Boiss.); E. Kerber n. 129! partim (partim forma 1; Atoyac, Mexico, m. Nov. 1882, flor.; Hb. Gottingense). — Quoad formam indeterminata: Dugès (ad Guanajuato; teste Watson l. c.).

Die früher am Schlusse des Materialienverzeichnisses auf die Angaben von Turczaninow und Asa Gray hin aufgezählt gewesenen Pflanzen „Ghisbreght n. 197" und „Eaton & Edwards" sind zu anderen Arten, die erstere zu *Serj. goniocarpa R.*, die letztere zu *Serj. macrococca R.*, wie schon für die betreffenden Litteraturstellen angegeben, zu übertragen.

100. Serjania incisa Torrey. (93, p. 267.)

Der Litteratur ist beizufügen:

Serjania incisa Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 14.
Paullinia subulata Gray (nom. inedit.? anne P. subalata?) teste Watson in Proceed. Amer. Acad. XVII (1882) p. 337 in obs. ad „Serj.? inflat.", i. e. Serj. cystocarp. Radlk.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

C. C. Parry Flor. Mexic. n. 123½! („en route from San Luis Potosi to San Antonio, Texas", m. Aug. 1878, flor.; Hb. Kew.).

Zu der früher schon angeführten Pflanze von C. Wright, n. 98, sei bemerkt, dass ihr gelegentlich die Nummer 49 beigefügt ist, welche erst bei der Vertheilung der Sammlung entsprechend der Litteraturstelle bei Asa Gray (am früher angeführten Orte) durch die Nummer 98 ersetzt worden zu sein scheint.

101. Serjania sphenocarpa Radlk. (94, p. 269.)

Als Litteraturstelle ist nunmehr beizufügen:

Serjania sphenocarpa Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 30.

Der *Serjania sphenocarpa* R. sind zwei seit dem Jahre 1875 zur Veröffentlichung gekommene Arten als 102 (94, a) und 103 (94, b) wie im Conspectus Specierum anzureihen:

102. Serjania cystocarpa Radlk. (94, a.)

Serjania? inflata, non Poepp., Watson in Proceedings Americ. Acad. XVII (1882) p. 337; coll. Palmer n. 186!
Serjania cystocarpa Radlk. in Festrede üb. d. Methoden in d. bot. Systematik, bes. d. anat. Methode (1883) p. 32, annot.

Scandens, suffruticosa, puberula; rami herbacei, elongati, 5—6-sulcati, pilis crispulis brevissimis puberuli; corpus lignosum simplex; folia impari-pinnata, tri-quadrijuga, pinnis infimis subpinnatis, proximis trifoliolatis, summis simplicibus; foliola (parvula) ovato-lanceolata, inciso-dentata, acuta, terminalia in petiolulum attenuata, omnia praesertim subtus pilis brevibus crispulis adspersa, insuper glandulis microscopicis supra subtusque obsita, membranacea, fuscescentia, subtus pallidiora, impunctata, epidermide mucigera; petiolus communis partialesque teretiusculi, rhacheos segmenta superiora anguste marginata; thyrsi solitarii, rhachi abbreviata; flores mediocres; sepala exteriora subglabra, interiora pube brevissima crispa induta; stamina pilosiuscula; germen subglabrum, stylus elongatus, hirtello-pubescens; fructus sectionis obovatus, basi obtusius-

culus, apice abrupte rotundatus, glaber, loculis magnis reticulato-nervosis dorso carinatis ecristatis infra medium dorsum in alas loculis ipsis angustiores et basin versus angustatis productis, pericarpio tenui membranaceo, endocarpio pilis singulis adsperso; semen ad medium loculum insertum, subglobosum (— immaturum).

Folia 5—7 cm longa, 4—5 cm lata; foliola terminalia circ. 2 cm longa, 1 cm lata, reliqua minora. Thyrsi folia subaequantes, pedunculo communi gracillimo, rhachi brevi, vix 1-centimetrali; cincinni stipite circ. 3 mm longo suffulti, abbreviati, minutissime puberuli; pedicelli alabastris obovoideis 1,5—2 mm longis paullo longiores. Flores hermaphroditi: Sepala interiora (libera) exterioribus duobus longiora, 3,5 mm longa. Petala 5,5 mm longa, 2,5—3 mm lata, superiora ex obovato, inferiora ex elliptico-oblongo attenuata, intus glanduligera; squamae (cristis exclusis) quam petala dimidia breviores, margine villosiusculae, superiores crista obovata subemarginata appendiceque deflexa longiuscula villosa, inferiores crista oblique ovata instructae. Tori glandulae superiores et inferiores subaequales, ovatae, acutae. Stamina pilosiuscula, antherae subglabrae. Germen obovato-triquetrum, glandulis microscopicis nec nisi in angulis pilis brevibus obsitum; stylus germen aequans, totus hirtello-pubescens, apice breviter trifidus. Flores masculi: Sepala, petala, tori glandulae et stamina (excepta longitudine) ut in femineis; germinis rudimentum parvum, trigonum, glandulosum, stylo rudimentario apice trifido coronatum. Fructus 2,5 cm („pollicem vel ultra" Watson) longus, superne 1,8 cm latus, sub loculis ad fructus axem 1,7 cm longis in alas margine 13 ad fructus axem 8 mm longas angustatus, basi 8 mm latus.

In Mexico septentrionali: Dr. Edward Palmer n. 186! (Cohahuila, „in the Caracol Mountains, South East of Monclova", m. Aug. 1880, flor., Hb. Boissier; fructum remittendum communicavit cl. Watson, sub nom. „*Serj.? inflata Wats.*").

Zusatz. Die Pflanze ist, wie schon Watson a. a. O. hervorgehoben hat, sehr nahe verwandt mit der gleichsam einen Uebergang von *Serjania* zu *Cardiospermum* darstellenden *Serj. macrococca Radlk.* (s. darüber die Monographie von *Serjania*, p. 271, Zusatz n. 1) und der damit wieder (am gleichen Orte, p. 272) als nächst verwandt bezeichneten *Serj. incisa Torrey*, besonders mit der letzteren. Die Unterschiede der *Serj cystocarpa* von *Serj. incisa*, welch' letztere mir zur Vergleichung leider gegenwärtig nicht vorliegt, sind besonders: Etwas minder hohe Zusammensetzung des Blattes, Fehlen der bei *Serj. incisa* die durchsichtigen Punkte bedingenden Secretzellen nahe der oberen Blattseite, etwas grössere Blüthen und abweichende Verhältnisse der Behaarung, wie schon der Zweige, so namentlich auch des Griffels und der Frucht, welch' letztere auch in ihrer Gestalt etwas verschieden erscheint.

Kann ich so rücksichtlich der Verwandtschaftsverhältnisse ganz der Auffassung von Watson beipflichten, so muss ich dagegen der von ihm a. a. O. ausgesprochenen Meinung entgegentreten, dass es vielleicht besser sein würde, die in Rede stehenden Arten alle zu *Cardiospermum*, statt zu *Serjania*, zu verweisen. Ich habe diese Frage mit Rücksicht auf *Serj. macrococca* schon früher in nähere Erwägung gezogen und kann nur wiederholen, was ich schon damals als Ausschlag gebend für die Stellung derselben bei *Serjania* bezeichnet habe: die, wenn auch noch so sehr reducirte, doch deutliche Flügelbildung an der Frucht und das schizocarpe Verhalten bei der Fruchtreife, septicide Trennung nämlich der Frucht in drei geschlossen bleibende, je einem Fruchtblatte und Fruchtfache entsprechende Fruchtknöpfe (cocci) und Ablösung derselben

von der stehen bleibenden, oben stärker und 3-kantig oder 3-schneidig erscheinenden Fruchtaxe. Bei *Cardiospermum* tritt eine Trennung der Fruchttheile, wo überhaupt eine solche zu beobachten ist, gewöhnlich zwischen den Scheidewänden und den peripherischen Wänden der Fächer auf, also eine septifrage Dehiscenz, ebenso wie bei der Gattung *Paullinia*. Nur bei den jüngst durch die Güte des Herrn Watson mir zugekommenen Früchten einer neuen *Cardiospermum*-Art, *Cardiospermum dissectum m.* (*Urvillea dissecta Watson* in Proceed. Amer. Acad. XXI, 1886, p. 447, c. syn. „*Serjania* (?) *dissecta*“ *Watson* in sched.) ist eine septicide Zerklüftung der Frucht, welche neben septifrager auch bei *Urvillea* (die eine bei diesen, die andere bei jenen Arten) vorkömmt, in dem unteren Theile der Frucht wenigstens künstlich herstellbar (später vielleicht auch spontan eintretend), in dem oberen Theile aber nur unter gewaltsamer Zerreissung. Die Fruchtaxe erstreckt sich hier nur durch die untere Hälfte der Frucht bis zur Insertionsstelle der Samen; über dieser Stelle spaltet sie sich in drei Arme, von denen je einer fest mit dem inneren Rande der in der oberen Fruchthälfte nicht mehr vollständig ausgebildeten und in der Axenlinie nicht mehr vereinigten Scheidewände verbunden ist, die Zerklüftung hier hindernd. Bei *Serjania* findet sich zwar auch gelegentlich über der Insertionsstelle der Samen eine Längsgliederung und Trennung der hier verbreiterten Fruchtaxe in 3 ihren Kanten oder Schneiden entsprechende Arme, welche im Griffel wieder mit einander verbunden sind (sehr deutlich z. B. bei *Serjania meridionalis*); aber dadurch ist die Ablösung der Fruchtfächer in Form geschlossener Fruchtknöpfe nicht gehindert, auch nicht bei den Arten mit *Cardiospermum*-Habitus, wie *Serjania macrococca* mit reifer Frucht mir zeigt.

Was das neue *Cardiospermum dissectum* m. betrifft, bezüglich dessen auf die Beschreibung von Watson a. a. O. verwiesen sein mag, so gehört dasselbe nach dem, was die von Watson mir übersendeten Früchte ersehen lassen, zu jenen *Cardiospermum*-Arten der Section *Brachyadenia*, welche sich durch Getrenntbleiben des dritten und fünften Kelchblattes, somit durch fünf (freie) Kelchblätter auszeichnen, wie *Card. macrolophum* m. und *Card. procumbens* m. (s. Radlkofer, über *Sapindus* etc., Sitzungsber. d. Münchener Akad., VIII, 1878, p. 261, Anmerk.). Die oberen, grösseren, auf Seite des vierten Kelchblattes stehenden Drüsen des Discus sind eiförmig, bald spitz, bald abgestumpft und wie die Spitze des kurz säulenförmigen Torus mit den Insertionsstellen der Staubgefässe schwach kurzhaarig oder ziemlich kahl; die seitlichen Drüsen sind kleiner, niederer, schief eiförmig oder elliptisch. Die Frucht trägt nicht deutlich abgesetzte Flügel, wie die Serjanien-Früchte, bei welch' letzteren die Gefässbündel nach abwärts und auswärts zum Rande der Flügel verlaufen. Ihre Fächer sind vielmehr längs der Rückennaht nur scharf gekielt, allerdings übrigens der Kiel nach unten zu gleichsam durch Aneinanderlegen und Verwachsen seiner Randpartieen in einen schmalen Kamm ausgebildet, der aber in der netzförmigen Beschaffenheit seiner Aderung sich kaum von der übrigen Fachwandung mit im wesentlichen von den Ansatzstellen der Scheidewände aus schief aufwärts gegen die Rückennähte ziehenden

und netzartig anastomosirenden Gefässbündeln unterscheidet. Darnach lässt sich die schmale Flügelung der Fächer, wenn man so die Kammbildung nennen will, eher mit jener der flügelfrüchtigen *Paullinia*-Arten als mit der von *Serjania* vergleichen. Das hat auch Watson schon berührt in den Worten: „The mature fruit of the present species is essentially different, however, from that of *Serjania*, and does not differ greatly from that of *Urvillea*, to which genus therefore it is here referred." Von den *Urvillea*-Früchten aber weicht die Frucht des *Card. dissectum* einerseits durch die Gestalt, andererseits durch die derbere Textur beträchtlich ab, und der Habitus der Pflanze steht ebenfalls einer Vereinigung mit *Urvillea* entgegen, von welcher Gattung bisher ausnahmslos nur Arten mit gedreiten Blättern bekannt sind. Nichts dagegen hindert, die Pflanze als eine Art von *Cardiospermum* zu betrachten, bei welcher Gattung mannigfache Verschiedenheiten des Habitus wie der Fruchtbildung schon durch die bisher aufgestellten Arten vertreten sind.

103. Serjania (?) californica Radlk. (94, b.)

Cardiospermum? spec. Asa Gray Enumeration of Plants collected by L. J. Xantus in Lower California, Proceedings of the Americ. Acad. of Arts & Sciences, V (1862), p. 155 n. 19!

Serjania (?) californica Radlk. üb. Sapindus etc. in Sitzungsber. Münch. Acad., VIII (1878) p. 222, annot.

Scandens, suffruticosa, glabra; rami subherbacei, tenues, teretiusculi, leviter 6-sulcati; corpus lignosum simplex; folia 5-foliolato-pinnata; foliola parva, breviter ovata, obtusa, sublobato-dentata, terminale in petiolulum attenuatum, lateralia subsessilia, omnia membranacea, pallide viridia, opaca, glandulis microscopicis adspersa, lineolis pellucidis notata, epidermide mucigera (paginae superioris quoque stomatibus instructa); petiolus communis nudus, rhachis vix marginata; thyrsi solitarii, folia aequantes, rhachi perbrevi cincinnos 2—3 tantum gerente; flores mediocres; sepala glabriuscula.

Rami thyrsigeri diametro 0,5 mm, internodiis 1—3 cm longis. Folia 3,5 cm longa, 2,3 cm lata; foliola 1 cm longa, fere totidem lata. Thyrsi pedunculo communi stricto, patenti, circ. 2 cm longo (apice bicirrhoso), rhachi 0,5 cm vix excedente; cincinni 2—3, parviflori; pedicelli alabastra obovoidea 2,5 mm longa subaequantes. Flores (masculi tantum suppetebant): Sepala intus tantum parce et minutim puberula. Petala ex obovato attenuata, intus dense glanduligera; squamae petalorum superiorum crista obcordata appendiceque deflexa triangulari barbata, petalorum inferiorum crista dentiformi obliqua instructae. Tori glandulae superiores ovatae, inferiores minores, subannulares, basi puberulae. Stamina basi villosa, antherae glabrae. Pistilli rudimentum glabrum.

In California inferiore (Mexici provincia) ad promontorium S. Lucas: Xantus n. 19! (ex Herb. A. Gray communicat.).

Zusatz. Was die Stellung dieser Pflanze betrifft, so wiederhole ich zunächst, was ich schon früher (a. ob. a. O. p. 223) darüber bemerkt habe: „Obwohl Früchte nicht vorhanden sind, so lässt sich doch aus dem Gepräge der Pflanze, von der ich vor kurzem ein Fragment aus dem Herb. Gray erhalten habe, mit ziemlicher Sicher-

heit entnehmen, dass dieselbe nicht zur Gattung *Cardiospermum*, wohin sie Gray mit der Bemerkung „the fruit unknown, and therefore the genus uncertain“ gebracht hat, sondern zur Gattung *Serjania* gehören dürfte. Sie hat äusserlich Aehnlichkeit mit der brasilianischen *Serjania orbicularis*, sowie mit *Serj. brachycarpa*, welch' letztere ihr zugleich, wie *Serj. incisa*, rücksichtlich des nördlichen Vorkommens nahe steht.“ Das letztere Moment im Zusammenhange mit dem Wuchse, der wie bei den vorausgehenden Arten (*Serj. incisa, sphenocarpa, cystocarpa*) und der folgenden (*Serj. macrococca*) an den von *Cardiospermum* sich anschliesst, macht es zulässig, der Pflanze vor der Hand einen Platz zwischen den eben genannten Arten anzuweisen.

104. Serjania macrococca Radlk. (95, p. 270.)

Als Litteraturstellen, beziehungsweise Synonyme (s. ob. p. 53 die Ergänzungen zu n. 118 der chronologischen Tabellen) sind anzuführen:

Serjania racemosa (non Schum.) Asa Gray Plant. Wright. Texano-Mexic. in Smithon. Contrib. III, Artic. V, Pars I (1850) p. 38 sub n. 98, „prope Monterey, coll. Eaton & Edwards“! (Caveas ne confundas hanc cum C. Wright n. 98, i. e. S. incisa Torrey). Cf. obs. A.

— — Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 207 n. 22 partim, solummodo nempe quoad coll. Eaton & Edwards! Cf. loc. anteced. et obs. A.

Serjania macrococca Hemsley l. c. p. 207 n. 17.

Serjania spec. Hemsley l. c. p. 208 n. 36; „coll. Eaton & Edwards, Herb. Kew.“!

Cardiospermum molle (non Kunth) Hemsley l. c. p. 209, n. 5, partim, nempe quoad „Linden n. 899“! Cf. obs. B.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Linden n. 899! (Mexico, prov. Vera Cruz, Puenta nacional, m. Jun. 1838, flor.; Hb. Kew., uni plagulae cum *Cardiosp. molli Kunth*, i. e. *Cardiosp. Corindo L.*, Galeotti n. 4302 partim, affixa; „*Cardiosp. molle*“ Hemsley l. c.; cf. obs. B.); Eaton & Edwards! (Mexico, Nuevo Leon, Monterey, ao. 1846; Hb. Kew.: „with n. 10“ [i. e. *Urvillea mexicana A. Gray = Urvillea ulmacea Kunth, f. 1 genuina Radlk.*] Hb. Benth.; *Serj. racemosa A. Gray* l. c., Hemsley l. c.); Bates! (Mexico; Herb. Kew.).

Zusatz A. Zu der Pflanze von Major Eaton und Doctor Edwards, welche Asa Gray a. a. O. als zu *Serj. racemosa* gehörig betrachtet hat, ist zu bemerken, dass sie leider nicht mit einer Nummer versehen ist, was ihre Identificirung erleichtern würde. Trotz dem glaube ich bei der Aehnlichkeit nicht fructificirter Exemplare der *Serj. macrococca* mit der dritten Form der *Serj. racemosa*, und da eine andere Pflanze, auf welche sich die Angabe von Asa Gray beziehen liesse, nicht vorhanden ist, die aus dem Herb. Bentham stammende, von Torrey mitgetheilte Pflanze („with n. 10“), welche ich im Herb. Kew vor kurzem näher zu untersuchen Gelegenheit hatte, mit genügender Sicherheit auf die Angabe von Gray beziehen zu können.

Das Gleiche gilt bezüglich derselben von Hemsley unter *Serj. racemosa* aufgeführten Pflanze.

Zusatz B. Die Verwechselung der im Habitus sicherlich einem *Cardiospermum* (s. p. 271 der Monographie, Zusatz 1) sehr ähnlichen *Serj. macrococca* mit *Cardiospermum*, wie sie schon in der Sammlung von Galeotti unter n. 4302 statt gefunden hat, und worauf ich durch den Beisatz „partim" zu dieser Nummer und den eben dahin bezüglichen Zusatz 3 (p. 272) aufmerksam gemacht habe, hat sich im Herb. Kew in ganz ähnlicher Weise rücksichtlich einer Pflanze von Linden, n. 899, wiederholt, indem sie mit dem zu *Cardiospermum* gehörigen Theile von Galeotti n. 4302 auf ein Blatt aufgeklebt und dann auch von Hemsley a. ob. a. O. unter *Cardiospermum* publicirt wurde. Meine Absicht dergleichen durch den erwähnten Zusatz hintanzuhalten ist somit leider nicht erreicht worden.

105. Serjania sordida Radlk. (96, p. 272.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania sordida Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 29.

Nach einem von Bourgeau gesammelten Fruchtexemplare der Pflanze (s. unten im Materialienverzeichnisse) ist zur Characteristik und Beschreibung Folgendes beizufügen:

Fructus ovatus, 2,2 cm longus, 1,8 cm latus, basi et apice excisus, infra loculos paullulum constrictus, apice pube velutino brevi sordide fuscido indutus, caeterum puberulus, loculis parum ventricosis, ellipsoideis vel subglobosis, basi oblique cuneatis, subplicatis, dissepimentis parvis e basi angusta superne parum dilatatis quam loculi ipsi fere dimidio brevioribus et loculorum partem tertiam superiorem vix attingentibus, alis basin versus dilatatis, pericarpio tenui, endocarpio glabro; semen prope loculi basin insertum, obovoideum, badium, hilo ad basin sublaterali macula arillosa pallida parva notato; embryo homotropus; cotyledon exterior incurva, interior biplicata.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Botteri & Sumichrast n. 1871! (Mexico; Hb. van Heurck); Bourgeau! (Mexico, in valle Cordubensi, m. Januar. 1866, fruct.).

Zusatz A. Die von Bourgeau gesammelten Früchte der *Serj. sordida*, welche mir erst jetzt bekannt geworden sind, bilden nicht gerade ein Hinderniss, die *Serj. sordida* in der Section *Physococcus* zu belassen, würden aber auch einer Versetzung derselben zu Section *Phacococcus*, welche seiner Zeit, in Zusatz 1, p. 272 der Monographie, in Erwägung gezogen worden ist, nicht unbedingt im Wege stehen — das heisst, es ist an ihnen das, was die für die Section *Physococcus* characteristischen Früchte auszeichnet, ein den reifen Samen an Grösse merklich übertreffendes Fruchtfach, nicht in entschiedener Weise ausgebildet. Es stehen so die Früchte der *Serj. sordida* etwa in der Mitte zwischen denen der *Serj. mexicana* und denen der *Serj. racemosa*. Vor einer allenfallsigen Veränderung der Stellung der *Serj. sordida* dürfte

es jedenfalls angemessen sein, das Bekanntwerden der Früchte auch der übrigen ihr als nahe stehend bisher betrachteten Arten abzuwarten, um nicht vorzeitig eine Aufhebung des Contactes mit diesen Arten zu bewerkstelligen.

Zusatz B. Rücksichtlich der im Materialienverzeichnisse aufgeführten Pflanze von Galeotti n. 4313 (Tanetze, prov. Oaxaca) mag die Frage als eine offene betrachtet werden, ob dieselbe nicht besser mit der Pflanze von Jürgensen aus derselben Gegend (Tanetze) zu identificiren und zu *Serj. subtriplinervis* zu ziehen sei. Wie ich mich erinnere, war das meine ursprüngliche Anschauung, und demgemäss findet sich p. 79 der Monographie von *Serjania* unter n. 122 Galeotti als erster Sammler der *Serj. subtriplinervis* aufgeführt, was erst in den Addendis, entsprechend der einstweilen erfolgten Unterbringung der Pflanze bei *Serj. sordida* geändert wurde. Die gegenwärtig mir vorliegenden Exemplare Galeotti's aus dem Brüsseler Herbare reden der ursprünglichen Anschauung das Wort, namentlich mit Rücksicht auf das Ergebniss der mikroskopischen Untersuchung des Blattes, welche hier eine ähnliche braune Färbung des Inhaltes in den Secretschläuchen der oberen und unteren Blattseite erkennen liess, wie bei der Pflanze von Jürgensen, welche die Grundlage der *Serj. subtriplinervis* bildet. Es bleibt hervorzuheben, dass die betreffenden Materialien nie vollständig zur Vergleichung vereiniget waren, es auch gegenwärtig nicht sind, dass vielmehr jetzt, wie früher, die eine oder die andere Angabe nur auf den bei der Durchsicht auswärtiger Herbarien gemachten Notizen fusst; ferner, dass die Pflanze von Galeotti aus Tanetze zwischen der von Jürgensen aus der gleichen Gegend einerseits, und den Materialien der *Serj. sordida* aus Vera Cruz etc. andererseits, eine Mittelstellung einnimmt, welche schon früher eine künftige Subsumirung auch der Pflanze von Jürgensen unter *Serj. sordida* in Betracht ziehen liess (s. das Ende des Zusatzes zu *Serj. subtriplinervis*, Monographie p. 274). Unter diesen Umständen erscheint es geeignet, die Veränderung in der Stellung irgend einer dieser Pflanzen von dem Bekanntwerden reichlicheren Materiales und namentlich der Früchte auch der um Tanetze ihren Standort besitzenden Pflanzen abhängig zu machen.

106. Serjania subtriplinervis Radlk. (97, p. 273.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania subtriplinervis Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 31.

Zu vergleichen ist das in Zusatz B bei der vorausgehenden Art Gesagte.

107. Serjania acuta Triana & Planch. (98, p. 274.)

Den Litteraturstellen ist nun beizufügen:

Serjania acuta Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 205 n. 1.

108. Serjania polystachya Radlk. (99, p. 276.)

Den Litteraturstellen, beziehungsweise Synonymen (s. oben p. 53) ist beizufügen:

Paullinia polystachya Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 210 n. 7, „coll. Galeotti n. 4309“!

Paullinia macrostachya (sphalmate loco polystachya) Hemsley l. c. p. 207 sub n. 21. Cf. loc. sequ. Caveas ne confundas hanc cum Serjania macrostachya Radlk., cf. supra n. 36.

Serjania polystachya Hemsley l. c. p. 207 n. 21, „coll. Galeotti n. 4309“!

109. Serjania vesicosa Radlk. (100, p. 277.)

Als Litteraturstelle ist nun zu erwähnen:

Serjania vesicosa Hemsley in Salvin & Godm., Biol. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 34.

113. Serjania mucronulata Radlk. (104, p. 282.)

Nach einem von Pearce gesammelten Fruchtexemplare der Pflanze (s. unten im Materialienverzeichnisse) ist nun das in der Characteristik und Beschreibung über die Frucht Gesagte durch folgende Angaben zu ergänzen, beziehungsweise zu ersetzen:

Fructus inter illos sectionis „Dictyococcus“ et sectionis „Physococcus“ intermedius, cordato-ovatus, mediocris, 1,8 cm longus, 1,3 cm latus, basi et apice retusus, infra loculos non constrictus, glaber vel ad loculos hirsutus (in specimine Spruceano), dissepimentis angustissimis, loculis inde liberis superne tumidis et lateribus sibi invicem arcte adpressis fructus syncocci speciem praebentibus obverse subtetragono-pyramidatis dorso ecristatis infra apicem obtusum carinatis, carina in alam basi dilatatam continuata, basi oblique cuneatis, pericarpio reticulato-nervoso, endocarpio sclerenchymatico subfusco-villoso, in fructu immaturo glabro vel albo-floccoso (in specim. Spruceano); semen supra loculi basin insertum, clavato-oblongum, subtrigonum, badio-fuscum, hilo ad basin laterali macula arillosa pallida parva notato; embryo curvatus.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Sodiro! (Ecuador, m. Aug. 1872, sine flor. et fruct.; Hb. Haynald); Pearce! (loco non indicato; fruct.; Hb. Kew.).

Zusatz. Die früher nur fragweise hieher bezogene Pflanze von Spruce (n. 6367) mit noch nicht reifen Früchten stimmt in der Gestalt dieser und abgesehen von ihrer Behaarung vollkommen mit dem Materiale von Pearce überein. Ihre Stellung bei *Serj. mucronulata R.* erscheint darnach nunmehr als gesichert. Sie ist, wie schon früher als wahrscheinlich angenommen worden war (s. die Monographie p. 283, Zusatz 1) nur eine durch ihre Behaarung etwas abweichende Form, die eine besondere Hervorhebung als solche aber kaum erheischt.

115. Serjania sufferruginea Radlk. (117, p. 299.)

Diese früher in der Section XII, *Syncococcus*, unter n. 117 aufgeführte Art ist, wie neu hinzugekommenes Material von Pearce wahrscheinlich macht, aus der genannten Section zu entfernen und, so viel sich vor der Hand beurtheilen lässt, vermuthlich der *Serjania mucronulata* und *Serjania rigida* anzuschliessen. Das Nähere hierüber sieh in dem hier folgenden Zusatze.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

(?) Pearce! (Bolivia, Coroico, m. Maj. 1866, flor. et fruct. immat.; Hb. Kew.).

Zusatz. Ich habe die Pflanze von Pearce nicht direct mit jener von Ruiz aus Vitoc in Peru, welche die Grundlage der *Serj. sufferruginea* bildet, vergleichen können. Doch scheint mir die Zusammengehörigkeit beider kaum zweifelhaft zu sein. Die kleinen Unterschiede, welche zur Wahrnehmung kamen, haben kaum mehr als individuellen Werth. Dahin gehören für die Pflanze von Pearce etwas kleinere Blüthen, schmälere fast fadenförmige Kämme an den Schuppen der unteren Blumenblätter, grössere, bis 22 cm lange und 20 cm breite Blätter mit schmächtigeren Secretzellen, welche nicht als durchsichtige Punkte hervortreten, dafür aber mit breiteren Milchsaftschläuchen an der unteren Blattseite. Die Epidermiszellen besitzen, wie bei der Pflanze von Ruiz, keine verschleimten inneren Wandungen.

Die kaum halb reife Frucht der Pflanze von Ruiz gestattete früher die Annahme, dass der Pflanze neben den im Habitus ihr zunächst ähnlichen (wenn auch durch verschleimte Epidermiszellen abweichenden) Arten *Serj. grandis* und *Serj. dasyclados* in der Section *Syncoccus* ein Platz zukommen möchte. Die schon etwas weiter ausgebildete Frucht des Exemplares von Pearce spricht gegen diese Annahme und zeigt, dass bei der Fruchtreife die Scheidewände zwischen den Fruchtfächern sich nicht verbreitern und eine seitliche Verbindung der Fruchtfächer nicht vermitteln.

Demgemäss ist mit demselben Grade von Wahrscheinlichkeit, welcher für die Zusammengehörigkeit der Pflanze von Pearce mit der von Ruiz besteht, die Art aus der Section Syncoccus zu entfernen und anderwärts unterzubringen.

Dabei drängt sich zunächst die schon früher, in Zusatz 1 zu *Serj. sufferruginea*, p. 300 der Monographie, erwähnte habituelle Aehnlichkeit mit *Serj. mollis Kunth* aus der Section *Ceratococcus* als ein leitendes Moment hervor, welchem aber jede weitere Geltung durch den Umstand benommen wird, dass keinerlei Neigung zur Bildung hornartiger Fortsätze an den Seiten der Fruchtfächer sich wahrnehmen lässt.

Unter diesen Umständen scheint auf einen Anschluss der Pflanze an eine habituell ähnliche Art verzichtet werden zu müssen. Aber auch so lässt sich bei dem noch nicht voll ausgeprägten Character der Frucht, in welcher überdiess die Samen fehl geschlagen sind, kaum mehr als wieder nur eine Vermuthung über die Stellung der Pflanze gewinnen.

Da die Fruchtfächer des neuen Materiales ziemlich gross und seitlich aufgetrieben sind, so mag, worauf in dem erneuten Conspectus Specierum bereits Rücksicht genommen ist, vor der Hand an einen Anschluss bei *Serj. mucronulata* und *Serj. rigida* in der Sectio XI, *Physococcus*, als n. 115 gedacht werden, bei welchen Arten die Fruchtwandung, wie bei *Serj. sufferruginea*, derber als gewöhnlich in der Section *Physococcus* erscheint, und welchen sich die *Serj. sufferruginea* auch rücksichtlich der Zusammensetzung des Holzkörpers und, wenn man die rauhhaarige Form der *Serj. rigida* in Betracht zieht, auch nach ihrer Aussenseite sattsam anschliesst.

116. Serjania inflata Poeppig. (106, p. 285.)

Der Litteratur ist zur Vermeidung vor Verwechselungen beizusetzen:

Non Serjania inflata Watson in Proceed. Americ. Acad. XVII (1882) p. 337; cfr. supra p. 51 et p. 136 n. 102 (94, a) Serj. cystocarpa Radlk.

Sectio XII. Syncoccus.

117. Serjania meridionalis Camb. (107, p. 286.)

An die Litteraturstellen ist anzufügen:

Serjania meridionalis Griseb. Symb. ad Flor. argentin. in Abh. Götting. Ges. d. W. Bd XXIV (1879) p. 79, n. 451, partim, nempe quoad stirpem Entrerianam, Lorentz n. 636! in Hb. Griseb., quoad coll. Balansa n. 2485! et quoad patriae indicationes e Radlk. Monogr. Serj. repetitas, exclusa vero fide Hb. Griseb. stirpe foliis (sphalmate „foliolis") ternatis et sepalis tomentellis, i. e. Serjania hebecarpa Benth. forma 3 (cf. infra), exclusis porro observationibus parentheticis hanc stirpem spectantibus, exclusa denique var. foveata Griseb., i. e. Serjania foveata Griseb. Pl. Lorentz., supra sub n. 9 (6, b) inserta. Cf. observ.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Regnell I, 38**! (Brasil. prov. Minas Geraës, Caldas, m. Febr. 1869, alabastra; Hb. Holm.); id. III, 341! partim (partim *Urvillaea laevis Radlk.*; ibid. m. Jun. 1869, flor.); id. III, 350*! (ibid., m. Sept. 1869, fruct.); Mosén n. 1166! (Brasil. prov. S. Paulo, Serra de Caracol in margine sylvae, m. Apr. 1874, fruct.; Hb. Holm.); Dr. Wilh. Müller! (Bras. prov. Sta. Catharina, Blumenau; conf. Dr. Wilh. Müller in Spengel zool. Jahrbüch. I, 1886, p. 45, 48); Balansa n. 2485! (Paraguay „L'Assomption, dans les haies", m. Apr. 1874, fruct.); Lorentz n. 636! (Flora Entreriana, Arroyo de Mandisobi, m. Febr. 1876, flor.; Hb. Griseb.).

Zusatz. Grisebach hat an der oben angeführten Stelle der Symbolae ad Flor. argentin., wie sein Herbar des näheren ausweist, dreierlei Pflanzen miteinander vermengt. Es sind das:

1. Die echte *Serj. meridionalis Camb.*, die ihm in einem Blüthenexemplare von Lorentz, Flora Entreriana n. 636, und in einem Fruchtexemplare von Balansa, Plantes de Paraguay n. 2485 (beide oben verzeichnet), vor Augen war.

2. Eine Pflanze, auf welche sich vor allem die Bemerkung Grisebach's bezieht: „Variat praeterea foliolis (soll heissen: foliis) plerisque ternatis et sepalis tomentellis", ausserdem die in Einschaltungssätzen enthaltenen, später noch näher anzuführenden Angaben: „venulae solummodo aliquid pellucidae sunt"; „petala 2—3‴ longa"; „endocarpium sparsim adpresse puberulum". Dass diese Pflanze nicht zu *Serj. meridionalis* gehören konnte, war für den mit letzterer Vertrauten nach diesen Hinweisen sofort klar. Was es aber für eine Pflanze sei, darüber war nur mit Hilfe des Herb. Grisebach klug zu werden, in welchem sich dieselbe den unter 1 bezeichneten Materialien unmittelbar angereiht und von Grisebach eigenhändig als *Serj. meridionalis* bezeichnet vorfand,[1]) und zwar a) in Blüthen- und Fruchtexemplaren von Lorentz, unter n. 170 und mit der Bemerkung: Schwächliche, meist am Boden zwischen Gebüsch hinkriechende, wenig sich emporrankende Schlingpflanze am Ufer des Uruguay bei Concepcion, April 1875, und b) in nur mit Blüthen versehenen Exemplaren desselben Sammlers mit der Bezeichnung: Flora Uruguensis n. 574, Concepcion del' Uruguay, April 1876. Diese Exemplare gehören sämmtlich zu einer Form der *Serj. hebecarpa Benth.*, welche bei dieser der ausnahmsweise abgestutzten Früchte halber als *forma platycephala* (neben der normalen Form — *forma oxycephala* — und einer Uebergangsform zwischen beiden — *forma amblycephala*) hervorgehoben werden soll, und auf deren Verhältniss zu *Serj. meridionalis* ich sogleich zurückkommen werde.

3. Die schon unter n. 6, b betrachtete *Serj. foveata Griseb.*, welche des ihr in den „Plantae Lorentzianae" gegebenen Characters einer selbständigen Art von Grisebach selbst in den „Symbolae" entkleidet und als „*Serj. meridionalis var. foveata Griseb.* pedicellis longioribus, sepalis tomentellis" bezeichnet worden ist.

Bezüglich der unter 3. genannten Pflanze, die als die kürzer abzufertigende zuerst hier erlediget sein mag, bleibt es dahin gestellt, ob Grisebach bei ihrer Vereinigung mit *Serj. meridionalis* über den Umstand einfach hinweggegangen sei, dass er der *Serj. foveata* früher, wie seiner *Serj. fulta*, d. i. *Serj. glabrata Kunth*, nur 4 Kelchblätter zugeschrieben hatte, oder ob er seinen Irrthum auch hier erkannt habe, wie das für seine *Serj. fulta* auf der gleichen Seite (79) der Symbolae ersichtlich gemacht ist. Leider ist Grisebach für *Serj. fulta* bei der Eliminirung dieses Fehlers stehen

---

1) Um vollständig genau zu berichten, so lautet die handschriftliche Bezeichnung von Grisebach in seinem Herbare, wie bei einer an das Herb. zu Kew mitgetheilten Pflanze: „*Serjania meridionalis Camb. var. foveata Griseb.*", ist also der Bezeichnung der unter 3. zu erwähnenden Pflanze angepasst. Das steht mit dem Texte der Symbolae (p. 79) jedoch nicht im Einklange und ist desshalb hier nicht weiter zu berücksichtigen. Es wird bei *Serjania hebecarpa* der Platz sein, das näher zu beleuchten.

geblieben anstatt die Art selbst hinwegzuräumen, welches Loos dafür unverdienter Weise die andere der in den „Plantae Lorentzianae“ als neu aufgestellten beiden Arten, die *Serj. foveata*, getroffen hat. Ueber diese habe ich schon oben p. 85 bemerkt, dass ihre Hieherbeziehung als Varietät „mit längeren Blüthenstielen“ (genauer gesagt: Wickelstielen) „und kurzfilzigen Kelchblättern“ auf einem Urtheilsmangel über den Werth der in diesen Worten berührten Verhältnisse innerhalb der Gattung *Serjania* beruht. Eine Beachtung der ausdrücklichen Hervorhebung der „kahlen und zarten Kelchblätter“ in dem Zusatze zu *Serj. meridionalis*, Monogr. v. *Serj.* p. 287, hätte Grisebach über diesen Urtheilsmangel hinweghelfen können; aber freilich, er konnte ja darauf einen Verlass nicht mehr nehmen, nachdem er in meinen Angaben so viel Fehlerhaftes entdeckt hatte, wie bei der Besprechung der anderen von ihm hieher verschleppten Pflanze, der *Serj. hebecarpa f. platycephala*, gleich zu erörtern sein wird.

Die unter 2. erwähnte, von Grisebach mit *Serj. meridionalis* vermengte Pflanze, *Serj. hebecarpa Benth. forma platycephala m.*, sticht durch das gleiche Moment, das von Grisebach so sehr unterschätzte Indument der Kelchblätter, noch mehr als die eben besprochene *Serj. foveata* von *Serj. meridionalis* ab. Aber auch in anderen wichtigen Stücken ist sie so auffallend verschieden davon, dass es kaum verständlich erscheint, wie selbst Grisebach, obwohl man in dessen Schriften oberflächliche Untersuchung und mangelhafte Unterscheidung allenthalben zu finden gewohnt ist, sie unter *Serj. meridionalis* einmengen konnte, die ihm doch auch in vollständigem Materiale, in Blüthen- und Fruchtexemplaren, vorlag. Kaum verständlich auch ist es, wie für den, der diese beiden Arten, *Serj. meridionalis* und *Serj. hebecarpa*, nicht unterscheidet, die Gattung *Serjania* überhaupt mehr als eine Art zu besitzen scheinen kann. Die Blüthen der *Serjania hebecarpa*, und zwar auch der Form *platycephala*, sind — um nur einige Unterschiede in jenen Organen hervorzuheben, die Grisebach selbst berührt, andere aber, wie die Gestalt der Kämme an den Blumenblattschuppen und die Lage der Placenta bei Seite zu lassen — doppelt so gross als die der *Serj. meridionalis*; ihre Kelchblätter sind, statt kahl, dicht feinfilzig; ihre Blätter sind, statt doppelt, nur einfach gedreit, und zwar alle, nicht bloss die meisten, wie Grisebach in den oben schon angeführten Worten „Variat praeterea....“ sagt; das Endocarp ist nicht kahl, sondern mit angedrückten Härchen locker (oder bei der Hauptform dichter) besetzt; die Blätter endlich sind nicht, wie bei *Serj. meridionalis*, mit kleinen durchsichtigen Punkten (von verschleimten Epidermiszellen) oder Linien (von den an der unteren Blattfläche unabhängig von den Gefässbündeln hinziehenden Milchsaftschläuchen) versehen, sondern nur die Venen selbst (weil mit ihnen hier die Milchsaftschläuche verlaufen) sind etwas durchscheinend (vergl. das p. 38 nebst Anmerk. 1 über diese Milchsaftschläuche und die davon abhängigen durchsichtigen Linien Gesagte), auf welches etwas subtilere Verhältniss einzugehen hier gar nicht nothwendig gewesen wäre, wenn nicht Grisebach selbst in den gleich anzuführenden und theilweise schon erwähnten Worten dazu Veranlassung gegeben hätte. Von der *Serjania hebecarpa* also und ihrer durch Lorentz an Grisebach gelangten Form *platycephala*,

nicht von *Serj. meridionalis*, gilt all das, was Grisebach als fehlerhaft an meiner Characterisirung der *Serj. meridionalis* rügt und durch bessere, in den oben schon erwähnten Einschlusssätzen beigefügte Angaben zu ersetzen sucht, in den Worten: „Descriptio [*Serjaniae meridionalis*] apud Radlk. (*Serjania*, p. 286) peccat foliolis pellucido-punctatis v.-lineolatis (nam venulae solummodo aliquid pellucidae sunt), flore inter minores (petala enim 2—3‴ longa), endocarpio glaberrimo (quod sparsim adpresse puberulum)". Ich habe freilich zur Characterisirung der *Serj. meridionalis* nicht, wie Grisebach verlangt, die Charactere der *Serj. hebecarpa* zu verwenden gesucht, auf welch' letztere sich auch allein die noch weiter folgenden, schon wiederholt angezogenen Worte Grisebach's beziehen lassen: „Variat praeterea [*Serjania meridionalis*] foliolis [soll heissen: foliis] plerisque ternatis et sepalis tomentellis". Ich denke nicht, dass es nothwendig sein wird, darüber noch ein Wort weiter zu sagen. Zugleich denke ich nicht, dass mir irgend jemand zumuthen wird, die von Grisebach nach dieser seiner vermeintlichen Varietät der *Serj. meridionalis* versuchten Verbesserungen meiner Characteristik der *Serj. meridionalis* in irgend einem Theile zu acceptiren und damit Grisebach in der Confundirung der augenfälligst verschiedenen Arten zu folgen.

Es ist noch zu erwähnen, dass die eben berichtigte Missdeutung der *Serj. hebecarpa* nicht die einzige ist, welche diese Art durch Grisebach erfahren hat. Es stehen ihr noch drei andere Deutungen, deren keine das Richtige erreicht, in dem Herbare von Grisebach und theilweise auch in dessen Publicationen zur Seite, Deutungen, welche in zwei Fällen sogar auf zwei fremdartige Gattungen hinübergreifen, auf *Urvillea* und *Paullinia*, so dass hier wieder, und zwar in noch höherem Maasse als das schon für *Serj. glabrata* sich zeigte, der Fall vorliegt, dass zu ein und derselben Art gehörige Materialien von Grisebach nicht nur nicht auf die rechte Art bezogen, sondern nicht einmal als auf einander zu beziehende erkannt, vielmehr für verschiedene (bekannte oder angeblich neue) Arten aus zweierlei und dreierlei Gattungen gehalten worden sind, trotz aller Verschiedenheit davon — dass also, um es kurz zu sagen, Identisches von Grisebach für verschieden, selbst der Gattung nach verschieden und selbst als in dreifacher Richtung auseinandergehend angesehen wurde, während Verschiedenartiges, und zwar generisch Verschiedenes, für gleich genommen wurde.

Die in Rede stehenden drei anderen Deutungen der *Serj. hebecarpa* durch Grisebach bestehen in Folgendem:

1. Vermengung von Blüthenexemplaren der *Serj. hebecarpa* im Herbare und darnach auch in der betreffenden Beschreibung mit *Urvillea euryptera Griseb.*, d. i. *Urvillea uniloba Radlk.*

2. Vermengung von Blüthenexemplaren der *Serj. hebecarpa* im Herbare mit einer Art von *Paullinia*, *Paullinia elegans Camb.*, deren Charactere zum Glücke in den Symbolae von Grisebach mit Stillschweigen übergangen sind, so dass diese Ver-

mengung nicht offenkundig geworden ist. Von einer anderen Vermengung mit *Paull. elegans* war schon oben p. 95 unter *Serj. caracasana W.* die Rede.

3. Bezeichnung eines Fruchtexemplares, Balansa n. 2487, a, lediglich als Art von *Serjania* im Herbarium, unter Einreihung desselben am Schlusse der Gattung.

Die letzteren beiden Deutungen sind, ausser für die Darlegung der Unklarheit Grisebach's über die *Serj. hebecarpa*, belanglos.

Hinsichtlich der ersten ist hervorzuheben, dass die *Urvillea euryptera* Grisebach's nach Ausweis von dessen Herbar nichts anderes ist als die von mir aus *Serjania sinuata*, non *Schum., W. Hook.* gebildete *Urvillea uniloba* (s. Monogr. v. Serj., 1875, p. 173 und Ueber *Sapindus* etc., 1878, p. 264), welche Grisebach in seinen Symbolae (p. 78, n. 447), so dass der Vermengungen hier kein Ende wird, mit seiner *Urvillea Seriana*, das ist *Urvillea ulmacea Kunth* („Balansa 2491"), zusammen geworfen hat — unter noch weiterer Einmengung einer zu *Schmidelia guaranitica*, non *St. Hil., Griseb.* Symb. p. 80 n. 462, d. i. einer Form von *Schmidelia edulis* St. Hil. (*forma pubescens m.*, Lorentz & Hieron. n. 29, Oran m. Oct. 1873, flor.; Hb. Griseb.) gehörigen Pflanze von Lorentz & Hieronymus, n. 850 aus Tabaccal bei Oran (m. Sept. 1875, alabastra), von Grisebach in seinem Herbare als „*Urvillea Seriana* Gr." bezeichnet, auf welcher Pflanze überhaupt allein Grisebach's Aufführung dieser *Urvillea* für Argentinien beruht, und mit welcher Pflanze Grisebach zugleich den nur zu *Schmidelia* gehörigen Vulgärnamen „Chalchal" unrichtiger Weise auch zu *Urvillea* gebracht hat.[1]) Wenn er nun im Vergleiche mit der *Urvillea ulmacea* bei der ihr folgenden *Urvillea euryptera Gr.*, d. i. *U. uniloba R.* sagt: „Simillima praecedenti, sed flores majores (petala obovata, fere 2‴ longa), so sind es eben diese Maassangaben, aus welchen (ähnlich wie unter *Serj. meridionalis*) die durch den Befund seines Herbares erwiesene Unterschiebung der grossblüthigen *Serj. hebecarpa* deutlich hervorleuchtet. Hier wird übrigens die Verwechselung wenigstens durch die bei beiden Pflanzen, bei *Urvillea uniloba* wie bei *Serjania hebecarpa*, gleichartig zusammengesetzten, nämlich gedreiten Blätter leichter begreiflich gemacht.

Ich habe endlich bei dieser Gelgenheit noch darauf aufmerksam zu machen, dass die unrichtigen Bestimmungen und Vermengungen Grisebach's, in diesen wie in anderen Fällen, auch auf die von Lorentz und Hieronymus herausgegebenen Sammlungen übergegangen sind oder hier neue Verwechselungen veranlasst haben, so dass weder auf die Nummern noch auf die Namen dieser Pflanzen unmittelbar Verlass zu nehmen ist. Zu *Urvillea uniloba* gehören von diesen Sammlungen, soweit sie mir

---

1) Das veranlasste Grisebach, bei *Schmidelia* (Symbolae p. 80) dem Namen Chalchal die Bemerkung beizufügen: „Nomen pluribus fruticibus commune". Nach dem Gebrauche der Eingeborenen ist das aber keineswegs der Fall; diese verstehen darunter nur *Schmidelia*, die sie wegen der fleischigen Früchte sehr wohl von *Urvillea*, trotz der ebenfalls gedreiten Blätter, zu unterscheiden wissen. Anders freilich Grisebach.

bekannt geworden sind, die folgenden Materialien: Flora Uruguensis, Lorentz n. 112, 573, 575, 957; Flora Argentina, Hieronymus n. 686 (forma foliis dissectis) alle in Grisebach's Herbar enthalten und von ihm als *Urvillea euryptera* bezeichnet. Die meisten dieser Exemplare sind im Gegensatze zu dem, was Grisebach angibt, mit zerstreuten durchsichtigen Punkten oder kurzen Strichelchen versehen; nur bei einigen treten die durchsichtigen Stellen bis zum Verschwinden zurück.

119. Serjania Cambessedeana Schl. & Cham. (109, p. 290.)

Den Litteraturstellen ist beizufügen:

Serjania Cambessedeana Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 4.

Zusatz. Bezüglich der Pflanze von Galeotti, n. 4299, für die ich schon früher angedeutet habe, dass sie, statt als *S. Cambessedeana* mit insgesammt verarmten, biternaten Blättern, auch als ein von dem gewöhnlichen Typus etwas abweichendes Exemplar der *S. racemosa* aufgefasst werden könne, mag, da Früchte nicht vorliegen, die endgiltige Bestimmung von den Aufschlüssen abhängig gemacht werden, die sich über den Grad, bis zu welchem die Verarmung der Blätter bei *Serj. Cambessedeana* gehen kann, von weiteren Materialien erwarten lassen.

120. Serjania orbicularis Radlk. (110, p. 292.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Herb. Dr. A. R. Ferreira n. 750! (a schola polytechnica Lisbonensi comm. c. Hb. Kew.).

121. Serjania tristis Radlk. (111, p. 293.)

Zu der nach einer handschriftlichen Bemerkung Warming's in die Characteristik aufgenommenen Angabe „caules 6-alati" kann ich nun nach autoptischer Untersuchung entsprechender, von Mosén gesammelter Materialien (s. unten im Materialienverzeichnisse) hinzufügen, dass die betreffenden Flügel stark vorspringende, schmale Korkleisten sind, ähnlich denen von *Ulmus campestris, β. suberosa.* Sie entwickeln sich über den Kanten des Stammes, die Furchen desselben frei lassend, und sind durch ziemlich gleichmässige Abstände von einander getrennt und in ihrem Längsverlaufe, abgesehen von kleinen, in der Entwicklung zurückgebliebenen Stellen, nur durch die Blatt- und Zweiginsertionen unterbrochen. Es liegt mir ein mit Einschluss zweier diametral gegenüberliegender Korkleisten 13,5 mm, mit Abrechnung derselben 6,5 mm im Querdurchmesser betragendes Stammstück oder Zweigstück vor, dessen Korkleisten also in derselben Richtung je 3,5 mm messen. Sie erheben sich von einer 1,5 mm breiten Grundfläche zu einer scharfen Rückenkante und zeigen an ihren annähernd radiär stehenden Seitenflächen von der Rückenkante nach der Basis sich lostrennende und nach den Zwischenfurchen hin sich umrollende dünne Gewebslamellen. Es lassen

sich je zwei bis drei solcher Rollen von der Basis der Leiste bis zu ihrer Rückenkante zählen, je nach der mehr oder minder oft schon erfolgten Ablösung und Umrollung. Die Korkmasse ist ziemlich grosszellig, homogen, brüchig-schwammig, von brauner Farbe. Die Furchen zwischen den Korkleisten sind noch von der haarbekleideten Epidermis überdeckt.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Regnell III, 1750! (Brasil. prov. Minas Geraës, in adscensu montis Serra de Caldas, m. Febr. 1869, fruct. immat.; Hb. Holm.); Mosén n. 1809! (ibid., Caldas, ad Capivari in adscensu montis Serra dos Cabrilos in fruticeto, m. Maj. 1874, fruct.; Hb. Holm.).

124. Serjania hebecarpa Benth. (114, p. 295.)

Als Synonyme sind beizufügen:

Serjania meridionalis, non Camb., Griseb. Symb. ad Flor. argentin. in Abh. Götting. Ges. der W. Bd. XXIV (1879) p. 79, n. 451, partim, nempe quoad stirpem „foliis (sphalmate „foliolis") ternatis et sepalis tomentellis", i. e. Serj. hebecarpa forma 3, coll. Lorentz n. 170! et 574! fide Hb. Griseb., nec non quoad observationes parentheticas hanc stirpem spectantes („venulae solummodo aliquid pellucidae; petala 2—3‴ longa; endocarpium sparsim adpresse puberulum") cf. supra sub Serj. meridion. in observ.

Urvillea euryptera Griseb. l. c. p. 79 n. 448, partim, nempe quoad stirpem „floribus majoribus, petalis obovatis fere 2‴ longis", i. e. Serj. hebecarpa forma 3, coll. Lorentz n. 957! partim, fide Hb. Griseb. (reliqua parte ad Urvill. eurypteram Griseb., i. e. Urvillea uniloba Radlk., recensenda).

In der Characteristik ist die Beschaffenheit der Frucht mit Rücksicht auf die inzwischen bekannt gewordene zweite und dritte Form der Pflanze, während früher nur Fruchtexemplare der ersten im weiter Folgenden aufzuführenden Form bekannt waren, folgendermassen darzulegen:

Fructus sectionis cordatus, superne ad loculos trigonus, plerumque acutus (in forma 1), rarius rotundatus (forma 2) vel truncatus (forma 3), reti nervorum arcuato-descendente notatus, undique pubescens et ad loculos pilis longioribus (retrorsis) canescenti-subvillosus, rarius subglaber (in forma 3), endocarpio fusco-floccoso vel sparsim albido-puberulo (in forma 3).

Rücksichtlich der in Rede stehenden Formen ist vor dem Materialienverzeichnisse anzuführen:

Formas tres distinguere licet:

Forma 1. oxycephala: Forma genuina fructu acuto vel certe in apiculum producto (in Balansa n. 2487).

Forma 2. amblycephala: Fructus apice rotundato-obtusus (sub loculis quodammodo constrictus).

Forma 3. platycephala: Glabrior; fructus subglaber, apice truncatus et quodammodo impressus, pericarpio minus crasso cartilagineo, endocarpio pilis albidis sparsim adpresse puberulo.

Dem Materialienverzeichnisse, welches sich nur auf Pflanzen der ersten Form erstreckte, sind nunmehr für diese und die beiden anderen Formen beizufügen:

Forma 1: Glaziou n. 10416! (Rio de Janeiro; Hb. Eichler, Warming); Balansa n. 2487! (Paraguay, „Arroyo-y-Esteros, à la lisière des bois", m. Jul. 1875, fruct.; Hb. DC., Boiss.; deest in Hb. Griseb.). — Forma 2: Balansa n. 2487,a! (Paraguay, „Paraguari, dans les forêts" m. Apr. 1875, fruct.; Hb. Griseb., quoad speciem indeterminata relicta). — Forma 3: E. Gibert n. 300! (Uruguay, „Bords de l'Uruguay, près de Fray Bentos" m. Apr. 1867, fruct.; Hb. Kew.); Lorentz n. 170! (In Argentiniae prov. Entrerios, „Concepcion del Uruguay", m. Apr. 1875, flor. et fruct.; Hb. Griseb., sub nom. *Serjania meridionalis var. foveata Griseb.* et sub hoc nomine communicat. quoque c. Hb. Kew.), n. 574! (ibidem lecta, m. Apr. 1876, flor.; Hb. Griseb., sub nom. „*Serj. meridionalis*"), n. 957! partim (partim *Urvillea euryptera Griseb.* i. e. *Urvillea uniloba Radlk.*; ibidem lecta, m. Apr. 1876, flor. et fruct. juveniles; Hb. Griseb. sub *Urvillea euryptera Griseb.*); dubitanter, quia fructus desunt, huc ducitur: Lorentz n. 115! partim (partim *Paullinia elegans Camb.*; ibidem lecta, m. Apr. 1875, flor.; Hb. Griseb., sub *Paullinia eleganti Camb.*)

Zusatz A. Die von *Serj. hebecarpa* in neuerer Zeit aus dem südlichsten Theile ihres Verbreitungsbezirkes bekannt gewordenen Materialien, welche die zweite und dritte der oben aufgeführten Formen darstellen, schliessen sich ihrem ganzen Gepräge nach sehr innig an die erste, früher allein bekannt gewesene Form an, welche man als die Hauptform bezeichnen kann. Sie lassen sich dieses engen Anschlusses halber nicht wohl als selbständige Arten auffassen, noch viel weniger aber können sie der *Serjania Mansiana* beigezählt werden.

So zeigt sich nunmehr, dass die Gestalt der Frucht bei *Serj. hebecarpa* dieselben Modificationen durchmacht, wie bei *Serj. grandis*, auf welche ich ihrer wechselnden Fruchtgestalt halber schon früher bei Erwägung des specifischen Werthes solcher Gestaltungsmodificationen für sich allein in dem Zusatze 1 zu *Serj. hebecarpa* (Monogr. p. 295), wie unter *Serj. grandis* selbst (p. 298) hingewiesen habe.

Es werden hiedurch die Unterschiede zwischen der *Serj. hebecarpa* und *Serj. Mansiana* noch geringer, als sie bisher schon waren und reduciren sich auf die robustere Entwicklung der letzteren, ihre stärkere, fast filzige Haarbekleidung an Zweig und Blatt und eine geringere Neigung zur Zahnbildung am Blattrande. Das bedingt eine entsprechende Modification, wie für den Inhalt des erwähnten Zusatzes, so auch für den Conspectus Specierum, in welchem neben den eben erwähnten Momenten auch die Fruchtgestalt zur Unterscheidung mit herangezogen war.

Den Uebergang von der spitzfrüchtigen Form zu der stumpf- und flachfrüchtigen vermittelt die Pflanze von Balansa n. 2487 (Herb. DC., Boiss.), bei welcher nur die Mitte des schon zur Abrundung hinneigenden Fruchtendes sich nochmal zu einem kurzen Spitzchen erhebt.

Zusatz B. Ueber die Deutungen und Missnahmen, welche die Pflanze durch Grisebach erfahren hat, habe ich schon unter *Serj. meridionalis* des näheren berichtet (p. 146—148). Grisebach hat sie, so oft sie ihm zukam, mit irgend einer anderen Pflanze vermengt oder damit vermengt gelassen, mit *Serj. meridionalis Camb.*, *Urvillea euryptera Griseb.*, i. e. *Urvillea uniloba Radlk.*, und *Paullinia elegans Camb.*, oder

sie ohne Artbestimmung an das Ende von *Serjania* (in seinem Herbare) verwiesen. In der Synonymie habe ich nur die zwei erst erwähnten Missnahmen berücksichtiget, welche in den Publicationen Grisebach's eine hervortretende Rolle spielen. Das Uebrige habe ich, als nur dem Herbare angehörend, nur in dem Materialienverzeichnisse, soweit es zur Wiedererkennung der betreffenden Materialien nothwendig erschien, berührt. Zu dem gleichen Zwecke, und damit keinerlei Unklarheit über die betreffenden Materialien Platz greifen kann, ist hier namentlich für diejenigen, welche Gelegenheit haben, diese Materialien im Herb. Grisebach und Herb. Kew selbst nachzusehen, daran zu erinnern, dass, wie schon oben p. 146 in einer Anmerkung erwähnt worden ist, Grisebach von der zu *Serj. meridionalis* verschleppten *Serj. hebecarpa*, coll. Lorentz n. 170 und 574, sowohl die in seinem Herbare verbliebenen, als auch die nach Kew mitgetheilten Exemplare nicht schlechthin als *Serj. meridionalis*, sondern als „*Serj. meridionalis Camb. var. foveata Gr.*" bezeichnet hat. Darin liegt eine Abweichung von dem Inhalte seiner eigenen Publication, die auch nur als Herbarsache erscheint, und von welcher ich desshalb, wie von anderem nicht Publicirten, wo das immer möglich war, abgesehen habe. In den Symbolae wird nämlich „die gedreitblättrige Form" nicht unter der „*Serj. meridionalis var. foveata Gr.*", sondern unter der eigentlichen *Serj. meridionalis* erwähnt und eine besondere Varietätsbezeichnung für dieselbe nicht in Vorschlag gebracht. Wollte man auf die Abweichung in dem Herb. Grisebach Rücksicht nehmen, so würde die von Grisebach bewerkstelligte Confundirung und ihre Rückwirkung auf die Synonymie eine noch complicirtere sein, als sie ohnediess ist. Es würde dann die *Serj. hebecarpa* nicht bloss mit *Serj. meridionalis* (in den angeblichen Verbesserungen meiner Characteristik), sondern auch mit *Serj. foveata* und durch diese dann wieder mit *Serj. meridionalis* in der betreffenden Varietät confundirt erscheinen. Es wäre also dann auch bei *Serj. foveata* die *Serj. hebecarpa* auszuschliessen und andererseits wäre auch die *Serj. foveata* bezüglich ihres aus *Serj. hebecarpa* bestehenden Theiles neben der *Serj. meridionalis* hinsichtlich des analogen Theiles (s. oben) in der Synonymie von *Serj. hebecarpa* aufzuführen. Es liegt zum Glücke keine Veranlassung vor, auf Grisebach's Herbar, wo es aufhört als Commentar zu seinen Schriften zu dienen und mit diesen nicht mehr in Einklang steht, mehr als auf diese Rücksicht zu nehmen und die in seinen Schriften wahrlich schon in allzu grosser Fülle enthaltenen Missnahmen durch eine solche Rücksichtnahme noch zu vermehren. In den Symbolae ist die *Serj. hebecarpa* doch nur mit *Serj. meridionalis* und *Urvillea uniloba* vermengt; nach dem Herbare käme, ausser der schon erwähnten Vermengung mit *Paullinia elegans*, auch noch eine solche mit *Serj. foveata* hinzu. Diese mag als Herbarsache auf sich beruhen.

126. Serjania grandis Seem. (116, p. 297.)

Der Litteratur ist beizufügen:

Serjania grandis Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 11.

Serjania sufferruginea Radlk. (117, p. 299.)

Sieh n. 115.

127. Serjania peruviana Radlk. (117, a.)

Scandens, fruticosa, tomento brevi sordide cano induta; rami subteretes, 6-sulcati; corpus lignosum compositum e centrali majore et peripherici 3—4 triangulariter dispositis parvis; folia biternata; foliola ovata, terminalia subrhombea, subsessilia, subacuta, crenato-dentata, coriaceo-membranacea, supra pubescentia, subtus tomentosa, insuper glandulis microscopicis supra subtusque obsita, e viridi fuscescentia, subimpunctata, epidermide non mucigera; petiolus communis partialesque nudi, cano-tomentosi; thyrsi in apice ramorum paniculatim congesti, tomentosi, sat dense cincinniferi; cincinni breviter stipitati; flores majusculi; sepala omnia tomento cano brevi adpresso induta; fructus —.

Rami thyrsigeri diametro 3—4 mm. Folia superiora 12 cm longa, 9 cm lata; foliola terminalia 6 cm longa, 3,5 cm lata, lateralia decrescentim minora; petiolus communis 2 cm longus, rhachis 4 cm longa. Thyrsi 5—10 cm longi, rhachi quam pedunculus paullo longiore; cincinni stipite circ. 3 mm longo suffulti, sat densiflori; pedicelli circ. 3 mm longi, prope basin articulati, crassiusculi, breviter cano-tomentosi; bracteae bracteolaeque lineari-lanceolatae, 2 mm longae, tomentosae; alabastra subglobosa, diametro 3 mm, cano-tomentosa. Flores (masculi tantum suppetebant): Sepala interiora 4,5 mm longa. Petala 5,5 mm longa, 3 mm lata, ex obovato in unquem latam attenuata, intus glanduligera, basi ciliolata; squamae (cristis exclusis) petala dimidia paullulo superantes, 3 mm longae, margine villosiusculae, superiores crista oblonga alta petalum fere superante appendiceque deflexa triangulari villoso-barbata, inferiores crista subaliformi parva instructae. Tori glandulae superiores ovatae, puberulae, inferiores minores, elliptico-annulares. Stamina hirsuta; antherae glabrae. Germinis rudimentum trigonum, hirtellum, stylo rudimentario basi piloso coronatum.

In Peruvia prope Chachapoyas: Matthews n. 3094! (ao. 1840; Hb. Kew.).

Zusatz. Die Art schliesst sich nach der Baschaffenheit der vegetativen Theile an *Serj. sufferruginea* und, abgesehen von der Zusammensetzung der Blätter, an *Serj. grandis* und *dasyclados* an, nähert sich aber in Blüthe und Inflorescenz mehr der *Serj. triquetra* und *Schiedeana*. Namentlich mit der letzteren, deren Blätter aber zweipaarig gefiedert sind, hat sie hinsichtlich der Grösse, Behaarung und sonstiger Beschaffenheit der Blüthentheile grosse Aehnlichkeit. Ausgezeichnet ist sie durch die grossen Kämme an den Schuppen der oberen Blumenblätter.

129. Serjania diffusa Radlk. (119, p. 302.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Sodiro! (Ecuador, circa Morascocha-Peruco, m. Mart. flor., m. Jul. 1871 fruct. submat.; Hb. Haynald).

Zusatz. Die Pflanze von Sodiro stellt gleichsam eine Zwischenform zwischen der *Serj. dasyclados* und *Serj. diffusa* dar, der ersteren durch die dichtere, weniger rauhe und weniger abstehende Behaarung und eine minder stark gefurchte Inflorescenzspindel sich nähernd, mit der letzteren dagegen durch die Verflachung der letzten Abschnitte des Blattstielgerüstes wieder mehr übereinstimmend. Die Blätter sind durchgehends nur biternat, zeigen aber Neigung zu höherer Zusammensetzung durch die scharfe Absetzung der Endblättchen an den seitlichen sowohl, wie an den Endtriaden gegen ihr ungefähr 1 Centimeter langes Stielchen und durch bald mehr bald minder deutliche Lappenbildung. Besonders an den Zähnen der Blätter sind durchsichtige Punkte zu sehen. Die Wickeln sind deutlicher, die Früchte länger gestielt als sonst bei *Serj. diffusa*. Die Früchte sind, obwohl noch nicht vollständig reif, sattsam synkokk, die jüngeren den gleich grossen der übrigen Materialien von *Serj. diffusa* sehr ähnlich. Die weitest entwickelten sind 3,5 cm lang, oben 1,5, an der Basis 2—2,2 cm breit, oben und unten ausgeschnitten, kurz und weich behaart, die Fruchtfächer an der Spitze mit einem scharfen Kiele versehen, welcher sich gegen den Rücken zu einem allmälig in den Flügel sich fortsetzenden Kamme verbreitert, nach unten gestreckt keilförmig verschmälert, 1 cm lang, knapp 4 mm breit (in tangentialer Richtung), 5 mm dick (in radiärer Richtung) unter Abrechnung des Kammes, innen dicht mit brauner weicher Wolle ausgekleidet. Der Same ist verkehrt eiförmig, an der Basis keilformig spitz.

130. Serjania Schiedeana Schlecht. (120, p. 303.)

Als Litteraturstelle ist beizufügen:

Serjania Schiedeana Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 25.

131. Serjania triquetra Radlk. (121, p. 305.)

Als Litteraturstelle ist beizufügen:

Serjania triquetra Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 33, excl. stirpe Orizabensi „Botteri n. 427“ — potius 426!, quam in Hb. Kewensi Serj. triquetrae adjectam inveni, — ad Paulliniam tomentosam Jacq. recensenda.

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Ghisbreght n. 173! (Mexico, prov. Oaxaca; foliis pellucide punctatis, punctis dentium coacervatis; quasi intermedia inter specimina a Schiede et illa ab Andrieux lecta; Hb. Par.); Bernoulli & Cario n. 2927! (Guatemala, Retalulen m. Nov. 1877, flor.; foliis subimpunctatis ut in speciminibus ab Oersted, Friedrichsthal et Wright lectis; Hb. Gotting.); Hecker! (S. Salvador, ao. 1877; fol. ut in antecedente; Hb. Monac.).

Zusatz. Nach einer Originaletiquette von C. Wright im Herb. Grisebach mag beigefügt sein, dass die von ihm herrührenden, schon früher erwähnten Exemplare,

welche reife Früchte besitzen, im März 1856 gesammelt sind. Als näherer Standort ist angegeben „Omotepec, Santa Rosa“ (Insel mit gleichnamigem Vulcane — Ometepe, Ometepec der gewöhnlichen Schreibweise — im Nicaragua-See).

132. **Serjania goniocarpa** Radlk. (122, p. 309.)

Die zweite Litteraturstelle ist nach dem schon oben p. 135 bei *Serj. racemosa* Angeführten wegen der Einbeziehung der Pflanze von Ghisbreght zu erweitern, wie folgt:

Serjania racemosa, non Schum. etc., Turczaninow in Bullet. Mosc. XXII (1859) Pars I, p. 267, quoad Botteri n. 876! (sphalmate 576) partim (cfr. Serj. racemosa Schum.) et quoad Ghisbreght n. 197!

Der Litteratur ist beizufügen:

Serjania goniocarpa Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 207 n. 10, excludenda „Botteri 876“ ex parte, ut in Monogr. p. 309 (cfr. Serj. racemosa Schum.).

Nomen vulgare: Costilla de vaca (i. e. vaccae costa) Kerber in scheda. (Cfr. Paullinia pinnata: „Bejuco de costilla“ Hahn in scheda.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Ghisbreght n. 197! (Mexico, prov. Vera Cruz, prope Zacuapan; Hb. Turczan. sub nom. „Serj. racemosa Schum.“); E. Kerber n. 77! (Mexico, La Luz pr. Cordoba, m. Oct. 1882, flor. et fruct.; Hb. Kew., Hb. Gotting., c. nom. vulg. supra indic.), n. 130! (Mexico, Atoyac, m. Nov. 1882, fruct.; Hb. Gotting.).

Zusatz. Hinsichtlich des in Zusatz 2 der Monographie erwähnten gelegentlichen Auftretens von vier Fruchtfächern, statt drei, mag hinzugefügt sein, dass zwei Fächer, wie auch in der normalen Blüthe, auf Seite der oberen Blumenblätter sich finden, während die an Stelle des unteren, in die Lücke zwischen Kelchblatt 3 und 5 und gegenüber Kelchblatt 4 fallenden Faches getretenen zwei Fächer annähernd über die unteren Kelchblätter (3 und 5) zu stehen kommen.

133. **Serjania brachystachya** Radlk. (123, p. 310.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania brachystachya Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—80) p. 205 n. 1.

134. **Serjania curassavica** Radlk. (124, p. 311.)

Der auszuschliessenden Litteratur ist beizufügen:

Non Paullinia curassavica Linn. Amoen. acad. V (1760) p. 378 (Sandmark Flor. Jamaic., Decemb. 1759) praesertim ad Serj. mexic. W. referenda fide speciminis in Herb. Linn. servati! Cf. supra p. 124.

Non Serjania curassavica Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 8, quoad specimina enumerata omnia (Friedrichsthal e Guatemala, Seemann n. 1642 e Panama, Cubana et Americae meridionalis) nec non quoad synon. Seemannian., „Serj. pubescens var. glabrescens", quae omnia ad Paulliniam fuscescentem Kunth sunt recensenda. (Solum synon. Linn. „Paull. curass. partim" et Jacq. „Paull. cartagenensis", secundum Monogr. Serj. citata, re vera ad Serj. curassavicam Radlk. pertinent.) Cf. Monogr. Serj. p. 312 et 313 et quoad syn. Seem. p. 314 sub Paull. cartag. Tr. & Pl.

136. **Serjania impressa** Radlk. (126, p. 323.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania impressa Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 206 n. 13, excludenda „Bourgeau n. 1463" ex parte, ut in Monogr. p. 364 (cfr. Serj. racemosa Schum. ibid. p. 266).

138. **Serjania rhombea** Radlk. (128, p. 324.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania rhombea Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot I (1879—81) p. 207 n. 23, excl. „Taté n. 53, Nicaragua", i. e. Paullinia costaricensis Radlk. in Monogr. Paulliniae edenda, maxime affinis Paull. jamaicensi Macf., sed foliis subtus pubescentibus impunctatis etc. distincta.

Den Synonymen ist entsprechend den Ergänzungen zu den chronologischen Tabellen (s. oben, p. 53) beizufügen:

Serjania pubescens, non Kunth nec Seem., Griseb. Novit. Flor. Panamens. in Bonplandia VI (1858) p. 3, in observat. ad Serj. samydeam Gris., quoad specimen a Duchassaing in Panama lectum, fide Herb. Griseb.; cf. supra p. 114 (de speciminib. a Griseb. enumerat.) et praesertim observ. D sub Serj. mexic. p. 129 etc. (n. 2).

Paullinia velutina, non DC., Triana & Planch. Prodr. Flor. Novo-Granat., Ann. Scienc. nat., IV. Sér., XVIII (1862) p. 358 partim, nempe quoad coll. Fendler n. 43 e Panama et quoad coll. Duchassaing e Panama; cf. Monogr. Serj. p. 325 et supra observ. D sub Serj. mexic. p. 129 etc. (n. 2).

Im Materialienverzeichnisse ist der Angabe „Fendler n. 43, Panama" mit Rücksicht auf das letztere der eben angeführten Synonyme beizufügen: „*Paull. velutina*", non *DC.*, *Tr. & Pl.* l. c.; ferner der Angabe „Duchassaing, Panama, Hb. Paris." mit Rücksicht auch auf das erstere dieser Synonyme: „*Paull. velutina*", non *DC.*, *Tr. & Pl.* l. c., und „*Serjania pubescens*", non *Kunth* nec *Seem.*, *Griseb.* l. c. fide Herb. Griseb.

139. Serjania clematidea Triana & Pl. (129, p. 326.)

Die Characteristik und Beschreibung ist hinsichtlich der Beschaffenheit der Frucht nach der unten anzuführenden Pflanze von Trail durch folgende Angaben zu ergänzen:

Fructus sectionis mediocris, 2,3 cm longus, 1,8 cm (ad loculos 8 mm) latus, cordato-ovatus, ad loculos trigonus et pilis retrorsis adspersus, caeterum subglabratus, apice retusus, infra loculos vix constrictus, loculis trigonis carinatis basi abruptius cuneatis 5 mm longis, attamen basi secus axin in cavitatem canaliformem 3 mm longam productis, 5 mm latis (in directione tangentiali), 4 mm crassis (in directione radiali), dissepimentis 3 mm latis late semiobovatis, pericarpio chartaceo obscurius reticulato-nervoso, endocarpio glabro; semen ad loculi basin insertum, ex obovoideo breviter clavatum, fusco-badium, glabrum — (immaturum tantum suppetebat).

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Trail n. 120! (Brasil., Amazonas superior, São Paulo in valle paludosa, m. Nov. 1874, fruct.; Herb. Kew.).

140. Serjania trachygona Radlk. (130, p. 327.)

Als Litteraturstelle ist nun beizufügen:

Serjania trachygona Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 32. (Ob locum natalem sphalmate „Macume" scriptum cf. supra p. 89 obs. A. sub Serj. cornigera Turcz.)

141. Serjania insignis Radlk. (131, p. 331.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania insignis Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 207 n. 16.

Zusatz. Hemsley hat die hieher gehörige, in der Monographie von *Serjania* von mir angeführte Pflanze aus Panama von Duchassaing übergangen. Aus welchem Grunde ist mir unbekannt.

Grisebach hat diese Pflanze von Duchassaing, wie schon oben im Zusatze D zu *Serjania mexicana W.* p. 132 n. 4 erwähnt wurde, nicht besessen. Ich habe sie in seinem Herbare nicht vorgefunden. Ebenso ist eine auf sie beziehbare Stelle in den Novitiae Florae panamensis nicht vorhanden. Uebrigens fehlt die *Serj. insignis* nicht vollständig in dem Herb. Grisebach. Sie ist dort wenigstens durch ein Fragment (Blatt) vertreten, welches ebenso dem von Moritz Wagner gesammelten Exemplare des Herb. Monacense entnommen ist, wie einem Exemplare aus gleicher Quelle die im Herb. Grisebach befindlichen Fragmente der *Serj. cornigera Turcz.* (Blatt und Früchte). Die von Moritz Wagner gesammelten Pflanzen waren nämlich seiner Zeit (Anfang der sechziger Jahre) an Grisebach zur Bestimmung übersendet worden. Dass die hier in Rede stehenden Arten von Grisebach unrichtig bestimmt und dess-

halb in seinem Herbare an unrechter Stelle eingereiht wurden, sowie, dass sie nach dem Erscheinen meiner Monographie, wie aus den nachträglichen handschriftlichen Bemerkungen Grisebach's hervorgeht, abermals unrichtig aufgefasst wurden, habe ich schon unter *Serj. cornigera* (s. oben p. 89) erwähnt, zur Verständigung derer, welche die Materialien des Herb. Grisebach vielleicht später benützen werden. Grisebach hat meine Bestimmungen dabei geradezu vertauscht und Bemerkungen über das, was ihm von meinen Angaben dann natürlich als unzutreffend erscheinen musste, auf die Originaletiquette einer dritten Pflanze eingetragen, der von ihm als *Serj. pubescens* bezeichneten *Serj. rhombea* von Duchassaing aus Panama nämlich, neben welcher er die oben erwähnten Fragmente der *Serj. cornigera* aus dem Herb. Monacense untergebracht hatte.

142. **Serjania noxia** Camb. (132, p. 333.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Mosén n. 3951! (Brasil. prov. S. Paulo, Campinas, m. Jul. 1875, fruct.).

143. **Serjania multiflora** Camb. (133, p. 334.)

Im Materialienverzeichnisse ist einzufügen, beziehungsweise zu ändern:

Mosén n. 1956! (Brasil. prov. Minas Geraës, Caldas, in ripa rivuli campestris, m. Jun. 1874, flor.; Hb. Holm.); Regnell III, 346! partim (partim *Serj. Laruotteana*; Brasil. prov. Minas Geraës. Caldas, 1845—72, m. Jul. flor., m. Aug. fruct. semimat.; Hb. Holm.).

Species sedis omnino dubiae.

146. **Serjania setulosa** Radlk. (136, p. 337.)

Als Litteraturstelle ist nun anzuführen:

Serjania setulosa Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 28.

Zusatz. Als Vaterlands- und Standortsangabe findet sich auf den Etiquetten des Herb. Vindob., wornach ich mich in der Monographie von *Serjania* gerichtet habe, gedruckt die Angabe „Guatemala“ und daneben geschrieben die weitere „S. Juan de Nicaragua“. Es enthält das keine Unrichtigkeit, da hier Guatemala noch in dem älteren Sinne genommen erscheint, nach welchem es als Provinz auch Nicaragua in sich schloss. Nach den gegenwärtigen Unterscheidungen allerdings gehört S. Juan de Nicaragua, das ist der auch S. Juan del Norte oder Greytown genannte Ort an der Ostküste von Centralamerica, dem südlichen Nicaragua an. Ich erwähne das,

weil durch die frühere Angabe Hemsley veranlasst worden zu sein scheint, Guatemala einerseits und Nicaragua andererseits als zweierlei Heimatsländer der Pflanze anzusehen.

Aehnlich verhält es sich auch mit den Standortsangaben bei den übrigen von Friedrichsthal gesammelten Arten, *Serj. atrolineata* (*S. scatens*) n. 722 und *mexicana*, n. 722, aus der Provinz Chontales (bei *Serj. mexicana*, n. 5 im Herb. Kew., ist nur „Guatemala" angegeben), sowie *Serj. triquetra*, n. 695, vom Nicaragua-See. Auch diese Standorte gehören dem jetzigen Nicaragua an, wornach auch die Angaben in der geographisch-tabellarischen Uebersicht von *Serjania* zu modificiren wären, wenn nicht inzwischen in der That auch Materialien aus dem heutigen Guatemala durch Bernouilli und Cario, wenigstens für *Serj. atrolineata* und *triquetra* bekannt geworden wären (s. im Vorausgehenden). Friedrichsthal scheint überhaupt nur in Nicaragua gesammelt zu haben. Auch seine Exemplare der *Cupania guatemalensis Radlk.*, n. 1189, (*Paullinia g. Turcz.*, „Kegel n. 12771, Guatemala") — vielleicht auch die von Kegel? — sind dort bei Jinotepec gesammelt, wie im Wiener Herbare angegeben ist, während in dem Herbare zu Kew bei der gleichen Pflanze, die Hemsley als *Cupania americana* aufgeführt hat, die nähere Standortsangabe und die Nummer fehlt. Ebenso ist *Paullinia fuscescens Kunth* von Friedrichsthal, welche Hemsley irriger Weise zu *Serj. curassavica Radlk.* gebracht hat (s. die Ergänzungen zu dieser, p. 157), wohl auch in Nicaragua gesammelt, bei Mniogalpa (n. 979, 980) und Hazienda Pacaya (n. 1151), gemäss den Angaben im Wiener Herbare.

Serjania nutans Poeppig. (137, p. 338.)

Sieh n. 153.

148. Serjania piscatoria Radlk. (139, p. 340.)

Dem Materialienverzeichnisse ist beizufügen:

Glaziou n. 6699! 7861! 15450! (Rio de Janeiro; Hb. Eichl., Warming, Kew.).

149. Serjania nodosa Radlk. (140, p. 341.)

Als ein durch Schreib- oder Druckfehler entstandenes Synonym ist, wie schon oben p. 52 erwähnt, anzuführen:

Serjania undosa, sphalmate, Engler in Just bot. Jahresber. II, für 1874 (1876) p. 734.

152. Serjania inebrians Radlk. (143, p. 346.)

Als Litteraturstelle ist nun beizufügen:

Serjania inebrians Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Amer., Bot. I (1879—81) p. 207 n. 15.

Zusatz. Die in der Monographie von *Serjania* in den Zusätzen zu den eben genannten beiden Arten, *Serj. piscatoria* und *Serj. inebrians*, bei Besprechung ihrer Vulgärnamen „*Tingi*“ und „*Barbasco*“ erwähnte Verwendung dieser und anderer, zum Theile ebenso bezeichneter Pflanzen zum Betäuben und Fangen der Fische in America, hat inzwischen eine eingehende Betrachtung gefunden in einer diesen Gegenstand nach verschiedenen Seiten beleuchtenden Abhandlung von A. Ernst in Caracas: „Sobre el Embarbascar, ó sea la pesca por medio de plantas venenosas“, Tomo I de los Embozos de Venezuela por A. A. Level, 1881.

Der Verfasser zählt darin 60 Pflanzen, aus 17 verschiedenen Familien, und ausserdem noch 14 nur ihrem Vulgärnamen nach bekannte Pflanzen, aus allen Welttheilen auf, welche zu der in Rede stehenden Art des Fischfanges dienen.

Für einige Bemerkungen und Ergänzungen, welche ich dieser Abhandlung beizufügen habe und durch welche ich dem Gegenstande derselben auch die Aufmerksamkeit Anderer zulenken möchte, ist hier nicht der geeignete Ort. Ich werde sie an anderer Stelle (sieh Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1886) zur Mittheilung bringen.

153. **Serjania nutans** Poeppig. (138, p. 338.)

Wie schon in meiner Abhandlung über Sapindus etc., 1878, p. 224, Anmerk., angeführt ist, hat die wiederholte Untersuchung des sehr mangelhaften, nur aus Inflorescenzen, welche sammt ihren Tragblättern von den Zweigen abgeschlitzt sind, bestehenden Materiales das Vorhandensein eines zusammengesetzten Holzkörpers der Zweige (statt des früher fragweise als einfach betrachteten) wahrscheinlich gemacht. Darnach ist die Pflanze, wie schon im Conspectus Specierum geschehen ist, an *Serjania inebrians* anzuschliessen.

Species exclusae.

Zu der Zusammenstellung der ausgeschlossenen Arten bemerke ich, dass darin von allem abgesehen ist, was schon in der Gattungslitteratur oder bei den einzelnen Arten von *Serjania*, als mit den Namen dieser oder ihrer Synonyme unrichtiger Weise bezeichnet, seine Erledigung gefunden hat.

Dahin zählt somit, um einige Beispiele anzuführen, *Serjania* Vellozo mit *Serjania aquatica*, welche nach dem in diesen Ergänzungen (p. 1) Mitgetheilten eine Art von *Lantana* darzustellen scheint; ferner die unter *Serjania curassavica* (p. 314 der Monographie) aufgeführte, als *Paullinia curassavica* von Jacquin und Anderen bezeichnete *Paullinia Plumierii* Tr. & Planch., die von Swartz und Anderen unter dem gleichen Namen (*Paull. curassav.*) verstandene *Paullinia jamaicensis* Macfad., die von Schumacher und Anderen ebenso bezeichnete *Paullinia fuscescens* Kunth, wie weiter die

in diesen Ergänzungen erwähnte, nur Materialien von *Paullinia fuscescens* K. enthaltende *Serjania curassavica* bei Hemsley; ebenso, um noch von ein paar anderen Arten, von *Serjania sinuata* und *Serjania polyphylla*, ein paar Beispiele herzunehmen, die unter dem zu *Serjania sinuata* zum Theile gehörenden Synonyme *Paullinia Seriana* L. von Gärtner verstandene *Paull. barbadensis* Jacq., die als *Serj. sinuata* von W. Hooker fälschlich bezeichnete *Urvillea uniloba* Radlk., die mit einem zu *Serj. polyphylla* gehörigen Plukenet'schen Synonyme bei Fabricius fälschlich verknüpfte *Ampelopsis bipinnata* Michaux, u. s. w. In gleicher Weise gelten die in den vorausgehenden Ergänzungen bereits erwähnten Ausschlüsse unter *Serj. rhombea* und *Serj. triquetra*, von Hemsley unrichtiger Weise zu diesen Arten gerechnete Pflanzen betreffend, als bereits erlediget.

Nur folgende 3 Pflanzen, welche unter den Ausschlüssen anderwärts einen Platz noch nicht gefunden haben, sind hier in chronologischer Reihenfolge aufzuführen, nämlich:

Serjania spec. Martius in Herb. Flor. Bras. (Catalog. autographic., 1842) n. 1244 —
= Paullinia pinnata L. emend. Cf. Radlk., Ueber Sapindus, Sitzungsber. der München. Acad. 1878, p. 225, Anmerk.

Serjania spec. Hemsley in Salvin & Godm. Biolog. Centr.-Am., Bot. I (1879—81) p. 208 n. 37: „Jürgensen n. 521" („Paullinia spec." ibidem p. 311 n. 14) —
= Paullinia tomentosa Jacq.

Serjania (?) dissecta Watson in synonymia Urvilleae dissectae Watson in Proceed. Americ. Acad. XXI (1886) p. 447, in Chihuahua septentrionali, Mexico, leg. Pringle —
= Cardiospermum dissectum Radlk. Cf. supra p. 138.

Nachtrag.

Während des Druckes ist mir eine durch den Inspector des hiesigen botanischen Gartens, Herrn M. Kolb, von Wien aus hieher überbrachte Pflanze mit der Bezeichnung *Paullinia Hooibrenki* (*Linden*?) zu Gesicht gekommen, welche durch einen Reisenden Lindens nach Europa gelangt ist (wahrscheinlich von Südbrasilien her). Dieselbe erwies sich als nahe verwandt mit *Serjania confertiflora Radlk.* und mag dieser Art als *var. Hooibrenki* beigesellt sein, bis etwa das Bekanntwerden von Blüthe und Frucht dieselbe als besondere Art aufzufassen veranlasst. Sie ist vor den bis jetzt bekannt gewesenen Materialien der *Serj. confertiflora* ausgezeichnet durch eine lockere, rauhe Behaarung der Blätter und der Zweige, welch' letztere an der jungen Pflanze nur theilweise einen zusammengesetzten Holzkörper mit 3 peripherischen, seitlich noch nicht in auffallendem Maasse zusammengedrückten Holzkörpern zeigen. Die Blättchen sind dadurch eigenthümlich, dass sie neben den Mittelnerven wie weiss bereift erscheinen; in anatomischer Hinsicht ferner durch meist schlauchförmig gestreckte Gestalt ihrer Secretzellen und durch wellige Biegung der Seitenränder ihrer (häufig verschleimten) Epidermiszellen, wornach (wie vielleicht auch für einzelne andere Arten) das p. 39 in diesem Betreffe Gesagte zu modificiren ist. —

Als eine nachträglich, unter Nummer 53, auf p. 53 einzuschaltende Pflanze ist *Serj. hebecarpa* mit Rücksicht auf die p. 151 angeführten beiden Synonyme zu nennen.

VII. Geographische Verbreitung der Gattung Serjania.

A. Tabellarische Uebersicht.

Ueber die Einrichtung der Tabelle ist Folgendes vorauszuschicken.

Für jede Art sind die Gebiete, in welchen sie bisher beobachtet worden ist, durch Einsetzung des Zeichens „o“ in die betreffenden Verticalrubriken zur Rechten des Namens der Art und auf gleicher Höhe mit diesem angegeben.

Das „o“ ist fett gedruckt, wenn die Art nur in dem betreffenden Gebiete oder dort verhältnissmässig an den zahlreichsten Fundorten beobachtet worden ist, so dass es auf das muthmassliche Verbreitungscentrum der Art hinweist.

Das fett gedruckte „o“ ist in Klammern gesetzt, wenn seine Einstellung in diese oder jene Rubrik bei gleicher Anzahl der bisher bekannt gewordenen Fundorte in mehreren Gebieten durch die Rücksichtnahme auf minder bestimmte, aber doch auf dasselbe Gebiet beziehbare Angaben oder durch die Rücksichtnahme auf die verwandtschaftlichen Verhältnisse der Art bestimmt werden musste. Die in solchem Falle in Concurrenz tretenden Gebiete wurden, wenn die Art überhaupt in mehr als zwei Gebieten beobachtet ist, durch Beisetzung eines Rufzeichens zu dem einfachen „o“ der betreffenden Rubrik gekennzeichnet (s. n. 84 *S. mexicana*).

Dem „o“ ist ein Fragezeichen beigesetzt, wenn seine Einstellung in eine bezügliche Specialrubrik zweifelhaft war; es ist dagegen durch ein Fragezeichen ersetzt, wenn auch über die Einstellung in das betreffende Hauptgebiet, also über das Vaterland der Art überhaupt, kaum mehr als eine Vermuthung zu gewinnen war.

Die Hauptgebiete sind durch Doppellinien von einander geschieden, die Specialgebiete durch einfache Linien. Die Sectionen sind durch grössere Zwischenräume getrennt.

Die Nummerirung der Arten entspricht der systematischen Reihenfolge derselben.

Den schon in der Monographie aufgezählten Arten sind die dort ihnen ertheilten Nummern in besonderer (dritter) Rubrik beigesetzt; ebenso den neuen Arten die entsprechenden Einschaltungsnummern.

Section.	Laufende Nummer.	Frühere und eingeschaltete Nummern.	Name der Art.	Argentinische Republic.	Uruguay.	Paraguay.	Brasilien.											
							Rio Grande do Sul.	S. Paulo.	Rio de Janeiro.	Minas Geraës.	Goyáz.	Mato Grosso.	Bahia.	Alagoas.	Pernambuco.	Ceará.	Piauhi.	Pará.	Alto Amazonas.
I.	1	1	Serjania tenuis Radlk.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	2	2	» Regnellii Schlechtend.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	3	3	» cuspidata Camb.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	o	o	.	.	.	.	.
	4	4	» hirsuta Camb.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	5	5	» communis Camb.	.	.	.	.	o	o	o	.	.	o	.	.	.	.	.	.
	6	5, a	» viridissima Radlk.	.	.	.	.	o?	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	7	6	» stenopterygia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.
	8	6, a	» decemstriata Radlk.	o	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	9	6, b	» foveata Griseb.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	10	7	» cardiospermoides Schlechtend.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	11	8	» dumicola Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	12	9	» leptocarpa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	(o)
	13	10	» Ampelopsis Planch. & Lind.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	14	10, a	» areolata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	15	11	» chartacea Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	16	12	» trichomisca Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.
	17	13	» squarrosa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	18	14	» paludosa Camb.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	19	15	» confertiflora Radlk.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
II.	20	16	» cornigera Turcz.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	21	17	» mollis Kunth	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
III.	22	18	» platycarpa Benth.	.	.	.	.	o	.	.	o	o	.	.	.	.	.	.	.
	23	19	» eucardia Radlk.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	24	20	» velutina Camb.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.
	25	21	» Salzmanniana Schlecht. emend.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	o	.	.	.
	26	22	» subimpunctata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.
	27	23	» pedicellaris Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	28	24	» altissima Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	29	25	» glutinosa Radlk.	.	.	.	.	o	.	o	o	o	.	.	.	.	.	.	.
	30	26	» comata Radlk.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	31	27	» acoma Radlk.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	32	28	» cuneolata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	33	29	» deflexa Gardn.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	34	30	» paleata Radlk.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	35	31	» elegans Camb. emend.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	36	32	» corrugata Radlk.	.	.	.	.	.	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	37	33	» paradoxa Radlk.	.	.	.	.	o	.	o	.	.	o	.	.	.	.	.	.
	38	34	» gracilis Radlk.	.	.	.	.	.	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	39	35	» dura Radlk.	.	.	.	.	.	.	o?	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	40	36	» macrostachya Radlk.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	41	37	» laxiflora Radlk.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	42	37, a	» depauperata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	43	38	» diversifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

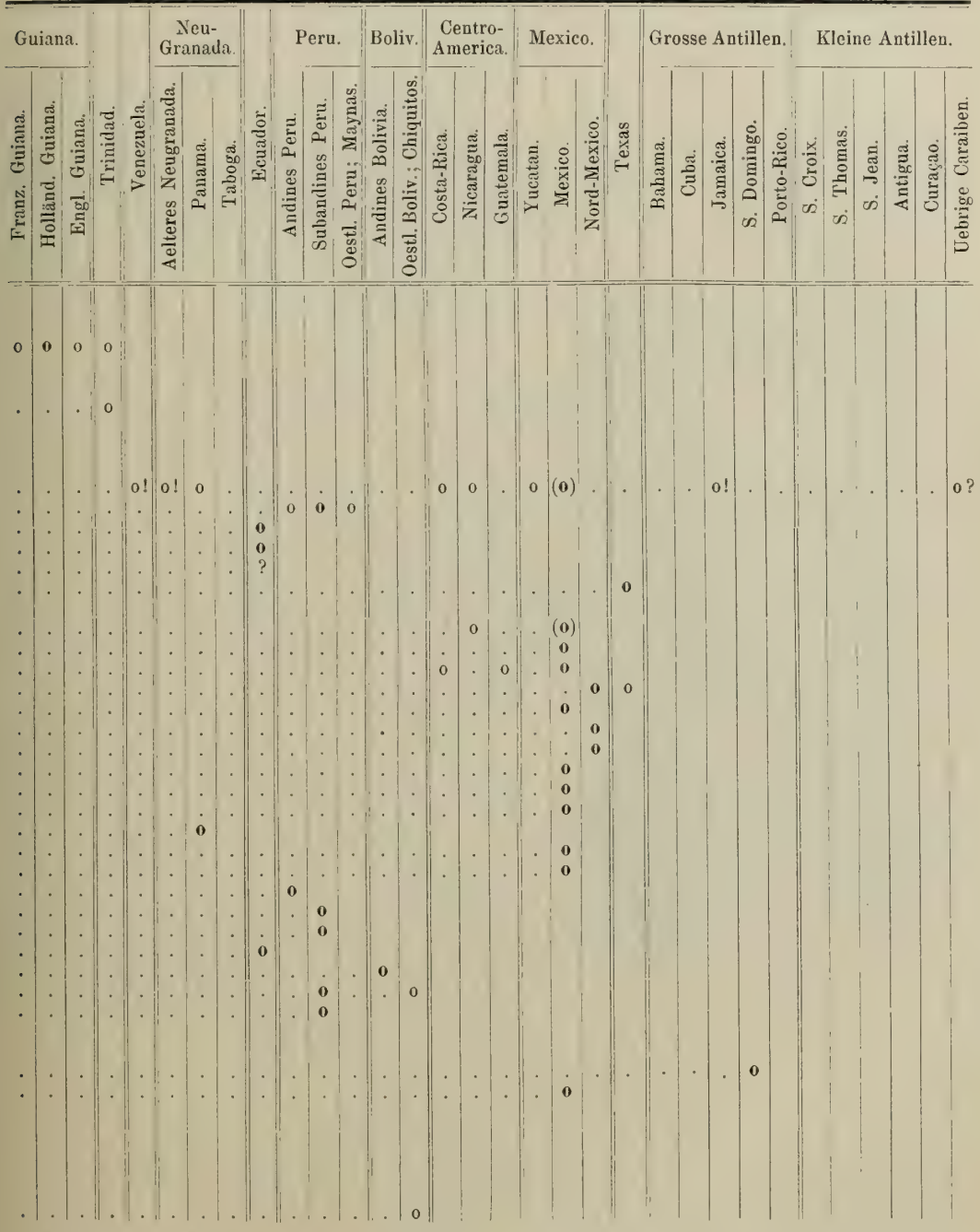
Guiana.				Neu-Granada.				Peru.			Boliv.		Centro-America.			Mexico.				Grosse Antillen.				Kleine Antillen.				
Franz. Guiana.	Holländ. Guiana.	Engl. Guiana.	Trinidad.	Venezuela.	Aelteres Neugranada.	Panama.	Taboga.	Ecuador.	Andines Peru.	Subandines Peru.	Oestl. Peru; Maynas.	Andines Bolivia.	Oestl. Boliv.; Chiquitos.	Costa-Rica.	Nicaragua.	Guatemala.	Yucatan.	Mexico.	Nord-Mexico.	Texas.	Bahama.	Cuba.	Jamaica.	S. Domingo.	Porto-Rico.	S. Croix.	S. Thomas.	S. Jean.	Antigua.	Curaçao.	Uebrige Caraiben.
.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	o	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	?	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	o	.	o	.	.	.	.	o	.	.

Uebrige Caraiben.

Section.	Laufende Nummer.	Frühere und eingeschaltete Nummern.	Name der Art.	Argentinische Republic.	Uruguay.	Paraguay.	Brasilien.												
							Rio Grande do Sul.	S. Paulo.	Rio de Janeiro.	Minas Geraës.	Goyáz.	Mato Grosso.	Bahia.	Alagoas.	Pernambuco.	Ceará.	Piauhi.	Pará.	Alto Amazonas.
IV.	44	39	Serjania dentata Radlk.	.	.	.	.	.	o										
	45	40	» faveolata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o						
	46	41	» aculeata Radlk.	.	.	.	.	.	.	o									
	47	42	» caracasana Willd.	o	.	o	.	.	o	o	.	.	.	.	.	.	.	o	.
	48	43	» grandiflora Camb.	.	.	o	.	o	o	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.
	49	44	» crenata Griseb.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	50	45	» sphaerococca Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	51	46	» Laruotteana Camb.	o	.	o	o	o	o	o									
	52	47	» pyramidata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	53	48	» adusta Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	54	49	» Seemanni Triana & Planch.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
V.	55	50	» reticulata Camb.	.	.	.	.	o	o	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.
	56	51	» marginata Casar.	o	.	o	.	o	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	57	52	» erecta Radlk.	.	.	o	.	o	.	o	o								
	58	53	» dibotrya Poepp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VI.	59	54	» membranacea Splitgerber	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	60	55	» exarata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o
	61	56	» grandifolia Sagot	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.
	62	57	» plicata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	63	58	» glabrata Kunth	o	.	o	.	o	o	o	.	.	o	o	o	.	o	.	.
	64	59	» thoracoides Radlk.	.	.	.	.	.	.	o?									
VII.	65	60	» sinuata Schum.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	66	61	» polyphylla Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	67	62	» crassinervis Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	68	63	» subdentata Juss.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	69	64	» paniculata Kunth	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	70	65	» atrolineata Sauv. & Wr.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	71	66	» equestris Macfad.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VIII.	72	67	» ovalifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	o	o								
	73	68	» oblongifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	74	68, a	» subrotundifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	75	69	» tenuifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	(o)
	76	70	» fuscifolia Radlk.	.	.	o	.	o	o	o	.	.	.	.	.	.	.	o	.
	77	71	» amplifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	78	72	» clematidifolia Camb.	.	.	.	.	.	o										
	79	73	» crassifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	80	74	» pinnatifolia Radlk.	.	.	.	.	o	.	o									
IX.	81	75	» perulacea Radlk.	.	.	o	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	82	76	» lethalis St. Hil.	.	.	.	.	o	o	o	o	.	o	.	.	o	.	o	.
	83	77	» scopulifera Radlk.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	o						

Guiana.					Neu-Granada.				Peru.			Boliv.		Centro-America.			Mexico.				Grosse Antillen.					Kleine Antillen.					
Franz. Guiana.	Holländ. Guiana.	Engl. Guiana.	Trinidad.	Venezuela.	Aelteres Neugranada.	Panama.	Taboga.	Ecuador.	Andines Peru.	Subandines Peru.	Oestl. Peru; Maynas.	Andines Bolivia.	Oestl. Boliv.; Chiquitos.	Costa-Rica.	Nicaragua.	Guatemala.	Yucatan.	Mexico.	Nord-Mexico.	Texas.	Bahama.	Cuba.	Jamaica.	S. Domingo.	Porto-Rico.	S. Croix.	S. Thomas.	S. Jean.	Antigua.	Curaçao.	Uebrige Caraiben.
.	.	o	.	o	o	.	.	.	.	o	.	.	o	o																	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o									
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	o	.	o?																		
.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	o																					
.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o									
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o																		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o?																		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	o																			
.	o	o	.	.	.	.	.	.	.	o?																					
o																															
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o													
.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	o	.	.	o																		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o							
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	o	o	o	o			
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o									
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	o	.	o?							
.	.	.	.	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o													
.	.	.	.	o	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	o	o	o	.	.	.	.	o									
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o								
.	o	o																													
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o?																					
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o																				
.	.	.	.	.	o																										
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o																		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o																		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	o																		

Section.	Laufende Nummer.	Frühere und eingeschaltete Nummern.	Name der Art.	Argentinische Republic.	Uruguay.	Paraguay.	Brasilien.												
							Rio Grande do Sul.	S. Paulo.	Rio de Janeiro.	Minas Geraës.	Goyáz.	Mato Grosso.	Bahia.	Alagoas.	Pernambuco.	Ceará.	Piauhi.	Pará.	Alto Amazonas.
IX.	84	78	Serjania ichthyoctona Radlk.	.	.	.	.	.	o										
(Forts.)	85	79	» paucidentata DC.	.	.	.	.	.	.	o	.	o	o	o	.	.	.	o	.
	86	80	» acutidentata Radlk.	.	.	.	.	.	o	o									
	87	81	» obtusidentata Radlk.	.	.	.	.	o	.	o	.	.	.	.	o				
	88	82	» lamprophylla Radlk.	.	.	.	.	.	o	o	.	.	.	.	.	.	.	.	
	89	82, a	» lamelligera Radlk.	.	.	.	.	.	o?										
	90	83	» oxytoma Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o						
X.	91	84	» mexicana Willd.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	92	85	» rubicaulis Benth.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	93	86	» longipes Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	94	87	» brevipes Benth.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	95	88	» grammatophora Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	96	89	» brachycarpa Asa Gray	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
XI.	97	90	» Grosii Schlechtend.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	98	91	» emarginata Kunth	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	99	92	» racemosa Schum.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	100	93	» incisa Torrey	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	101	94	» sphenocarpa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	102	94, a	» cystocarpa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	103	94, b	» californica Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	104	95	» macrococca Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	105	96	» sordida Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	106	97	» subtriplinervis Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	107	98	» acuta Triana & Planch.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	108	99	» polystachya Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	109	100	» vesicosa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	110	101	» oxyphylla Kunth	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	111	102	» striata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	112	103	» parvifolia Kunth	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	113	104	» mucronulata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	114	105	» rigida Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	115	117	» sufferruginea Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	116	106	» inflata Poepp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
XII.	117	107	» meridionalis Camb.	o	o	o	o	o	.	o									
	118	108	» filicifolia Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	119	109	» Cambessedeana Schlecht.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	120	110	» orbicularis Radlk.	.	.	.	.	.	.	o	o								
	121	111	» tristis Radlk.	.	.	.	.	o	.	(o)									
	122	112	» serrata Radlk.	.	.	.	.	.	o										
	123	113	» cissoides Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	o							
	124	114	» hebecarpa Benth.	o	o	o	.	.	o	o	.	.	.	.	.	o			
	125	115	» Mansiana Mart.	.	.	.	.	o	.	o	.	o	.	.	.	.	.	.	.


Guiana.
Franz. Guiana.
Holländ. Guiana.
Engl. Guiana.
Trinidad.
Venezuela.
Neu-Granada.
Aelteres Neugranada.
Panama.
Taboga.
Ecuador.
Peru.
Andines Peru.
Subandines Peru.
Oestl. Peru; Maynas.
Boliv.
Andines Bolivia.
Oestl. Boliv.; Chiquitos.
Centro-America.
Costa-Rica.
Nicaragua.
Guatemala.
Mexico.
Yucatan.
Mexico.
Nord-Mexico.
Texas
Grosse Antillen.
Bahama.
Cuba.
Jamaica.
S. Domingo.
Porto-Rico.
Kleine Antillen.
S. Croix.
S. Thomas.
S. Jean.
Antigua.
Curaçao.
Uebrige Caraiben.

Section.	Laufende Nummer.	Frühere und eingeschaltete Nummern.	Name der Art.	Argentinische Republic.	Uruguay.	Paraguay.	Brasilien.											
							Rio Grande do Sul.	S. Paulo.	Rio de Janeiro.	Minas Geraës.	Goyáz.	Mato Grosso.	Bahia.	Alagoas.	Pernambuco.	Ceará.	Piauhi.	Pará.	Alto Amazonas.
XII. (Forts.)	126	116	Serjania grandis Seem.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	127	117, a	» peruviana Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	128	118	» dasyclados Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	129	119	» diffusa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	130	120	» Schiedeana Schlechtend.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	131	121	» triquetra Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	132	122	» goniocarpa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	133	123	» brachystachya Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	134	124	» curassavica Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	135	125	» deltoidea Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	136	126	» impressa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	137	127	» rufa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	138	128	» rhombea Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	139	129	» clematidea Triana & Planch.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o
	140	130	» trachygona Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	141	131	» insignis Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	142	132	» noxia Camb.	.	.	.	.	o	o	o	.	.	.	.	.	.	.	o	.
	143	133	» multiflora Camb.	.	.	.	.	.	o	o									
	144	134	» purpurascens Radlk.	.	.	.	.	.	o										
	145	135	» nigricans Radlk.	.	.	.	.	.	o										
Arten unbestimmter Stellung	146	136	» setulosa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	147	138	» hamuligera Radlk.	.	.	.	.	.	o										
	148	139	» piscatoria Radlk.	.	.	.	.	o	o	.	o	.	o						
	149	140	» nodosa Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	150	141	» circumvallata Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	151	142	» brachyphylla Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	152	143	» inebrians Radlk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	153	137	» nutans Poepp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	154	144	» acuminata Radlk.	.	.	.	.	.	o										
	155	145	» angustifolia Willd.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

	Franz. Guiana.	Holländ. Guiana.	Engl. Guiana.	Trinidad.	Venezuela.	Neu-Granada. Aelteres Neugranada.	Panama.	Taboga.	Ecuador.	Peru. Andines Peru.	Subandines Peru.	Oestl. Peru; Maynas.	Boliv. Andines Bolivia.	Oestl. Boliv.; Chiquitos.	Centro-America. Costa-Rica.	Nicaragua.	Guatemala.	Mexico. Yucatan.	Mexico.	Nord-Mexico.	Texas.	Grosse Antillen. Bahama.	Cuba.	Jamaica.	S. Domingo.	Porto-Rico.	Kleine Antillen. S. Croix.	S. Thomas	S. Jean.	Antigua.	Curaçao.	Uebrige Caraiben.
Franz. Guiana.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Holländ. Guiana.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Engl. Guiana.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Trinidad.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Venezuela.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Neu-Granada. Aelteres Neugranada.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Panama.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Taboga.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Ecuador.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Peru. Andines Peru.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Subandines Peru.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Oestl. Peru; Maynas.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Boliv. Andines Bolivia.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Oestl. Boliv.; Chiquitos.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Centro-America. Costa-Rica.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Nicaragua.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Guatemala.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Mexico. Yucatan.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Mexico.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Nord-Mexico.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Texas.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Grosse Antillen. Bahama.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Cuba.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Jamaica.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
S. Domingo.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Porto-Rico.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Kleine Antillen. S. Croix.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
S. Thomas	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
S. Jean.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Antigua.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Curaçao.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Uebrige Caraiben.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Eine Zusammenstellung der in den einzelnen Ländern überhaupt vorkommenden (respective bis jetzt beobachteten) Arten, der darin ihr Verbreitungscentrum besitzenden — autochthonen — und der in denselben allein auftretenden — endemischen — Arten ergibt folgende Zahlen, von denen die der zweiten Categorie es sind, welche in den Ergänzungen zur Gattungscharacteristik unter „D“ (p. 47) angeführt sind (für die Antillen um 1 zu nieder) und welche für die Reihenfolge der namhaft zu machenden Länder als maassgebend betrachtet wurden.

	Brasilien	Mexico	Peru	Neu-Granada (mit Panama)	Antillen	Bolivia	Guiana	Ecuador	Central-America	Venezuela	Argentinien	Texas	Paraguay	Uruguay	Trinidad
Vorkommende Arten	72	26	25	16	15	16	7	7	10	7	8	2	10	2	2
Autochthone Arten	68	21	16	13	12	6	6	4	3	3	2	2	0	0	0
Endemische Arten	50	16	12	8	10	4	3	4	3	1	1	1	0	0	0

Ich führe diese Arten im Folgenden für die betreffenden Länder in den ihrer systematischen Reihenfolge entsprechenden Nummern unter Bezeichnung der betreffenden Sectionen auf, indem ich zugleich die in dem betreffenden Lande ihr Verbreitungscentrum besitzenden Arten durch fetten Druck der Nummern kennzeichne und die endemischen Arten durch fetten Druck in liegenden Ziffern. Es dient diese Aufzählung einerseits als Nachweis über die Gewinnung der obigen Zahlen, andererseits macht sie auch die Antheilnahme der einzelnen Sectionen an den verschiedenen Art-Categorieen jedes Landes ersichtlich.

Brasilien: Sect. I: ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, 5, ***6***, ***7***, 8, 12, ***16***, ***18***, ***19***; Sect. III: ***22***, ***23***, ***24***, ***25***, ***26***, ***29***, ***30***, ***31***, ***33***, ***34***, ***35***, 36, ***37***, ***38***, ***39***, ***40***, ***41***; Sect. IV: ***44***, ***45***, ***46***, 47, 48, 51; Sect. V: 55, 56, 57; Sect. VI: ***60***, 61, 63, ***64***; Sect. VIII: ***72***, 75, 76, ***78***, ***80***; Sect. IX: 81, 82, ***83***, ***84***, 85, ***86***, ***87***, 88, ***89***, ***90***; Sect. XII: 117, ***120***, ***121***, ***122***, ***123***, 124, 125, 139, ***142***, ***143***, ***144***, ***145***; Sedis dub.: ***147***, ***148***, ***154***.

Mexico: Sect. I: ***10***; Sect. VI: ***62***; Sect. VII: 69, 70; Sect. X: 91; Sect. XI: 97, ***98***, 99, 100, ***101***, ***102***, ***103***, ***104***, ***105***, ***106***, ***108***, ***109***; Sect. XII: ***119***, ***130***, 131, ***132***, ***133***, ***136***, 138, 140, 141.

Peru: Sect. I: 5, 12, ***17***; Sect. II: ***21***; Sect. III: ***28***; Sect. IV: 47, 50, 52; Sect. V: 58; Sect. VI: 59, 63; Sect. VIII: ***74***, 75; Sect. IX: 82; Sect. X: ***92***; Sect. XI: ***110***, ***111***, ***112***, 115, ***116***; Sect. XII: ***127***, 129, 135, ***137***; Sedis dubiae: ***153***.

Neu-Granada: Sect. I: ***13***; Sect. II: ***20***; Sect. IV: 47; Sect. VII: 69; Sect. VIII: ***77***; Sect. X: 91; Sect. XI: ***107***; Sect. XII: ***126***, ***128***, 134, 138, 139, 140, 141; Sedis dubiae: ***150***, ***151***.

Antillen: Sect. III: ***32***, **43**; Sect. IV: ***49***, 53; Sect. VII: ***65***, ***66***, ***67***, ***68***, **70**, ***71***; Sect. X: 91; Sect. XII: ***118***, 134; Sedis dubiae: ***149***, ***155***.

Bolivia: Sect. I: ***11***, ***14***; Sect. IV: 47, 50; Sect. V: 55, 56, 58; Sect. VI: 63; Sect. VIII: ***79***; Sect. IX: 81, 82; Sect. XI: ***114***, 115; Sect. XII: 125, **129**, **135**.

Guiana: Sect. I: ***15***; Sect. III: ***27***; Sect. IV: 47; Sect. VI: **59**, **61**; Sect. VIII: ***73***; Sect. IX: **85**.

Ecuador: Sect. IV: 52; Sect. VI: 63; Sect. X: ***93***, ***94***, ***95***; Sect. XI: ***113***; Sect. XII: 129.

Centralamerica: Sect. III: ***42***; Sect. IV: 47; Sect. VII: 70; Sect. X: 91; Sect. XI: 97, 99; Sect. XII: 131, 138; Sedis dub.: ***146***, ***152***.

Venezuela: Sect. III: 43; Sect. IV: 47, **53**, ***54***; Sect. VII: **69**; Sect. X: 91; Sect. XII: 138.

Argentinien: Sect. I: **8**, ***9***; Sect. IV: 47, 51; Sect. V: 56; Sect. VI: 63; Sect. XII: 117, 124.

Texas: Sect. X: ***96***; Sect. XI: **100**.

Paraguay: Sect. IV: 47, 48, 51; Sect. V: 56, 57; Sect. IV: 63; Sect. VIII: 76; Sect. IX: 81; Sect. XII: 117, 124.

Uruguay: Sect. XII: 117, 124.

Trinidad: Sect. IX: 85, 88.

Die aus der tabellarischen Uebersicht hervorleuchtenden Beziehungen zwischen der geographischen Verbreitung und der systematischen Stellung der Arten und Artengruppen gewinnen einen noch deutlicheren Ausdruck in der beifolgenden kartographischen Uebersicht. Was über diese Beziehungen zu bemerken ist, mag desshalb anschliessend an die Erläuterung der Karte im Folgenden seine Darlegung finden.

B. Kartographische Uebersicht.

Die beifolgende Karte soll in möglichst anschaulicher Weise nicht bloss das Vorkommen der einzelnen Arten für sich, sondern in Beziehung zu ihrer systematischen Stellung, oder mit anderen Worten die geographischen Beziehungen zwischen den Arten gleicher Stellung nach Sectionen und Gruppen von Sectionen darlegen.

Zu dem Behufe sind die Standorte der einzelnen Arten durch Eintragung der Artnummern auf der Karte bezeichnet und diese Nummern sectionenweise durch Linien verbunden, welche in ihrer Zusammensetzung aus Strichelchen, Punkten und den Zahlzeichen V und X direct die betreffende Section erkennen lassen (sieh die Zusammenstellung auf der Karte). Zugleich sind diese Linien theils durch rothe, theils durch blaue oder grüne Farbe, oder lediglich durch Schwarzdruck ausgezeichnet, wovon gleich

weiter die Rede sein soll. Vorher sei noch bemerkt, dass die Ziffern zur Kennzeichnung der Standorte für die kleineren Länder nach diesen selbst und für die grösseren nach deren Provinzen derart eingetragen sind, dass die sie verbindenden Linien möglichst einfach gestaltet, und Durchkreuzungen derselben möglichst vermieden werden konnten. Dabei wurden einige Gebiete, namentlich die brasilianische Provinz Rio de Janeiro bis in das Meer hinaus erweitert gedacht, um für die Ziffern Raum zu gewinnen. Für das gleiche Gebiet (Provinz oder kleineres Land) wurde die betreffende Ziffer nur einmal eingetragen, auch wenn die Art an verschiedenen Punkten eines solchen Landstriches beobachtet worden war. Bei Arten, welche aus verschiedenen Landstrichen bekannt sind, wurde der, von welchem die meisten Materialien vorlagen, und welcher somit als das Verbreitungscentrum angesehen werden konnte, durch Unterstreichen der betreffenden Ziffer auf der Karte (entsprechend dem fetten Drucke des Zeichens „o“ in der Tabelle) hervorgehoben. Bei Arten, welche nur aus einem Landstriche bekannt sind, der bis auf Weiteres auch als ihr Verbreitungscentrum zu gelten hat, wurde der analoge Strich unter der Ziffer mit einem kleinen senkrechten Striche in Verbindung gebracht. Den Nummern jener Arten, deren Vaterland nicht mit Sicherheit bekannt ist, wurde ein Fragezeichen beigefügt. Die Nummern endlich der nicht in eine Section eingereihten (10) Arten zweifelhafter Stellung (n. 146—155) sind durch Einschaltung in Klammern kenntlich gemacht und nicht durch eine der oben gedachten Linien unter einander in Verbindung gesetzt (wohl aber die Wiederholungen der Nummer 148 durch eine gestrichelte Linie in blossem Schwarzdrucke).

Was nun bei Betrachtung dieser Linien als das Wesentlichste in den Beziehungen zwischen geographischer Verbreitung und systematischer Stellung sofort in die Augen springt, ist, dass gewisse Sectionen ganz oder doch mit der Hauptmasse ihrer Arten, und abgesehen von einzelnen Ausläufern, zusammen das gleiche engere Gebiet oder einzelne Sectionen ein besonderes solches innerhalb des schon oben p. 47 bezeichneten Verbreitungsbezirkes der Gattung besetzt halten und demgemäss als geographisch-systematische Gruppen oder Abtheilungen sich zu erkennen geben, während der Rest mit nur einer Section über den ganzen Bezirk sich ausgedehnt zeigt und so wieder eine besondere Abtheilung von kosmopolitischem Character darstellt.

Diesen Rest bildet lediglich die XII. Section, welche zugleich die artenreichste ist.

Die anderen Sectionen stellen drei Gruppen oder Abtheilungen dar, denen der bezeichnete Rest als vierte Abtheilung anzuschliessen ist.

Die drei ersten dieser Abtheilungen, von welchen die erste und dritte je aus mehreren Sectionen zusammengesetzt ist, sind auf der Karte durch rothe, blaue und grüne Farbe der betreffenden Sectionslinien ausgezeichnet, von denen die meisten in sich zurücklaufende Curven bilden und als die Grenzlinien der betreffenden Verbreitungsareale betrachtet werden können. Für die kosmopolitische vierte Abtheilung ist die entsprechende Linie farblos geblieben.

Die grösste dieser Abtheilungen, welche als solche, und weil sie die erste Section in sich schliesst, als die erste bezeichnet sein mag, gehört, wie die Karte in dem

Verlaufe der gelben Linien zeigt, abgesehen von ein paar Ausläufern nach dem Gebiete der zweiten und dritten Abtheilung hin, jenem Theile des südamericanischen Festlandes an, welcher sich innerhalb der tropischen und subtropischen Zone von den Anden ostwärts gegen den atlantischen Ocean herabzieht. Es mag dieses Gebiet kurzweg als Gebiet des cisandinen Südamerica und darnach auch die betreffende Abtheilung als (südliche) cisandine bezeichnet werden.

Die zweite Abtheilung gehört den Inseln und Gürtelländern der Antillensee an — Gebiet der Antillensee: antillane Abtheilung.

Die dritte Abtheilung begleitet die Anden in ihrer Erstreckung von Bolivia bis zum mexicanischen Hochlande — andines Gebiet, oder genauer gesagt andines, subandines und transandines Gebiet mit Einschluss des mexicanischen Hochlandes: andine Abtheilung.

Die vierte Abtheilung erstreckt sich, wie schon bemerkt, auf das Gesammtgebiet: kosmopolitische Abtheilung.

Für jede dieser Abtheilungen scheint ein gemeinschaftlicher Stamm angenommen werden zu können, dessen Heimat eines der betreffenden Gebiete war und dessen Aeste bei ihrer weiteren Differenzirung und Ausbreitung mit ihren letzten Gliedern allmälig auch in die Gebiete anderer Stämme hinübergriffen. So kommt es, dass sich die rein geographischen und die rein systematischen Gruppen nicht mehr vollkommen decken, wohl aber immer noch ihrem Haupttheile nach, und es alterirt die Einheit der geographisch-systematischen Abtheilungen nicht wesentlich, wenn auch einzelne Ausläufer als selbständige Arten sich nun derart abgegliedert haben, dass für sie das Verbreitungscentrum und ihr Vorkommen überhaupt einem anderen Gebiete angehört, wie z. B. die von *S. communis* abgegliederte *S. cardiospermoides*, die von *S. caracasana* abgegliederte *S. crenata* und andere, welche in der folgenden Betrachtung der einzelnen Abtheilungen ihre Erwähnung finden werden.

An der Bildung der ersten und grössten Abtheilung nehmen die Sectionen I, III, IV, V, VI, VIII und IX Theil. Ganz und gar gehören dieser Abtheilung die Sectionen V, VIII und IX an. Die Section I zieht sich nur durch eine, dort allein einheimische Art, n. 10, *S. cardiospermoides*, hinüber auf das Gebiet der dritten Abtheilung in seiner nördlichen Erstreckung (Mexico), ferner in seiner südlichen Erstreckung durch zwei Arten, n. 11, *S. dumicola* und n. 14, *S. areolata*. Bis an die äussersten Grenzen des Gebietes nach Westen verbreitet sich *S. communis*, n. 5, welche überhaupt die weiteste Verbreitung unter den Arten dieser Section besitzt, und dorthin vorgeschobene äusserste Posten bilden n. 12, *S. leptocarpa*, n. 13, *S. Ampelopsis*, n. 14, *S. areolata* und n. 17, *S. squarrosa*, sowie im Nordosten, bis wohin die *S. communis* ebenfalls reicht (Venezuela) die *S. chartacea*, n. 15 (in Guiana). Die Section III, welche einen sehr compacten Knäuel brasilianischer Arten und einer ostperuanischen, n. 28, *S. altissima*, sowie einer guianischen Art, n. 27, *S. pedicellaris*, darstellt, greift mit einer diesem Knäuel durch ihr Vorkommen in Venezuela noch deutlich angegliederten Art, n. 43, *S. diversifolia*, hinüber auf das Gebiet der zweiten Abtheilung, woselbst

diese Art ihr vorzugsweises Vorkommen besitzt, und woselbst sich ihr eine zweite, ausschliesslich dort (in Guatemala) vorkommende Art, n. 42, *S. depauperata*, anschliesst, sowie die nur fragweise als eine Bürgerin von S. Domingo angesehene n. 32, *S. cuneolata*. Die Section IV greift durch nur 1, dort allein einheimische Art, n. 49, *S. crenata*, für die es aber noch nicht ausgemacht ist, dass sie nicht einst als eine blosse Form der weit verbreiteten *S. caracasana* anzusehen sein wird, hinüber auf das Gebiet der zweiten Abtheilung, welches sie auch durch die eben genannte *S. caracasana*, n. 47, und durch *S. adusta*, n. 53, betritt. Vorgeschobene Posten in der Richtung gegen das Gebiet der dritten Abtheilung, an welches die *S. caracasana* ebenfalls heranreicht, bilden n. 50, *S. sphaerococca*, n. 47, *S. pyramidata* und n. 54, *S. Seemanni*. Die Section VI endlich greift, wie die Section I, durch eine Art, n. 62, *S. plicata* in Mexico, hinüber auf das Gebiet der dritten Abtheilung im Norden und berührt dasselbe im Süden durch die weit verbreitete *S. glabrata*, n. 63, welche in der Ausdehnung ihres Verbreitungsbezirkes der *S. communis* aus der ersten und der *S. caracasana* aus der vierten Section nahe kommt.

Die zweite und zugleich die kleinste Abtheilung wird lediglich von der VII. Section gebildet. Keine Art dieser Section greift entschieden in das Gebiet der ersten oder dritten Abtheilung hinüber, wenn nicht *S. paniculata*, n. 69, durch ihr Vorkommen bei Acapulco auf der Westseite Mexico's. Wohl aber erstrecken sich Theile der ersten und der dritten Abtheilung auf dieses Gebiet oder gehören ihm sogar mit ihrem Verbreitungscentrum an, von jener, wie schon erwähnt, *S. diversifolia*, *depauperata*, *cuneolata* und *crenata* (*S. caracasana* und *adusta*), von dieser *S. mexicana* (s. im Folgenden).

Die dritte Abtheilung bilden die Sectionen II, X und XI. Die nur aus zwei Arten bestehende II. Section und die XI. Section, bei welcher freilich viele Arten nur in provisorischer Weise untergebracht sind, gehören lediglich dieser Abtheilung an. Die X. Section greift durch die weit verbreitete *S. mexicana*, n. 91, zugleich hinüber auf das Gebiet der zweiten Abtheilung.

Für die vierte Abtheilung endlich, welche von der XII. Section gebildet wird, ist wohl in's Auge zu fassen, dass diese Section gleichsam als zweite Gattungshälfte, so zu sagen als eine besondere Untergattung, den sämmtlichen übrigen Sectionen gegenüber steht und dass sie wahrscheinlich mit der Zeit in mehrere, den übrigen gleichwerthigere Sectionen zu spalten sein wird, während zur Zeit hiefür ausreichende Anhaltspunkte nicht gegeben sind. Diese Section ist es zugleich, welche der mit *Serjania* so nahe verwandten Gattung *Paullinia* (s. das Vorwort zur Monographie von *Serjania*) am nächsten steht. Dadurch wird die Annahme nahe gelegt, dass bei der Differencirung der Gattungen *Paullinia* und *Serjania* aus einem gemeinschaftlichen Stamme, welchen der Parallelismus beider Gattungen voraussetzen lässt (s. a. a. O. p. VI), zunächst diese Section — in allen Theilen des Gesammtgebietes — hervorgetreten ist, und dass sich erst aus ihr allmälig die übrigen Sectionen, resp. Abtheilungen, in den Sondergebieten hervorgebildet haben.

Dieser Annahme entspricht die Verbreitung der XII. Section über das ganze, der Summe der übrigen Sectionen zukommende Gebiet, welches zugleich auch das Verbreitungsgebiet der Gattung *Paullinia* ist.

Keine Art dieser Abtheilung ist übrigens, so wenig wie irgend eine Art der anderen Abtheilungen, über das ganze Gebiet verbreitet. Vielmehr lässt sich auch hier wieder eine den übrigen Abtheilungen entsprechende Gliederung in drei Gruppen von Arten unterscheiden. Die eine Gruppe mit 11 (von 29) Arten gehört vorzugsweise Brasilien und den benachbarten Ländern des cisandinen Südamerica an: *S. meridionalis*, *orbicularis*, *tristis*, *serrata*, *cissoides*, *hebecarpa*, *Mansiana*, *noxia*, *multiflora*, *purpurascens*, *nigricans*; eine verhältnissmässig armgliedrige Gruppe dem Gebiete der Antillensee mit nur 2 Arten: *S. filicifolia* und *curassavica*; der Rest mit 16 Arten dem andinen Gebiete. Nur eine Art dieses dritten Gebietes (aus der in Betrachtung stehenden vierten Abtheilung) reicht auch in das erste hinüber (*S. clematidea*); nur eine des zweiten Gebietes in das dritte (*S. curassavica*); von den Arten des ersten Gebietes erreicht keine eines der beiden anderen.

Mit jeder dieser drei Gruppen, die sich aber zur Zeit nicht ebenso als systematische wie als geographische darstellen, mischen sich dann in jedem der betreffenden Sondergebiete die Glieder einer der drei ersten geographisch-systematischen Abtheilungen wie etwa die Zweige eines oberen Astes mit denen eines unteren am gleichen Stamme.

Stellt man für jede Section die Zahl der auf die drei Sondergebiete treffenden Arten nach der Lage ihrer Verbreitungscentren zusammen, so ergibt sich folgende Uebersicht:

Arten der Section:	In Gebiet 1:	In Gebiet 2:	In Gebiet 3:
I	17	0	2 (S. cardiospermoides, S. dumicola.)
II	0	0	2
III	19	3 (S. cuneolata, depauperata, diversifolia.)	0
IV	10	1 (S. crenata.)	0
V	4	0	0
VI	5	0	1 (S. plicata.)
VII	0	7	0
VIII	9	0	0
IX	10	0	0
X	0	0	6
XI	0	0	20
XII	11	2 (S. filicifolia, S. curassavica.)	16
Sedis dubiae	6	4 (S. setulosa, inebrians, nodosa, angustifolia.)	0
Summa	91	17	47
		155	

Bezüglich der für die erste Section angegebenen Zahlen bemerke ich, dass bei ihrer Feststellung die *Serj. areolata*, wie auf der Karte, als Pflanze des cisandinen Gebietes angesehen wurde. In der tabellarischen Uebersicht hat sich aus Versehen ein anderer Eintrag erhalten, in welchem die Pflanze fragweise als dem andinen Bolivia angehörig betrachtet ist (das Fragezeichen auf gleicher Höhe mit dem Zeichen „o" sollte nämlich rechts von diesem in der gleichen Rubrik stehen). Da die Pflanze bis jetzt nur einmal, so zu sagen auf der Grenze von andinem und cisandinem Gebiete beobachtet worden ist, so wird es der Zukunft überlassen bleiben müssen, ihre Zugehörigkeit zu dem einen oder dem anderen durch weitere Beobachtungen ausser Frage zu stellen.

Das beschränkteste Gebiet nehmen die Sectionen mit der geringsten Artenzahl ein:

Section II mit 2 Arten und
„ V „ 4 „ ,

die erstere ganz dem südlichen Theile des andinen Gebietes, die letztere dem südlichen Theile des cisandinen Südamerica angehörend.

Auf abgerundete Gebiete, über welche sie nicht oder kaum hinausgreifen, sind weiter eingeengt:

Section VII mit 7 Arten im Antillengebiete,
„ VIII „ 9 „ „ cisandinen Südamerica,
„ IX „ 10 „ „ „ „
„ XI „ 20 „ „ andinen Gebiete.

Den grössten Theil des ersten Hauptgebietes nimmt Brasilien ein. Doch ist keine Section auf Brasilien allein beschränkt; wohl aber eine erkleckliche Zahl von Arten, 50 nämlich, welche schon oben, p. 172, in den cursiv und zugleich fett gedruckten Artnummern verzeichnet sind.

Die weitest verbreitete Art ist, wie schon p. 47 hervorgehoben wurde, die *S. caracasana*, welche von Argentinien und Südbrasilien bis Costarica geht, und zwar ebensowohl auf dem Wege über Peru, wie auf dem Wege über Guiana und Venezuela, zugleich auch, falls die *S. crenata* nur als eine Form derselben betrachtet wird, Cuba erreichend. Eine ähnliche, weite Verbreitung besitzt in dem südlichen Theile des Gattungsgebietes auch *S. communis* und *S. glabrata*, in dem nördlichen aber *S. mexicana*, welche von Mexico und Jamaica bis zu den Caraïben und auf der Südseite der Antillensee nach Neu-Granada und Venezuela sich erstreckt.

VIII. Materialienverzeichniss.

Zusammenstellung der in dem Supplemente angeführten Materialien von Serjania nach Sammlern und nummerirten Sammlungen unter Berücksichtigung des Sammelgebietes.

(Vergl. die Bemerkungen zu der entsprechenden Zusammenstellung in der Monographie von Serjania, p. 362.)

Alexander, sieh Prior, Alex.
Andersson, N. J.; Brasilien (1851):
— S. cuspidata Camb.
Balansa; Paraguay (1874—77):
— n. 2478. S. marginata Casar., forma 1.
— n. 2480. S. perulacea R.
— n. 2482. S. caracasana Willd., forma 1.
— n. 2484, partim. S. glabrata Kunth, forma 1.
— n. 2484, partim. S. Laruotteana Camb.
— n. 2485. S. meridionalis Camb.
— n. 2487. S. hebecarpa Benth., forma 1.
— n. 2487, a. S. hebecarpa Benth., forma 2.
— n. 2489. S. fuscifolia R.
— n. 2490, partim. S. caracasana Willd., forma 1 (partim Paullinia elegans Camb.).
Bates; Mexico:
— S. macrococca R.
Bello; Porto-Rico (1880):
— S. polyphylla R.
Berlandier; Mexico (1830):
— n. 2271. S. brachycarpa A. Gray.
Bernouilli & Cario; Guatemala (1877—78):
— n. 2927. S. triquetra R.
— n. 2929. S. depauperata R.
— n. 2934. S. atrolineata Sauvalle et Wright.
Bilimek; Mexico (1866):
— n. 240. S. racemosa Schum., forma 3.
Boog; Brasilien:
— S. dentata R.
Botteri & Sumichrast; Mexico:
— n. 1871. S. sordida R.
Bourgeau; Mexico (1866):
— n. 1744. S. racemosa Schum., forma 3.
— S. sordida R.
Browne, Patrik; Jamaica:
— S. mexicana Willd.
Cario, sieh Bernouilli & C.
Colley-Parodi; Paraguay (1883):
— S. erecta R.
Coulter, Dr.; Mexico (um 1832):
— n. 880. S. racemosa Schum., forma 2.
Didrichsen; Argentinien:
— S. decemstriata R.
Duchassaing; Panama (1850—51):
— S. atrolineata Sauvalle et Wright.
Duchassaing; S. Thomas (1850):
— S. polyphylla R.
Dugès; Mexico:
— S. racemosa Schum.
Eaton & Edwards; Mexico (1846):
— S. macrococca R.
Eggers; S. Thomas (1880):
— n. 192. S. polyphylla R.
Endres; Costa Rica:
— n. 142. S. caracasana Willd., forma 3.
Fendler; Trinidad (1877—80):
— n. 273. S. paucidentata DC.
Fendler; Venezuela (1854—55?):
— n. 203. S. communis Camb., var. γ.
Ferreira, Dr. A. R., ? Brasilien:
— n. 750. S. orbicularis R.
Fox; Brasilien:
— n. 57. S. Laruotteana Camb.
Friedrichsthal; Guatemala, resp. Nicaragua (um 1841):
— n. 5. S. mexicana Willd.
Garber, A. P.; Porto-Rico (1880):
— n. 124. S. polyphylla R.

Gaudichaud; Brasilien (um 1831):
— n. 46. S. Salzmanniana Schlecht. em.
Ghisbreght; Mexico (1838):
— n. 173. S. triquetra R.
— n. 197. S. goniocarpa R.
Gibert, E.; Paraguay (1858, 1873):
— n. 64. S. fuscifolia R.
— n. 1036. S. glabrata Kunth, forma 1.
Gibert, E.; Uruguay (1867):
— n. 300. S. hebecarpa Benth., forma 3.
Glaziou; Brasilien (1872—84):
— n. 6498. S. cuspidata Camb.
— n. 6699. S. piscatoria R.
— n. 7549. S. caracasana Willd., forma 3.
— n. 7550. S. elegans Camb. em.
— n. 7860. S. caracasana Willd., forma 3.
— n. 7861. S. piscatoria R.
— n. 7862. S. ichthyoctona R.
— n. 8296. S. elegans Camb. em.
— n. 8298. S. fuscifolia R.
— n. 8592. S. communis Camb., var. α.
— n. 8593. S. communis Camb., var. α.
— n. 8594. S. fuscifolia R.
— n. 8595. S. deflexa Gardn.
— n. 8597. S. communis Camb., var. β.
— n. 8598. S. communis Camb., var. γ.
— n. 8599. S. dentata R.
— n. 8600. S. tenuis R.
— n. 8603. S. fuscifolia R.
— n. 8604. S. clematidifolia Camb.
— n. 8963. S. communis Camb., var. α.
— n. 9702. S. paucidentata DC.
— n. 9705. S. lethalis St. Hil.
— n. 10414. S. caracasana Willd., forma 1.
— n. 10416. S. hebecarpa Benth., forma 1.
— n. 10417. S. glabrata Kunth, forma 2.
— n. 10433. S. gracilis R.
— n. 12497. S. Laruotteana Camb.
— n. 12504. S. dentata R.
— n. 12506. S. lamelligera R.
— n. 12507. S. grandiflora Camb.
— n. 13620. S. grandifolia Sagot.
— n. 13623. S. acutidentata R.
— n. 13624. S. tenuis R.
— n. 13630. S. dentata R.
— n. 14579. S. elegans Camb. em.
— n. 15450. S. piscatoria R.
Hahn; Mexico (1865):
— S. cardiospermoides Schlecht. et Cham.
Hamilton; West-Indien:
— S. sinuata Schum.
Hecker; S. Salvador (1877):
— S. triquetra R.
Hieronymus, sieh Lorentz & H.
Jameson; Ecuador (1846):
— n. 184. S. glabrata Kunth, forma 2.
Jenman, G. S.; Brit. Guiana (1881):
— n. 1191. S. paucidentata DC.
Kalbreyer; Neu-Granada (1878):
— n. 800. S. Ampelopsis Planch. & Lind.
Kerber, E.; Mexico (1882):
— n. 77. S. goniocarpa R.
— n. 129, partim. S. racemosa Schum., forma 1.
— n. 129, partim. S. racemosa Schum., forma 3.
— n. 130. S. goniocarpa R.
Kuntze, O.; Venezuela (1874):
— n. 1390. S. mexicana Willd.
Langsdorff; Brasilien (1817):
— n. 2088. S. corrugata R.
Lechler; Peru (1854):
— n. 2331 (?). S. subrotundifolia R.
Lévy, P.; Nicaragua (1870):
— n. 420. S. atrolineata Sauvalle et Wright.
Linden; Mexico (1838):
— n. 899. S. macrococca R.
Lorentz; Argentinien (1872, 1875—76):
— n. 115, partim. S. hebecarpa Benth., forma 3 (?) (partim Paullinia elegans Camb.).
— n. 170. S. hebecarpa Benth., forma 3.
— n. 288. S. foveata Griseb.
— n. 574. S. hebecarpa Benth., forma 3.
— n. 636. S. meridionalis Camb.
— n. 957, partim. S. hebecarpa Benth., forma 3 (partim Urvillea uniloba R.).
Lorentz & Hieronymus; Argentinien (1871—74):
— n. 50. S. glabrata Kunth, forma 2.
— n. 517. S. erecta R.
— n. 532. S. caracasana Willd., forma 1.
— n. 588. S. caracasana Willd., forma 1.
— n. 713. S. glabrata Kunth, forma 2.
— n. 792. S. glabrata Kunth, forma 2.
— n. 928. S. glabrata Kunth, forma 2.
— S. marginata Casar., forma 1.
Mac Lean; Cuba:
— S. diversifolia R.
Macrae; Brasilien (1825 ?):
— S. confertiflora R.
— S. dentata R.

Mackenzie; S. Domingo:
— S. polyphylla R.

Matthews; Peru (1835, 1840):
— n. 1322. S. altissima R.
— n. 3094. S. peruviana R.

Miers; Brasilien (1831—38):
— n. 3193. S. clematidifolia Camb.
— n. 3720. S. cuspidata Camb.
— n. 3967. S. cuspidata Camb.

Mosén; Brasilien (1873—75):
— n. 369. S. grandiflora Camb.
— n. 1166. S. meridionalis Camb.
— n. 1167. S. erecta R.
— n. 1168. S. reticulata Camb., forma 1.
— n. 1808. S. glabrata Kunth, forma 1.
— n. 1809. S. tristis R.
— n. 1810. S. reticulata Camb., forma 2.
— n. 1811. S. reticulata Camb., forma 2.
— n. 1812. S. reticulata Camb., forma 2.
— n. 1813. S. reticulata Camb., forma 2.
— n. 1814. S. Laruotteana Camb.
— n. 1816. S. Laruotteana Camb.
— n. 1954. S. Regnellii Schlecht.
— n. 1955. S. Laruotteana Camb.
— n. 1956. S. multiflora Camb.
— n. 2423. S. Laruotteana Camb.
— n. 2424. S. fuscifolia R.
— n. 2425. S. clematidifolia Camb.
— n. 2426. S. clematidifolia Camb.
— n. 2427. S. ichthyoctona R.
— n. 3345. S. communis Camb., var. β.
— n. 3602. S. gracilis R.
— n. 3603. S. communis Camb., var. γ.
— n. 3604. S. communis Camb., var. γ.
— n. 3605. S. communis Camb., var. γ.
— n. 3833. S. communis Camb., var. α.
— n. 3834. S. Laruotteana Camb.
— n. 3835. S. fuscifolia R.
— n. 3836. S. reticulata Camb., forma 1.
— n. 3837. S. pinnatifolia R.
— n. 3951. S. noxia Camb.
— n. 3952. S. reticulata Camb., forma 1.
— n. 4034. S. erecta R.

Müller, Fritz; Brasilien (1868—69):
— n. 194, partim. S. communis Camb., var. β.
— n. 194, partim. S. communis Camb., var. γ.
— n. 325. S. Laruotteana Camb.

Müller, Dr. Wilh.; Brasilien:[1])
— S. meridionalis Camb.

Palmer, Dr. Ed.; Mexico (1880):
— n. 186. S. cystocarpa R.

Palmer, Dr. Ed.; Texas (1879—80):
— n. 125. S. brachycarpa A. Gray.

Parodi, sieh Colley-Parodi.

Parry, C. C.; Texas (1878):
— n. 123½. S. incisa Torrey.

Pearce; Argentinien (1864):
— S. glabrata Kunth, forma 2.

Pearce; Bolivia (1865—66):
— S. areolata R.
— S. marginata Casar., forma 1.
— S. reticulata Camb.
— (?) S. sufferruginea R.

Pearce; (Ecuador?):
— S. mucronulata R.

Prior, Alex.; Jamaica (1850):
— S. mexicana Willd.

Regnell; Brasilien (1845—72):
— I, 38**. S. meridionalis Camb.
— III, 341, partim. S. meridionalis Camb. (partim Urvillea laevis R.).
— III, 346, partim. S. Laruotteana Camb.
— III, 346, partim. S. multiflora Camb.
— III, 348, a, partim. S. lethalis St. Hil.
— III, 348, a, partim. S. obtusidentata R.

---

[1]) Es mögen hier auch die übrigen von Dr. Wilh. Müller in der brasilianischen Provinz Santa Catharina, um Blumenau gesammelten und p. 45—51 des Separatabdruckes aus der oben (p. 145) genannten Spengel'schen Zeitschrift als Futterpflanzen von Nymphalidenraupen angeführten Pflanzen erwähnt sein, nämlich: *Paullinia seminuda Radlk.*, *Urvillea ulmacea Kunth* und *Allophylus petiolulatus Radlk. sp. n.* (nicht „*petiolatus*“, wie es a. a. O. p. 51 irrthümlicher Weise heisst) mit folgender, unter dem 24. XI. 1885 an Müller mitgetheilter Diagnose:

Allophylus petiolulatus Radlk.: Rami subglabri, cortice cinerascente lenticelloso; folia ternata, foliolis elliptico- vel subobovato-lanceolatis, supra medium plus minus serratis, glabris vel subtus puberulis, in petiolulos longiusculos attenuatis; thyrsi basi ramis plerumque 2—3 divaricatis instructi; fructus obovoidei, mediocres; semina glabra. — Species brasiliensis.

Regnell (Fortsetzung):
— III, 348, b. S. obtusidentata R.
— III, 348, c. S. lethalis St. Hil.
— III, 350*. S. meridionalis Camb.
— III, 1750. S. tristis R.
— III, 1751. S. Laruotteana Camb.
— III, 1752. S. Laruotteana Camb.
Robinson, Governor; Bahamas (1877):
— n. 25. S. subdentata Juss. ed. Poir., forma 1.
Rugel; Cuba (1849):
— n. 52. S. subdentata Juss. ed. Poir., forma 1.
Saldanha, J. de; Brasilien (um 1879):
— n. 5354. S. dentata R.
— n. 5913. S. ichthyoctona R.
— n. 6213. S. clematidifolia Camb.
— n. 7454. S. corrugata R.
Salvin; Guatemala (1873):
— S. racemosa Schum., forma 1.
Salvin & Godman; Guatemala (1861):
— n. 302. S. racemosa Schum., forma 1.
Schwacke; Brasilien (1882):
— III, 21. S. grandifolia Sagot.
Sintenis, P.; Porto-Rico (1884—85):
— n. 274. S. polyphylla R.
— n. 274, b. S. polyphylla R.
Sodiro; Ecuador (1871—74):
— S. brevipes Benth.
— S. diffusa R.
— S. longipes R.
— S. mucronulata R.
— S. pyramidata R.
Sumichrast, sieh Botteri & S.
Thurn, E. F. im; Brit. Guiana (1879):
— S. paucidentata DC.
Trail; Brasilien (1873—74):
— n. 119. S. paucidentata DC.
— n. 120. S. clematidea Triana & Planch.
Tweedie; Brasilien (1837):
— n. 1260. S. cuspidata Camb.
— S. decemstriata R.
Watson; Guatemala (1885):
— S. mexicana Willd.
Weir; Brasilien (1862):
— n. 501, partim. S. glabrata Kunth, forma 1.
— n. 501, partim. S. viridissima R.
Widgren; Brasilien (1844):
— n. 410½. S. fuscifolia R.
— S. clematidifolia Camb.
— S. communis Camb., var. γ.
— S. cuspidata Camb.
— S. tenuis R.
Wilkes Expedition; Brasilien (1838—42):
— S. clematidifolia Camb.
Wright, C.; Cuba (1860):
— n. 2160, partim. S. crassinervis R.
— n. 2160, partim. S. subdentata Juss. ed. Poir., forma 4.
Wright, C. (?); S. Domingo (1871):
— n. 108 (Flora Domingens.). S. sinuata Schum.
Wright, C.; Nicaragua (1853—56):
— S. mexicana Willd.
Xantus; Mexico (1859—60):
— n. 19. S. (?) californica R.

IX. Figurenerklärung.

Tafel I und II.

Figur 1 bis 21. Zweig- und Stammstücke verschiedener Arten von *Serjania* (Taf. I), von *Thinouia* und *Urvillea* (Taf. II), die der erstgenannten Gattung mit zusammengesetztem (Fig. 1—11), die der zweiten mit umstricktem (Fig. 12 bis 15), die der dritten mit zerklüftetem (Fig. 16—17), oder mit gelapptem Holzkörper (Fig. 18—21), in natürlicher Grösse, nach Materialien von Warming (Fig. 3, 4 und 15) und von Correa de Méllo (die übrigen Figuren). Sieh oben p. 2 etc.

Die betreffenden Arten sind:

Tafel I: Arten von *Serjania*:

Fig. 1 und 2. Serjania communis Camb.
„ 3 „ 4. — lethalis St. Hil.
„ 5, 6, 7. — fuscifolia Radlk. (Fig. 7 nach Entfernung der Rindensubstanz).
„ 8, 9, 10, 11. — Laruotteana Camb. (Fig. 10 nach Entfernung der Rindensubstanz).

Tafel II: Arten von *Thinouia* und *Urvillea*:

Fig. 12, 13, 14. Thinouia ventricosa Radlk.
„ 15. — scandens Triana & Planch.?
„ 16, 17. Urvillea laevis Radlk.
„ 18, 19, 20, 21. — ulmacea Kunth. (Fig. 21 nach Entfernung der Rinde.)

An dem älteren Stammstücke von *Serjania Laruotteana* (Fig. 11) zeigt der Querschnitt ausser dem centralen und den ihn umgebenden peripherischen ursprünglichen (primären) Holzkörpern mit grösserer Querschnittsfläche und regelmässig geordneten Markstrahlen später entstandene, „secundäre“ Holzkörper und Holzplatten im Umkreise der primären und zwischen denselben in grösserer Anzahl.

Die Fig. 10 stellt den durch Maceration von aller Rindensubstanz befreiten „zusammengesetzten“ Holzkörper eines älteren Zweiges von *Serjania Laruotteana* dar. Einen ebensolchen von *Serjania fuscifolia* die Fig. 7. Weiter von *Urvillea ulmacea* mit „gelapptem“ Holzkörper die Fig. 21.

An dem älteren Stammstücke von *Thinouia scandens* (Fig. 15) sind ausser den durch das halbmondförmige Mark ausgezeichneten secundären Holzkörpern erster Ordnung in der Umgebung des ursprünglichen Holzkörpers auch solche zweiter Ordnung nach aussen von den ersteren entwickelt.

An den jungen Zweigen in aufrechter Stellung sind auf beiden Tafeln über den Blattstielen oder den Blattnarben die Ursprungsstellen oder Reste der zum Theile nach abwärts gebogenen Rankenzweige und der Innovationszweige, gelegentlich mit Seitenknospen, zu sehen.

Tafel III und IV.

Figur 1 bis 28. Haupttypen der anomalen Zweigstructur in der Gattung *Serjania*, des zusammengesetzten (Fig. 1—26) und des getheilten Holzkörpers (Fig. 27 und 28), sowie ihrer Modificationen bei bestimmten Arten (sieh die Aufzählung derselben p. 10—14 und p. 18, sowie die Artcharacteristiken).

Die Figuren sind nach Querschnitten beblätterter Zweige (Herbarmaterial) mit dem Prisma bei schwacher (15-facher) Vergrösserung gezeichnet. Der Holzkörper ist durch Andeutung der Gefässe, der Sclerenchymring in mehreren Figuren durch Punktirung, in Fig. 10 auch das darüber liegende Collenchym durch feinere Punktirung und das Grundgewebe durch kleine Strichelchen schematisch gekennzeichnet (vergl. p. 9).

Die dargestellten Arten sind die folgenden:

Tafel III.				Tafel IV.			
Fig.	1.	Serjania tenuis Radlk.	(Sectio I.)	Fig.	15.	Serjania atrolineata Sauv. & Wr.	(Sect. VII.)
„	2.	— Regnellii Schl.	„	„	16.	— oblongifolia Radlk.	(Sect. VIII.)
„	3.	— cuspidata Camb.	„	„	17.	— amplifolia Radlk.	„
„	4.	— communis Camb.	„	„	18.	— clematidifolia Camb.	„
„	5.	— leptocarpa Radlk.	„	„	19.	— perulacea Radlk.	(Sect. IX.)
„	6.	— chartacea Radlk.	„	„	20.	— ichthyoctona Radlk.	„
„	7.	— trichomisca Radlk.	„	„	21.	— oxytoma Radlk.	„
„	8.	— confertiflora Radlk.	„	„	22.	— sufferruginea Radlk.	(Sect. XI.)
„	9.	— mollis Kunth.	(Sect. II.)	„	23.	— curassavica Radlk.	(Sect. XII.)
„	10.	— caracasana Willd.	(Sect. IV.)	„	24.	— deltoidea Radlk.	„
„	11.	— pyramidata Radlk.	„	„	25.	— clematidea Tr. & Pl.	„
„	12.	— glabrata Kunth	(Sect. VI.)	„	26.	— insignis Radlk.	„
„	13.	— thoracoides Radlk.	„	„	27.	— corrugata Radlk.	(Sect. III.)
„	14.	— subdentata Juss.	(Sect. VII.)	„	28.	— paradoxa Radlk.	„

Tafel V.

Figur 1. Querschnitt eines jungen, noch Blätter tragenden Zweiges von *Serjania caracasana* Willd., die Hälfte eines peripherischen Holzkörpers, A—A, und ein Fragment des centralen Holzkörpers, B—B, bis zum Marke, nebst dem Rindengewebe umfassend, bei 250-facher Vergrösserung halb schematisch gezeichnet, zur Darstellung der histiologischen Einzelheiten.

Die Bezeichnung der Gewebselemente, von denen die mit braunem, gerbstofführendem Inhalte durch Schraffirung ausgezeichnet sind, ist nur für den peripherischen Holzkörper (A) und die ihn umgebenden Theile durch grösstentheils an dem linken

Rande der Zeichnung angebrachte Buchstaben durchgeführt. Diese sind in der Reihenfolge von oben nach unten und abgesehen von Wiederholungen, die folgenden:

e, Epidermis;
p, Parenchym der äusseren Rinde;
co, Collenchym;
f, länger gestreckte, faserartige Zellen im Collenchyme
sc, Sclerenchymring;
st (rechts), Steinzellen im Sclerenchymringe,
bi, fortbildungsfähiges Grundgewebe;
b, Bastfasern;
bp, Bastparenchym;
s (rechts), Secretschläuche;
ms, Markstrahl;
sp, Spiralgefässe;
m, Mark;
d, dünnwandiges Gewebe an der Markseite eines Gefässbündels;
g, getüpfelte Gefässe (die Tüpfel überall schematisch als Doppel-Hoftüpfel gezeichnet);
pr, Holzprosenchym;
hp, Holzparenchym, einem Gefässe anliegend und hier auf Seite der Parenchymzellenwandung mit einfachen Tüpfeln, auf Seite der Gefässwandung mit einseitigen (einfachen) Hoftüpfeln, wie zur Präcisirung des im Texte p. 16 Gesagten hier beigefügt sein mag;
mm, Mark des centralen Holzkörpers (B).

Figur 2 und 3. Bei noch etwas stärkerer Vergrösserung gezeichnete Querschnitt-Fragmente des Sclerenchymringes, die unter dem Drucke der heranwachsenden inneren Theile erfolgende Zerklüftung desselben und die beginnende Ausfüllung der entstandenen Klüfte von dem benachbarten dünnwandigen Gewebe aus darstellend.

Tafel VI.

Figur 1. Der Figur 1 der Tafel V entsprechende halb schematische Darstellung eines radiären, durch einen peripherischen und die äussere Hälfte des centralen Holzkörpers gehenden Längsschnittes aus dem Zweige von *Serjania caracasana* Willd., in 250-facher Vergrösserung.

Die Bezeichnung der Gewebselemente ist dieselbe wie für Tafel V, Fig. 1, wozu hier noch weiter kommen:

si, Siebröhren;
k, krystallführende Zellen des Bastes;
kh, krystallführende Zellen des Holzes.

Figur 2 und 3. Durch einen Seitennerven gehende Querschnitte des Blattes von *Serjania crassinervis* Radlk., in Fig. 2 vor, in Fig. 3 nach dem Befeuchten mit Wasser bei 250-maliger Vergrösserung gezeichnet.

Die zur Bezeichnung der einzelnen Theile angebrachten Buchstaben sind folgende:

b, Hartbast des Gefässbündels
w, Weichbast „ „
h, Holzkörper „ „
} (nur in Fig. 2 angebracht);

v, verschleimte Epidermiszellen, in Fig. 3 von der gequollenen Schleimmasse überlagert;

sz, Secretzellen;

s, Milchsaftschläuche.

Die Plasmaschläuche in den Zellen der Epidermis und des schwammförmigen Gewebes, sowie der Gerbstoffinhalt in den Zellen des Pallisadengewebes ist nur links an einem kleinen Theile der beiden Figuren angedeutet.

Tafel VII.

Figur 1, 2 und 3. Schnitte aus dem Blatte von *Serjania communis Camb., var. γ. glabra Radlk.*, 250-mal vergrössert.

Figur 1. Flächenschnitt von der oberen Blattseite mit verschleimten Epidermiszellen, v, welche von nicht verschleimten umgeben sind. Von den letzteren sind diejenigen, welche über einem Gefässbündel lagen, durch gestreckte Gestalt ausgezeichnet. An einigen Stellen hat der Schnitt auch die oberen Theile der Pallisadenzellen, p, in der Umgebung der verschleimten Epidermiszellen abgehoben.

Figur 2 und 3. Durchschnitte durch das Blattgewebe und einen Seitennerven, in Fig. 2 vor, in Fig. 3 nach dem Befeuchten des Schnittes mit Wasser gezeichnet. Der Gefässbündel besitzt hier keinen Hartbast; der Weichbast in der unteren Hälfte ist an der Kleinzelligkeit seines Gewebes, der Holzkörper in der oberen Hälfte an der reihenweisen Ordnung seiner Elemente leicht zu erkennen. Die schraffirten Elemente in der Umgebung des Gefässbündels und am linken Ende der beiden Figuren sind Zellen mit Gerbstoffinhalt. Nur an dem linken Ende der beiden Figuren sind auch die Plasmaschläuche in den Zellen des Schwammgewebes angedeutet. Im Schwammgewebe und in der Nähe des Gefässbündels finden sich Zellen mit Krystalldrusen. Unter dem Gefässbündel liegen verschleimte Innenzellen, v′. Die verschleimten Zellen der Epidermis sind mit v bezeichnet. Die verschleimte Membran zeigt nach der Quellung deutliche Schichtung, auch an der über den Schnitt hervorgequollenen Schleimmasse.

Tafel VIII.

Figur 1 und 2. Querschnitte einer Blüthenknospe von *Serjania Salzmanniana Schlecht. emend.* in 28-facher Vergrösserung, zugleich Diagramme der nach der Halbirungsebene des nach oben gekehrten 4. Kelchblattes symmetrisch gebauten Blüthe;

der eine Schnitt (Fig. 1) aus der Höhe der Narbenschenkel, der andere (Fig. 2, mit Andeutung der Behaarung der Theile) durch die Mitte des Fruchtknotens gehend (sieh oben p. 44).

A bezeichnet die Abstammungsaxe, B das Tragblatt; der Pfeil über A die Richtung der Blattstellungsspirale nach dem langen Wege. Die beiden Vorblätter sind in der Zeichnung weggelassen.

Die einfach und schief schraffirten Theile am Umfange, mit 1—5 bezeichnet, stellen die Kelchblätter dar; die nach innen folgenden, nicht schraffirten Theile, mit 1, 2, 4 und 5 bezeichnet, die Blumenblätter, und die mit a, b, c und d bezeichneten die dazu gehörigen Schuppen (Honigdecken), sowie a′ und b′ die zu den Schuppen (a und b) der oberen Blumenblätter (4 und 2) gehörigen, abwärts gebogenen Anhängsel.

Die kreuzweise schraffirten Theile e und f in Fig. 2 sind die (nur von dem tieferen Schnitte getroffenen) oberen, grösseren Torusdrüsen. (Die kleineren, seitlichen, über den Insertionsstellen der seitlichen Blumenblätter gelegenen hat auch der tiefere Schnitt nicht berührt.)

Die stehend schraffirten Theile stellen die Staubgefässe dar, die des äusseren Kreises, in welchem 4 und 5 (durch eingeklammerte Ziffern ihrer Stellung nach angedeutet) fehlen, mit 1, 2, 3, die des inneren mit 1′ bis 5′ bezeichnet.

Hievon umgeben erscheinen in Fig. 1 die Durchschnittsfiguren der 3 Narbenschenkel, in Fig. 2 die 3 Fruchtknotenfächer.

Figur 3 bis 28. Blüthe, Frucht und Same, sowie deren Theile, von *Serjania erecta Radlk.*, ausser den die Frucht und einzelne Fruchttheile darstellenden Figuren 20, 21 u. 22 alle vergrössert, wie die den Figuren beigefügten Bruchzahlen des näheren angeben.

Figur 3. Kelch von aussen; das 4. Kelchblatt nach oben gekehrt, das 3. und 5. nach unten, von den äusseren, mit beiden Rändern deckenden das 1. nach rechts, das 2. nach links.

Figur 4. Weibliche Blüthe in der Vorderansicht; das 4. Kelchblatt entsprechend der natürlichen Stellung nach oben, der Griffel nach abwärts gerichtet. Die um die kurzen, sterilen Staubgefässe zusammen neigenden Blumenblattschuppen (Honigdecken) mit ihren Kämmen (Pollenmalen) werden von ihrer äusseren Fläche gesehen.

Figur 5. Männliche Blüthe in der Seitenansicht; das 4. Kelchblatt nach oben gekehrt. Von den Blumenblattschuppen ist die des abgekehrten oberen Blumenblattes nur unvollständig zu sehen, die des abgekehrten unteren Blumenblattes von den hier (in der männlichen Blüthe) längeren und ungleich langen 8 Staubgefässen ganz verdeckt.

Figur 6. Männliche Blüthe nach dem Abfallen der Blumenblätter. Das 4. Kelchblatt zur Linken, links und rechts von dessen Basis die Drüsen über den Insertionsstellen der oberen Blumenblätter; von den kleineren seitlichen Drüsen über den Insertionsstellen der seitlichen Blumenblätter ist nur die eine an der Basis des gegen Kelchblatt 3 und 5 hin in eine kurze Säule schief ansteigenden Blüthenbodens zu sehen. An der Spitze dieser Erhebung des Blüthenbodens die Staubgefässe, das von ihnen umgebene Pistillrudiment verdeckend.

Figur 7. Weibliche Blüthe nach dem Abfallen der Blumenblätter in einer der vorigen Figur entsprechenden Stellung. Drei Staubgefässe sind an der Basis abgeschnitten, um den Fruchtknoten sichtbar zu machen.

Figur 8. Oberes Blumenblatt (dem linksseitigen der Fig. 4 entsprechend), mit seiner Schuppe (Honigdecke), deren getheiltem Kamme (Pollenmale) und nach abwärts gebogenem Anhängsel von der Innenfläche gesehen; letzteres an dem inneren (der Mittellinie der Blüthe zugekehrten) Rande bebärtet.

Figur 9. Schuppe dieses Blumenblattes, nach Hinwegnahme der Blumenblattspreite von aussen gesehen.

Figur 10. Oberes Blumenblatt (wie in Fig. 8), mit seiner Schuppe seitlich, und zwar von dem äusseren, von der Mittellinie der Blüthe abgekehrten Rande her gesehen.

Figur 11. Oberes Blumenblatt, mit seiner Schuppe der Länge nach halbirt und von der Halbirungsfläche aus gesehen.

Figur 12. Seitliches Blumenblatt (dem linksseitigen der Fig. 4 entsprechend), mit seiner Schuppe und deren ungleichseitigem Kamme von der Innenfläche gesehen.

Figur 13. Schuppe dieses Blumenblattes, nach Hinwegnahme der Blumenblattspreite von aussen gesehen.

Figur 14. Seitliches Blumenblatt (wie in Fig. 12), mit seiner Schuppe seitlich, und zwar von dem unteren, gegen die blumenblattfreie Stelle gekehrten Rande her gesehen.

Figur 15. Staubgefäss von innen.

Figur 16. Staubgefäss von aussen.

Figur 17. Pistillrudiment der männlichen Blüthe.

Figur 18. Querschnitt des Fruchtknotens der weiblichen Blüthe.

Figur 19. Längsschnitt des Fruchtknotens der weiblichen Blüthe, durch zwei Fächer (mit je einer Samenknospe) gehend; daneben rechts und links die Basis eines Staubgefässes.

Figur 20. Reife Frucht mit 3 geflügelten Fruchtknöpfen, welche durch die von dem Griffelreste gekrönte, von dem gegliederten Blüthenstiele getragene Fruchtaxe verbunden sind (in natürlicher Grösse).

Figur 21. Einzelner, von der Fruchtaxe abgelöster, geflügelter Fruchtknopf (in natürlicher Grösse).

Figur 22. Fruchtaxe mit den in die Fruchtknöpfe übertretenden Gefässbündeln, an deren einem noch ein im übrigen von unten nach oben bereits abgelöster Fruchtknopf hängt (in natürlicher Grösse).

Figur 23. Frucht in dem oberen Theile sammt den Samen durchschnitten.

Figur 24. Fruchtknopf und Same der Länge nach neben der den Kamm und den Flügel enthaltenden Mittelfläche durchschnitten; im Samen, dessen durchschnittene Schale durch Schraffirung ausgezeichnet ist, der Keimling mit äusserem, gekrümmtem und innerem, doppelt gefaltetem Cotyledon, sowie in eine Falte der Samenschale eingeschobenem Würzelchen; rechts die Anheftungsstelle des Samens und die Eintrittsstelle der Gefässbündel in den Fruchtknopf von der Fruchtaxe aus.

Figur 25. Fruchtaxe mit den grossen Drüsen des Blüthenbodens an der Basis.
Figur 26. Same von der Anheftungsstelle aus gesehen.
Figur 27. Derselbe von der Seite gesehen.
Figur 28. Embryo von der Samenschale befreit, in gleicher Lage wie in Fig. 24.

Tafel IX.

Karte über die Verbreitung der Arten und Sectionen von *Serjania*. Die Erklärung dazu sieh p. 172.

Register der Pflanzennamen.

Das Register ist im allgemeinen dem der Monographie von *Serjania* entsprechend eingerichtet (sieh die Vorbemerkungen dortselbst, p. 379).

Besonders sind, wie dort, die zur Zeit als giltig angesehenen Namen durch stehende Schrift, die synonymischen durch liegende Schrift und die auf *Serjania* bezüglichen Namen durch Vordruck einer stehenden Linie (|) ausgezeichnet.

Veränderungen sind in folgenden Punkten als angemessen erschienen.

Die zur Hinweisung auf einzelne Abschnitte in der Monographie den Seitenzahlen beigesetzten Bezeichnungen sind der Vereinfachung halber diessmal weggelassen worden.

Da diessmal die Arten in ihrer Vollzahl und systematisch geordnet nur im Conspectus Specierum (und in der tabellarisch-geographischen Uebersicht, welche im Register auch diessmal übergangen werden konnte) aufgeführt sind, in dem die Arten im einzelnen erledigenden Abschnitte aber nur theilweise, so erschien es zweckmässig, diessmal den auf den Conspectus Specierum hinweisenden Seitenzahlen (welche früher weggelassen werden konnten) die Artnummern, und zwar die jetzigen wie die früheren (letztere in Klammern) beizufügen, wodurch das Auffinden der Arten in anderen Abschnitten und in der Monographie selbst erleichtert wird.

Die Seitenzahlen, welche auf den die Arten im einzelnen erledigenden Abschnitt (VI) hinweisen, sind dafür diessmal durch fetten Druck hervorgehoben.

A. Wissenschaftliche Namen.

Acacia spec. 29; 32.
Aesculus Linn. 46.
Allophylus fulvinervis Bl. var. Burmannianus 110.
Allophyllus petiolatus (sphalmate) ap. W. Müller 181.
Allophylus petiolulatus Radlk. 181.
Ampelidea 124; 126.
Ampelopsis bipinnata Michx. 162.
Anacardiaceae 57; 60.
Anaphrenium argenteum E. Mey. 57.
Anisostichus Bur. 3.
Atalaya coriacea Radlk. 59.
Bauhinia Linn. 4; 22; 29; 30; 32.

Bignonia capreolata Linn. 3.
Bignoniaceae 3; 4; 5; 22; 25.
Bumelia cuneata Griseb. 55.
Bumelia nigra A. Rich. 55.
Bumelia pentagona Sw. 55.
Bumelia salicifolia Sw. 56.
Bursera serrata Wall. 60.
Burseraceae 60.
Calycanthaceae 4.
Cardiospermum Linn. 85.
| *Cardiospermum* (*spec.*) Gray 1; 51; 139.
Cardiospermum acuminatum Miq. 98.
Cardiospermum Corindum Linn. 98; 140.
Cardiospermum dissectum Radlk. 138; 162.
Cardiospermum Halicacabum Linn. 97; 98; 100.
Cardiospermum Halicacabum Linn. var. microcarpum Bl. 98; 100; 101; 102.
| *Cardiospermum molle* Hemsley 53; 140.
Cardiospermum molle Kunth 140.
Celastrineae 57.
Celastrus Linn. 57.
Celastrus laurinus Thbg. 58; 59.
Celastrus oleoides Krauss 58.
Celastrus oleoides Lam. 58.
§ Ceratococcus 62; 65; 89.
Choripetalum (*spec.*) Harv. 58.
Cissus Linn. 29; 110.
Convolvulaceae 29; 33.
Cucurbitaceae 33.
Cupania affinis Kl. 100; 102.
americana Linn. 48.
americana Hemsley, partim 160.
anacardioides F. v. Müll. 60.
dentata Kl. 100.
diphylla Vahl 98.
geminata Poir. 98.
guatemalensis Radlk. 49; 160.
hirsuta Radlk. 100; 101; 102.
laevigata L. C. Rich. 98.
nitida DC. 98.
quercifolia Kl. 100; 101; 102.
reticulata Splitg. 99.
retusa Kl. 100; 101; 102.
rubiginosa Radlk. 100; 101; 102.
Schomburgkii Kl. 100; 101; 102.
scrobiculata L. C. Rich. 98.
scrobiculata L. C. Rich., forma 1 reticulata R. 99; 100; 101; 102.
Cupania scrobiculata L. C. Rich., forma 2 guianensis R. 100.
subsinuata Kl. 100; 102.
velutina Kl. 100; 102.
| *Cururu* (*spec.*) Rand 1.
Daphnopsis cuneata Radlk. 55.
§ Dictyococcus 63; 70; 110.
Dipholis salicifolia DC. 56.
Dittelasma Hook. f. 49.
Dodonaea pinnata Smith 49.
Dodonaea viscosa Linn. 97.
Ecbalium Elaterium A. Rich. 33.
Elaeodendron Linn. 57.
Embelia (*spec.*) DC. 58.
Embelia Kraussii Harv. 58.
Enourea capreolata Aubl. 98.
§ Eucoccus 62; 68; 94.
§ Eurycoccus 3; 62; 66; 90.
Glycine chinensis Curt. sieh Wistaria chinensis DC.
Gnetum Linn. 15; 33.
Guioa coriacea Radlk. 60.
Gymnosporia W. & A. 57.
Heeria Meisn. 56.
Heeria argentea Meisn. 57.
§ Holcococcus 63; 69; 106.
Jacaranda Juss. 3.
Jacaranda filicifolia Don. 3.
Koelreuteria Laxm. 46.
Koelreuteria triphylla Juss. Hb. 48.
Koernickea guianensis Kl. 100; 101; 102.
Labatia chrysophyllifolia Griseb. 55.
Labatia dictyoneura Griseb. 55.
Lamprospermum Schomburgkii Kl. 100; 101; 102.
Lamprospermum guianense Kl. 100; 102.
Lantana spec. 1; 161.
Lasianthemum bijugum Kl. 100; 101; 102.
Lasianthemum unijugum Kl. 100; 102.
Leguminosae 3; 5; 26; 29; 31; 99.
Limonia polygyna Roxb. 61.
Lucuma serpentaria Kunth 55.
Malpighiaceae 4; 22; 26; 29.
Matayba arborescens Radlk. 98; 100; 101; 102.
camptoneura Radlk. 100; 101; 102.
guianensis Aubl. emend. 98; 99.
inelegans Radlk. 100; 101; 102.
macrostylis Radlk. 100; 102.
Patrisiana DC. 99.
Vouarana DC. 99.
Melicocca bijuga Linn. 97.

Menispermaceae 5; 18; 29.
Monopteris guianensis Kl. 100; 102.
Myrsine melanophloea R. Brown 57.
Myrsineae 57; 58.
§ Oococcus 63; 72; 119.
Ophiocaryon paradoxum Schomb. 96.
Ornitrophe macrophylla Poir. 98.
§ Pachycoccus 62; 69; 104.
Pancovia tomentosa Kurz 49.
Paullinia Linn. emend. 1; 2; 29; 176; 177.
Paullinia spec. Crüger 27.
Paullinia (*spec.*) Hemsley 162.
| *Paullinia* (*spec.*) Hemsley 52; 95.
| *Paullinia* (*spec.*) Hemsley 52; 124.
| *Paullinia* (*spec.*) L. etc. 1.
| *Paullinia* (*spec.*) Naegeli 29.
Paullinia alata Hort. Par. ap. Naegeli 29; 122.
anisoptera Turcz. 100; 101; 102.
| *australis* Griseb. partim 53; 119.
| *barbadensis* Gray 52; 119.
barbadensis Jacq. 97; 113; 162.
bipinnata (non Poir.) Kl. 96; 100; 102.
| *brachystachya* Griseb. 52; 107.
Cambessedesii Tr. & Pl. 98.
capreolata Radlk. 98.
| *caribaea* Jacq. 122.
caudata Velloz. 49.
cauliflora Jacq. 122.
conduplicata Radlk. 96; 100; 102.
connarifolia Rich. ed. Juss. 98.
costaricensis Radlk. 157.
cupaniaefolia Rich. ed. Juss. 98.
| *curassavica* Linn. Amoen. partim 52; 124; 126; 156.
curassavica Linn. Amoen. partim 124; 126.
curassavica Linn. Hb. 48.
Cururu Linn. emend. 27; 28; 48; 97; 132.
diversiflora Miq. 98.
elegans Camb. 148; 152.
| *elegans* Griseb. 52; 95.
fibulata Juss. 98.
fuscescens Kunth 97; 99; 125; 126; 131; 132; 157; 160; 161.
guatemalensis Turcz. 49; 160.
| *Hooibrenki* (Linden?) 162.
Hostmanni Steud. 98.
ingaefolia Juss. 98.
jamaicensis Macf. 157; 161.
leiocarpa Griseb. 28; 32; 100; 101; 102.
Paullinia
| *macrostachya* (sphalmate) Hemsley 53; 91; 143.
mexicana Linn. Hb. partim 48; 125.
micrantha Camb. 23.
micropterygia Miq. 99.
nitida Steud. 98.
obliqua K. ed. Trevir. 27; 49.
| *pinnata* Griseb. 105.
| *pinnata* Hieron. 105.
pinnata Linn. Amoen. 126.
pinnata Linn. emend. 21; 27; 28; 29; 31; 32; 48; 98; 100; 101; 102; 120; 122; 156; 162.
pinnata Linn. Hb. 48.
| *pinnata* Lorentz & Hieron. 53; 105.
| *pinnata* Pasqu. 53; 89.
Plumierii Tr. & Pl. 48; 115; 161.
podocarpa Kl. 100; 101; 102.
| *polystachya* Turcz. 143.
| *protracta* Steud. 99; 121.
racemosa Velloz. 49.
rhomboidea Radlk. 23.
rufescens Juss. 98.
seminuda Radlk. 181.
Seriana Burman 110.
Seriana (non Linn.) Gärtn. 162.
| *Seriana* Linn. partim 98.
sphaerocarpa Rich. ed. Juss. 98
| *subulata* Gray 53; 136.
tomentosa Jaq. 162.
tomentosa Linn. Hb. 48.
tetragona Aubl. 98.
thalictrifolia Juss. 23.
tricornis Radlk. 98.
trigonia Velloz. 54.
| velutina Tr. & Pl. partim 53; 157.
Vespertilio Sw. 48.
weinmanniaefolia Gray 54.
weinmanniaefolia Mart. 23.
§ Phacococcus 63; 73; 124.
§ Physococcus 63; 73; 134.
Phytolacca Linn. 15.
Picraena excelsa Lindl. 48; 99.
§ Platycoccus 62; 64; 80.
Porocystis toulicioides Radlk. 102.
Pouteria dictyoneura Radlk. 55.
Protium serratum Engl. 60.
Pruno affinis arbor Surian 48.
Pseudima frutescens Radlk. 99.
Pterocelastrus Meisn. 57.

Pterocelastrus rostratus Walp. 58.
stenopterus Walp. 58.
tetrapterus Walp. 58.
tricuspidatus Sond. 58.
variabilis Sond. 58.
Racaria sylvatica Aubl. 98.
Rhamneae 57.
Rhus Linn. 48.
Rhus semialata Murr. 48.
Rhynchosia Lour. 31.
Rhynchosia reticulata DC. 32.
Roemeria argentea Thunb. 56.
inermis Thunb. 55; 56.
melanophloea Thunb. 56.
Sapindus arborescens Aubl. 98.
frutescens Aubl. 99.
Rarak DC. 49.
Saponaria Linn. 48; 97.
surinamensis Poiret 49; 99.
tomentosus Kurz 49.
Sapotaceae 55; 56.
Schleichera (*spec.*) Beddome 60.
Schmidelia conduplicata Kl. 96; 100; 102.
edulis St. Hil., forma pubescens R. 149.
guaranitica Griseb. 149.
guianensis Kl. 100; 101; 102.
macrophylla DC. 98.
mollis Kl. 100; 101; 102.
occidentalis Sw. 100; 101; 102.
velutina Turcz. 100; 101; 102.
Schnella Raddi 29.
Scytophyllum Eckl. & Zeyh. 57.
Scytophyllum laurinum Eckl. & Zeyh. 58; 59.
obtusum Eckl. & Zeyh. 58.
oleoides Eckl. & Zeyh. 58.
| Serjania Schum. 1; 2 sqq.
Serjania Vell. 1; 161.
Serjania (*spec.*) Hemsley 162.
| Serjania (*spec.*) Hemsley partim 52; 86.
| Serjania (*spec.*) Hemsley partim 52; 135.
| Serjania (*spec.*) Hemsley partim 53; 140.
Serjania (*spec.*) Mart. 162.
| Serjania acoma Radlk. 24; 67 n. 31 (27).
| aculeata Radlk. 11; 68 n. 46 (41).
| acuminata Radlk. 14; 79 n. 154 (144).
| acuta Tr. & Pl. 11; 74 n. 107 (98); 90; **142**.
| acutidentata Radlk. 13; 73 n. 86 (80); **122**.
| adusta Radlk. 11; 69 n. 53 (48); **176**.
| *albopunctata* Wright ed. Griseb. 55; 113.
Serjania
| altissima Radlk. 24; 66 n. 28 (24); **90**; 175.
| Ampelopsis Pl. & Lind. 65 n. 13 (10); **87**; 175.
| amplifolia Radlk. 12; 71 n. 77 (71).
| angustifolia Willd. 79 n. 155 (145); 177.
| *apiculata* C. Wright (?) 52; 110.
aquatica Vell. 50; **161**.
| areolata Radlk. 47; 51; 65 n. 14 (10a); **87**; 175; 178.
| atrolineata Sauv. & Wr. 8; 12; 54; 71 n. 70 (65); **116**; 132.
australis Spreng. 49.
| *baramensis* Kl. 49; 53; 100; 102; 106.
| *bignonioides* Kl. 49; 52; 94; 100; 101; **102**.
| brachycarpa Asa Gray 47; 73 n. 96 (89); **134**.
| brachyphylla Radlk. 14; 79 n. 151 (142).
| brachystachya Radlk. 13; 77 n. 133 (123); **156**.
| brevipes Benth. 25; 26; 73 n. 94 (87); **134**.
| californica Radlk. 51; 75 n. 103 (94b); **139**.
| Cambessedeana Schlecht. & Cham. 76 n. 119 (109); **150**.
| caracasana Willd. 8; 9; 11; 12; 15; 22; **28**; 29; 33; 34; 35; 47; 52; 68 n. 47 (42); **94**; 175; 176; 178.
| » forma 1. nitidula 49; 52; 95; 100; 101; 102.
| » » 2. puberula 95.
| » » 3. genuina 95.
| cardiospermoides Schlecht. & Cham. 10; 52; 65 n. 10 (7); **86**; 175; 177.
| chartacea Radlk. 10; 40; 65 n. 15 (11); **88**; 175.
| circumvallata Radlk. 14; 79 n. 150 (141).
| cissoides Radlk. 76 n. 123 (113); 177.
| clematidea Tr. & Pl. 13; 78 n. 139 (129); **158**; 177.
| clematidifolia Camb. 12; 25; 26; 28; 34; 52; 72 n. 78 (72); **119**.
| comata Radlk. 24; 66 n. 30 (26).
| communis Camb. 10; 25; 26; 30; 47; 64 n. 5 (5); **80**; 175; 176; 178.
| » var. *α*. mollis 23; 80; 81.
| » var. *β*. pilosula 80; 81.
| » var. *γ*. glabra 81.
| confertiflora Radlk. 9; 11; 50; 53; 65 n. 19 (15); **89**.
| confertiflora Radlk. var. Hooibrenki 162.
| cornigera Turcz. 65 n. 20 (16); **89**.
| corrugata Radlk. 18; 67 n. 36 (32); **91**.
| crassifolia Radlk. 12; 40; 72 n. 79 (73).
| crassinervis Radlk. 11; 55; 70 n. 67 (62); **112**; 114.
| crenata Griseb. 11; 53; 55; 68 n. 49 (44); **103**; 175; 176; 177; 178.

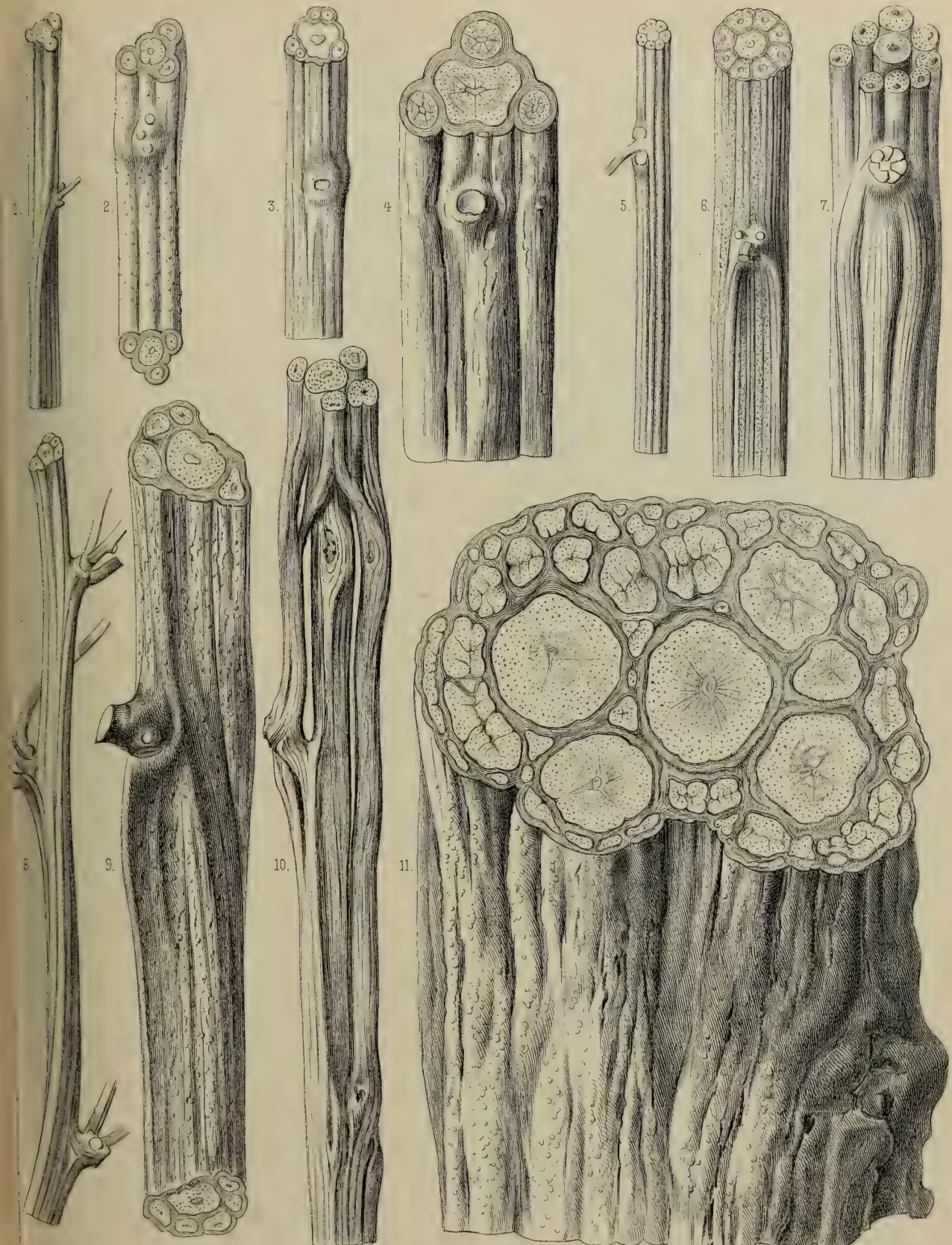
Serjania
| *cubensis* Ramon 93.
| cuneolata Radlk. 24; 67 n. 32 (28); 176; 177.
curassavica Hemsley partim 157; 162.
| curassavica Radlk. 13; 77 n. 134 (124); **156**; 177.
| cuspidata Camb. 9; 10; 27; 29; 30; 33; 40; 64 n. 3 (3); **80**.
| cystocarpa Radlk. 47; 51; 75 n. 102 (94a); **136**.
| dasyclados Radlk. 13; 77 n. 128 (118).
| decemstriata Radlk. 47; 50; 51; 65 n. 8 (6a); **82**.
| deflexa Gardn. 18; 67 n. 33 (29); **91**.
| deltoidea Radlk. 13; 77 n. 135 (125).
| dentata Radlk. 40; 68 n. 44 (39); **94**.
| depauperata Radlk. 51; 68 n. 42 (37a); **92**; 176; 177.
| dibotrya Poepp. 11; 69 n. 58 (53).
| diffusa Radlk. 13; 47; 77 n. 129 (119); **154**.
(?) *dissecta* Watson 138; 162.
| *divaricata* Griseb. 54; 116.
| *divaricata* Schum. 54.
| *divaricata* „Sw." Griseb. 125.
| diversifolia Radlk. 55; 68 n. 43 (38); **93**; 175; 176; 177.
| diversifolia Radlk. var. *β.* parvula 55.
| *Dombeyana* Juss. Herb. ed. Camb. 29; 31; 33.
Dombeyana (non Juss.) Duchartre 30; 31.
| dumicola Radlk. 10; 47; 65 n. 11 (8); 175; 177.
| dura Radlk. 11; 67 n. 39 (35).
| elegans Camb. emend. 18; 67 n. 35 (31); **91**.
| emarginata Kunth 74 n. 98 (91); **134**.
| equestris Macf. 11; 71 n. 71 (66); 114; 115; **117**; 128.
| erecta Radlk. 11; 44; 69 n. 57 (52); **106**.
| eucardia Radlk. 66 n. 23 (19).
| exarata Radlk. 70 n. 60 (55).
| faveolata Radlk. 68 n. 45 (40).
| filicifolia Radlk. 76 n. 118 (108); 177.
| foveata Griseb. 38; 45; 51; 65 n. 9 (6b); **84**.
| *fulta* Griseb. 45; 52; 107.
| fuscifolia Radlk. 12; 23; 25; 26; 71 n. 76 (70); **118**.
| *glabrata* Griseb. 53; 106; 107.
| glabrata Kunth. 8; 11; 45; 47; 52; 70 n. 63 (58); **107**; 176; 178.
| » forma 1. genuina 107.
| » forma 2. mollior 107.
| glutinosa Radlk. 24; 66 n. 29 (25).
| goniocarpa Radlk. 13; 77 n. 132 (122); **156**.
| gracilis Radlk. 11; 67 n. 38 (34); **91**.
| grammatophora Radlk. 29; 73 n. 95 (88).
| grandiflora Camb. 7; 11; 23; 26; 45; 68 n. 48 (43); **102**.
Serjania
| *grandiflora* Griseb. 52; 94; 102.
| grandifolia Sagot 11; 40; 70 n. 61 (56); **106**.
| grandis Seem. 8; 13; 76 n. 126 (116); **153**.
| *Grayii* (sphalm.) Hemsley 53.
| Grosii Schlecht. 53; 74 n. 97 (90); **134**.
| hamuligera Radlk. 11; 78 n. 147 (138).
| hebecarpa Benth. 47; 76 n. 124 (114); **151**; 162; 177.
| » forma 1. oxycephala 151.
| » forma 2. amblycephala 151.
| » forma 3. platycephala 38; 151.
| hirsuta Camb. 10; 64 n. 4 (4).
| ichthyoctona Radlk. 13; 25; 26; 27; 72 n. 84 (78); **120**.
| impressa Radlk. 13; 77 n. 136 (126); **157**.
| incisa Torrey 47; 53; 74 n. 100 (93); **136**.
| inebrians Radlk. 14; 79 n. 152 (143); **160**; 177.
| inflata Poepp. 13; 75 n. 116 (106); **145**.
| *inflata* Watson 51; 136.
| insignis Radlk. 13; 78 n. 141 (131); 132; 133; **158**.
| lamelligera Radlk. 3; 14; 51; 73 n. 89 (82a); **123**.
| lamprophylla Radlk. 13; 73 n. 88 (82).
| Laruotteana Camb. 9; 11; 17; 23; 26; 27; 30; 45; 47; 69 n. 51 (46); **104**.
| laxiflora Radlk. 11; 37; 67 n. 41 (37).
| leptocarpa Radlk. 10; 65 n. 12 (9); 175.
| lethalis St. Hil. 8; 12; 72 n. 82 (76); **120**.
| longipes Radlk. 73 n. 93 (86); **133**.
| *lucida* Griseb. partim 52; 93; 117; 124.
| *lucida* Sauv. & Wright 55; 93.
| *lupulina* Griseb. *var. angustifolia* partim 55; 112.
| » » » » » 55; 113.
| » Sauv. & Wright partim 53; 55; 103.
| » » » 112.
| » » » 113.
| » var. *parvula* Wright ed. Griseb. 55.
| macrococca Radlk. 53; 75 n. 104 (95); **140**.
| macrostachya Radlk. 11; 37; 67 n. 40 (36); **91**.
| Mansiana Mart. 76 n. 125 (115); 152; 177.
| marginata Casar. 9; 11; 35; 53; 69 n. 56 (51); **105**.
| » forma 1. genuina 105.
megalocarpa Turcz. 49.
| membranacea Splitg. 49; 53; 70 n. 59 (54); 100; 102; **106**.
| meridionalis Camb. 38; 47; 76 n. 117 (107); **145**; 177.
| *meridionalis* Griseb. partim 151.
| » var. *foveata* Griseb. partim 84.
| » » » » » 146; 152.

Serjania
| mexicana Willd. 29; 47; 52; 54; 73 n. 91 (84); 114; 115; **124**; 130; 132; 176; 178.
| *micrantha* Kl. 49; 53; 100; 101; 102; 117.
| mollis Kunth 11; 40; 66 n. 21 (17).
| mucronulata Radlk. 13; 75 n. 113 (104); **143**.
| multiflora Camb. 13; 25; 26; 32; 78 n. 143 (133); **159**; 177.
| nigricans Radlk. 13; 78 n. 145 (135); 177.
| nodosa Radlk. 14; 52; 78 n. 149 (140); 128; **160**; 177.
| noxia Camb. 13; 78 n. 142 (132); **159**; 177.
| nutans Poepp. 3; 14; 79 n. 153 (137); 160; **161**.
| oblongifolia Radlk. 12; 28; 49; 53; 71 n. 73 (68); 100; 101; 102; **117**.
| obtusidentata Radlk. 13; 73 n. 87 (81); **122**.
| orbicularis Radlk. 76 n. 120 (110); **150**; 177.
| ovalifolia Radlk. 12; 71 n. 72 (67).
| oxyphylla Kunth 40; 75 n. 110 (101).
| oxytoma Radlk. 13; 73 n. 90 (83).
| paleata Radlk. 18; 67 n. 34 (30).
| paludosa Camb. 10; 65 n. 18 (14).
| *paniculata* Griseb. 115.
| paniculata Kunth 8; 11; 12; 27; 71 n. 69 (64); **115**; 176.
| *paniculata* A. Rich. 115.
| » Sauv. & Wright 55; 112; 115.
| paradoxa Radlk. 18; 35; 67 n. 37 (33).
| parvifolia Kunth 13; 75 n. 112 (103).
| paucidentata DC. 8; 13; 22; 28; 29; 32; 49; 50; 52; 72 n. 85 (79); 98; 99; 100; 101; 102; 115; **121**.
| pedicellaris Radlk. 24; 66 n. 27 (23); **90**; 175.
| perulacea Radlk. 12; 35; 53; 72 n. 81 (75); **119**.
| peruviana Radlk. 3; 13; 14; 51; 77 n. 127 (117a); **154**.
| pinnatifolia Radlk. 12; 72 n. 80 (74); **119**.
| piscatoria Radlk. 9; 14; 78 n. 148 (139); **160**.
| platycarpa Benth. 40; 66 n. 22 (18).
| plicata Radlk. 11; 70 n. 62 (57); 176; 177.
| polyphylla Radlk. 8; 11; 27; 70 n. 66 (61); **110**; 113; 114; 115.
| polystachya Radlk. 53; 74 n. 108 (99); **143**.
| *pubescens* Griseb. 53; 125; 157.
| purpurascens Radlk. 13; 78 n. 144 (134); 177.
| pyramidata Radlk. 11; 12; 69 n. 52 (47); **104**; 176.
| *racemosa* Asa Gray 135; 140.
| racemosa Schum. 52; 74 n. 99 (92); **135**.
| *racemosa* Turcz. partim 53; 135; 156.
| Regnellii Schlecht. 10; 64 n. 2 (2); **80**.
Serjania
| reticulata Camb. 25; 40; 69 n. 55 (50); **104**.
| » forma 1. genuina 104.
| » forma 2. rubens 104.
rhombea (non Radlk.) Hemsley 157.
| rhombea Radlk. 13; 53; 77 n. 138 (128); 114; 125; 131; 132; **157**.
| rigida Radlk. 13; 75 n. 114 (105).
| rubicaulis Benth. 27; 73 n. 92 (85).
| *rubifolia* K. ed. Trevir. 27.
| rufa Radlk. 13; 77 n. 137 (127).
| Salzmanniana Schlecht. emend. 24; 40; 44; 66 n. 25 (21); **90**.
| *Salzmanniana* Seem. 90.
| *samydea* Griseb. 125.
| *scatens* Radlk. 9; 12; 54; 71 n. 70 (65); **116**.
| Schiedeana Schlecht. 13; 77 n. 130 (120); **155**.
| scopulifera Radlk. 12; 72 n. 83 (77).
| Seemanni Tr. & Pl. 11; 69 n. 54 (49); **104**; 176.
| *Selloviana* Klotzsch ed. Trevir. 27.
| serrata Radlk. 11; 76 n. 122 (112); 177.
| setulosa Radlk. 78 n. 146 (136); **159**; 177.
sinuata W. Hook. 149; 162.
| sinuata Schum. 11; 45; 52; 70 n. 65 (60); 98; **110**.
| » forma 2. Plumieriana 110.
| sordida Radlk. 11; 74 n. 105 (96); **141**.
| sphaerococca Radlk. 11; 68 n. 50 (45); 176.
| sphenocarpa Radlk. 47; 74 n. 101 (94); **136**.
| squarrosa Radlk. 11; 65 n. 17 (13); 175.
stans Schott. 49.
| stenopterygia Radlk. 10; 64 n. 7 (6).
| striata Radlk. 40; 75 n. 111 (102).
| subdentata Juss. ed. Poir. 12; 55; 70 n. 68 (63); **112**; 114; 115.
| » forma 4. angustifolia 113; 114.
| subimpunctata Radlk. 24; 66 n. 26 (22).
| subrotundifolia Radlk. 3; 14; 51; 71 n. 74 (68a); **118**.
| subtriplinervis Radlk. 11; 74 n. 106 (97); **142**.
| sufferruginea Radlk. 13; 40; 75 n. 115 (117); **144**; 154.
| tenuifolia Radlk. 12; 71 n. 75 (69).
| tenuis Radlk. 10; 40; 64 n. 1 (1); **80**.
| thoracoides Radlk. 12; 70 n. 64 (59).
| trachygona Radlk. 13; 78 n. 140 (130); **158**.
| trichomisca Radlk. 9; 11; 65 n. 16 (12).
| triquetra Radlk. 8; 13; 50; 77 n. 131 (121); **155**.
| tristis Radlk. 25; 76 n. 121 (111); **150**; 177.
| *triternata* Willd. 27.

Serjania
| *undosa* (sphalmate) Engler 52; 160.
| velutina Camb. 40; 66 n. 24 (20).
| vesicosa Radlk. 75 n. 109 (100); **143.**
| viridissima Radlk. 3; 14; 51; 64 n. 6 (5a); **81.**
Sideroxylon confertum Sauv. & Wright 55.
Sideroxylon inerme Linn. 55; 57; 59.
Simarubaceae 99.
§ Simococcus 63; 71; 117.
Swartzia alata Willd. — DC. Prodr. 99.
§ Syncoccus 63; 75; 145.
Talisia glabra DC. 99.
guianensis Aubl. 99.
guianensis DC. 99.
mollis Kunth ed. Camb. 99.
rosea Vahl 99.
squarrosa Radlk. 100; 101; 102.
sylvatica Radlk. 98.
Thinouia Tr. & Pl. 2; 19; 25; 26; 27; 29; 30; 31; 33; 34.
Thinouia mucronata Radlk. 20.
obliqua Radlk. 27; 49.
scandens Tr. & Pl. 20.
» » forma 2. racemosa 49.
Thinouia scandens Tr. & Pl. forma 3. caudata 49.
ventricosa Radlk. 20; 23.
Thouinia polygama G. Meyer 99.
Toulicia guianensis Aubl. 98.
megalocarpa Radlk. 49.
stans Radlk. 49.
Urvillea Kunth 2; 22; 28.
| *Urvillea (spec.)* Griseb. 1.
dissecta Watson 138; 162.
| *euryptera* Griseb. partim 151.
euryptera Griseb. partim 148; 149; 152.
| *ferruginea* Lindl. 29; 33.
laevis Radlk. 22; 23; 25; 26; 34; 145.
mexicana Asa Gray 140.
pubescens Kl. 54; 100; 102.
| *Schomburgkii* Kl. 49; 52; 98; 100; 102; 121.
Seriana Griseb. 149.
ulmacea Kunth 22; 23; 26; 48; 54; 149; 181.
ulmacea Kunth, forma 1. genuina R. 100; 101; 102; 140.
uniloba Radlk. 148; 149; 151; 152; 162.
Vouarana guianensis Aubl. 99.
Weinmannia Linn. 126.
Wistaria chinensis DC. 4; 26; 31.

B. Vulgärnamen.

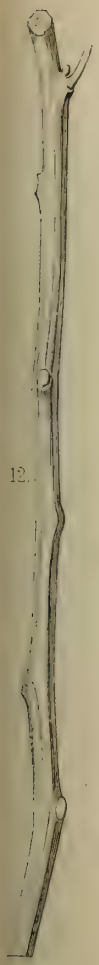
| Barbasco (Serjania inebrians Radlk.) 161.
| Basket-wood (Serj. polyphylla Radlk.) 94.
| Bejuco colorado (Serj. diversifolia Radlk.) 55; 93.
| » de corales (Serj. diversifolia Radlk.) 93.
| » de corrales (Serj. diversifolia Radlk.) 93.
| » de corrales (Serj. subdentata Juss. ed. Poir.) 55; 112; 113.
» de costilla (Paullinia pinnata Linn. emend.) 156.
| » de costales (Serj. diversifolia Radlk.) 94.
| » de cotales (Serj. diversifolia Radlk.) 93.
Chalchal (Schmidelia Linn.) 149.
Chipitiba (Picraena excelsa Lindl.) 48.
Cocuyo 55.
» de fruto chico (Pouteria dictyoneura Radlk.) 55.
| Costilla de vaca (Serj. goniocarpa Radlk.) 157.
Galing Galing (Cissus) 110.
| Hen's foot (Serj. subdentata Juss. ed. Poir.) 113.
Kemeketi (Urvillea ulmacea Kunth) 48.
| Sacha (Serj. lethalis St. Hil.) 120.
Sapote culebra de costa (Labatia chrysophylla Griseb.) 55.
Sapote de culebra (Lucuma serpentaria Kunth) 55.
| Tingi (Serj. piscatoria Radlk.) 161.



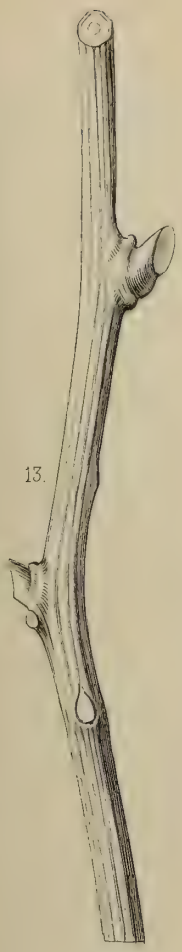
gez. v Seboth.

lith. v. B Keller.

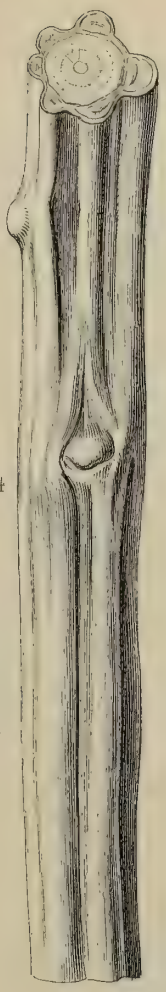
BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.



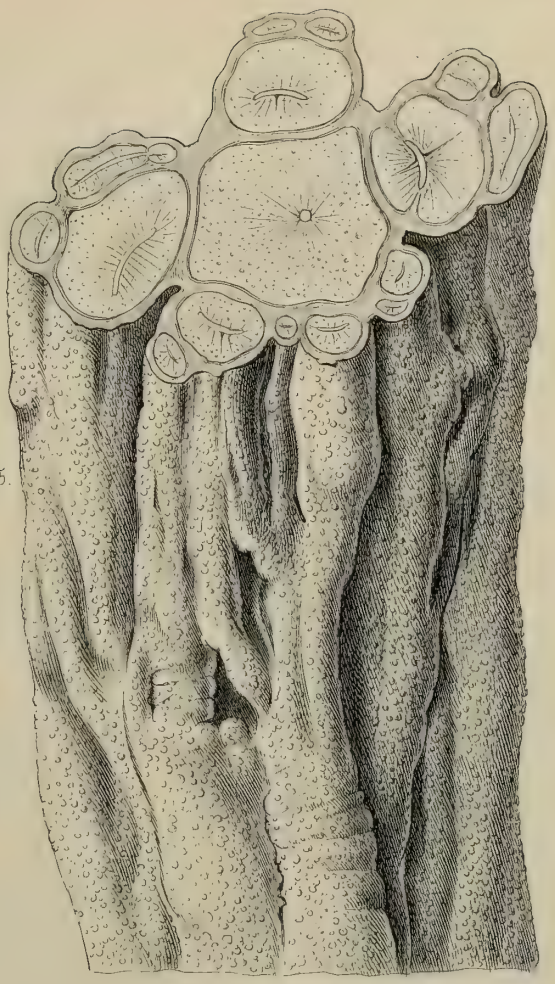
12.



13.

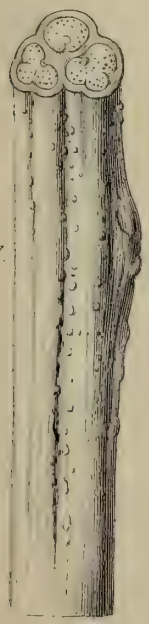


14



15.

16.



17.

18

19.

20.

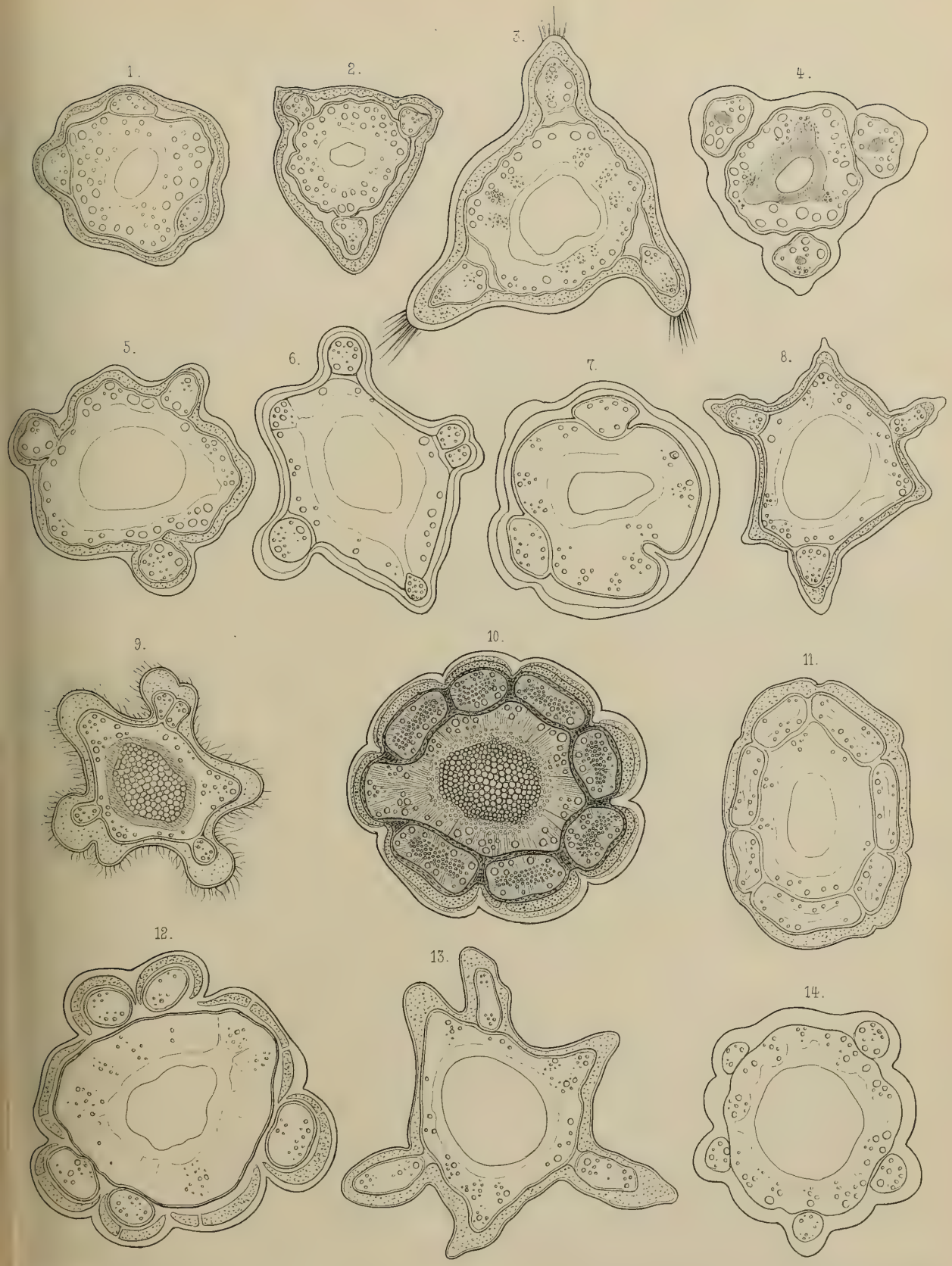
21

fez. v. Seboth.

lith. v. B. Keller.

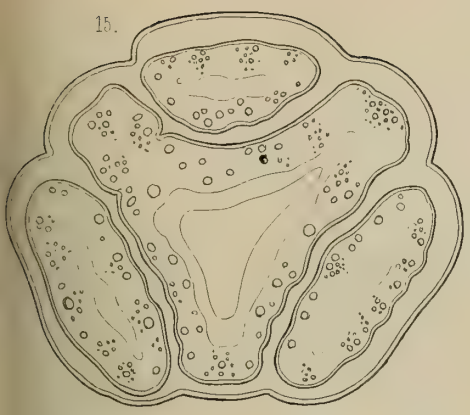
Abh. d. II. Cl. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. XI. Bd. I. Abth.

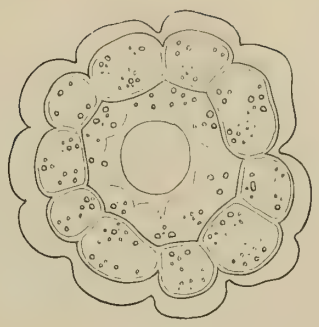
BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

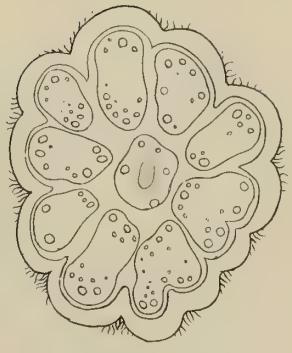


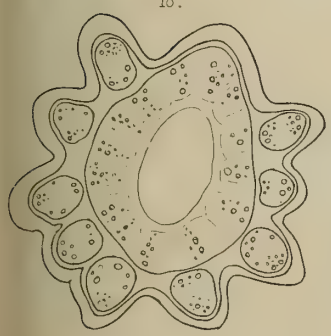
lith.v.B.Keller.
Abh.d.II.Cl.d.k.bayr.Akad.d.Wiss.XVI.Bd.I.Abth.

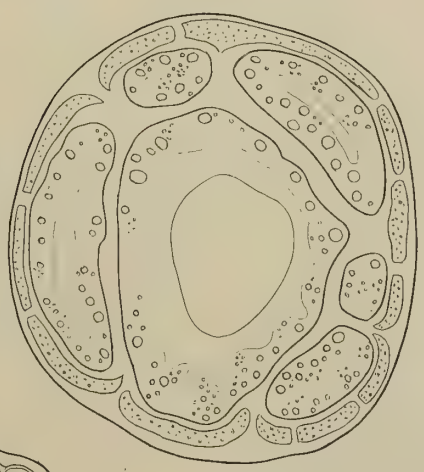
BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

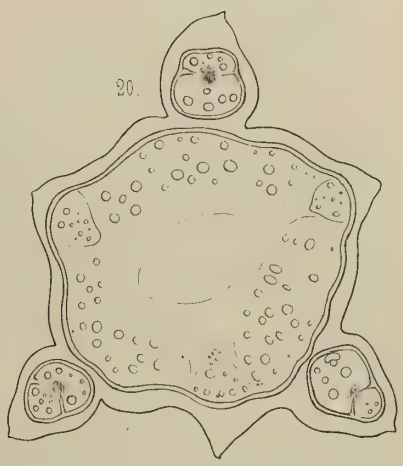


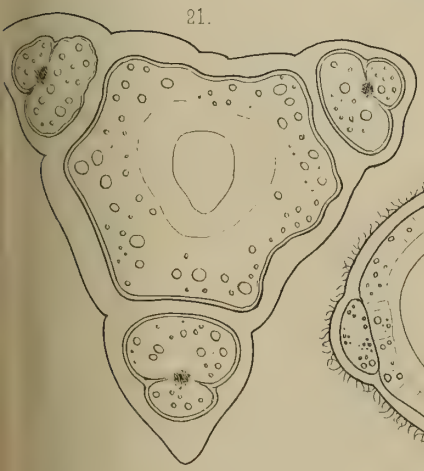


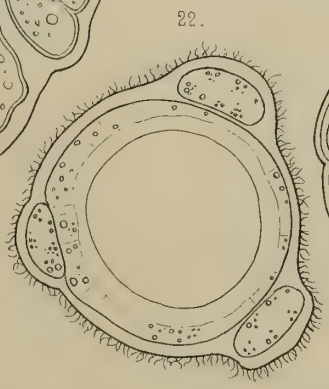


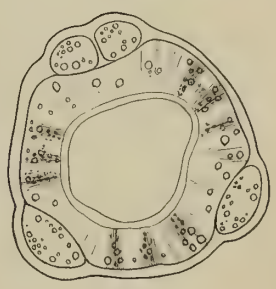


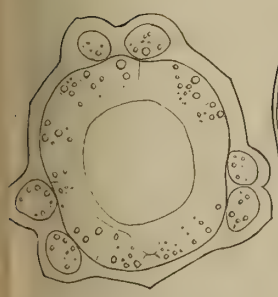


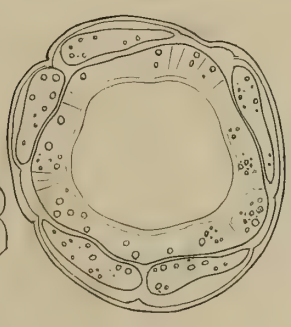


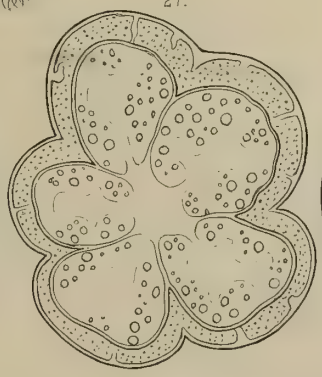


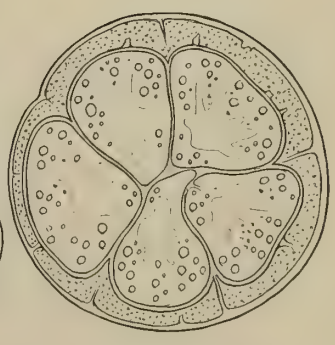












lith.v.B. Keller.

Abh.d.II.Cl.d.k.bayr. Akad.d.Wiss.XVI.Bd.I. Abth.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

Fig 1

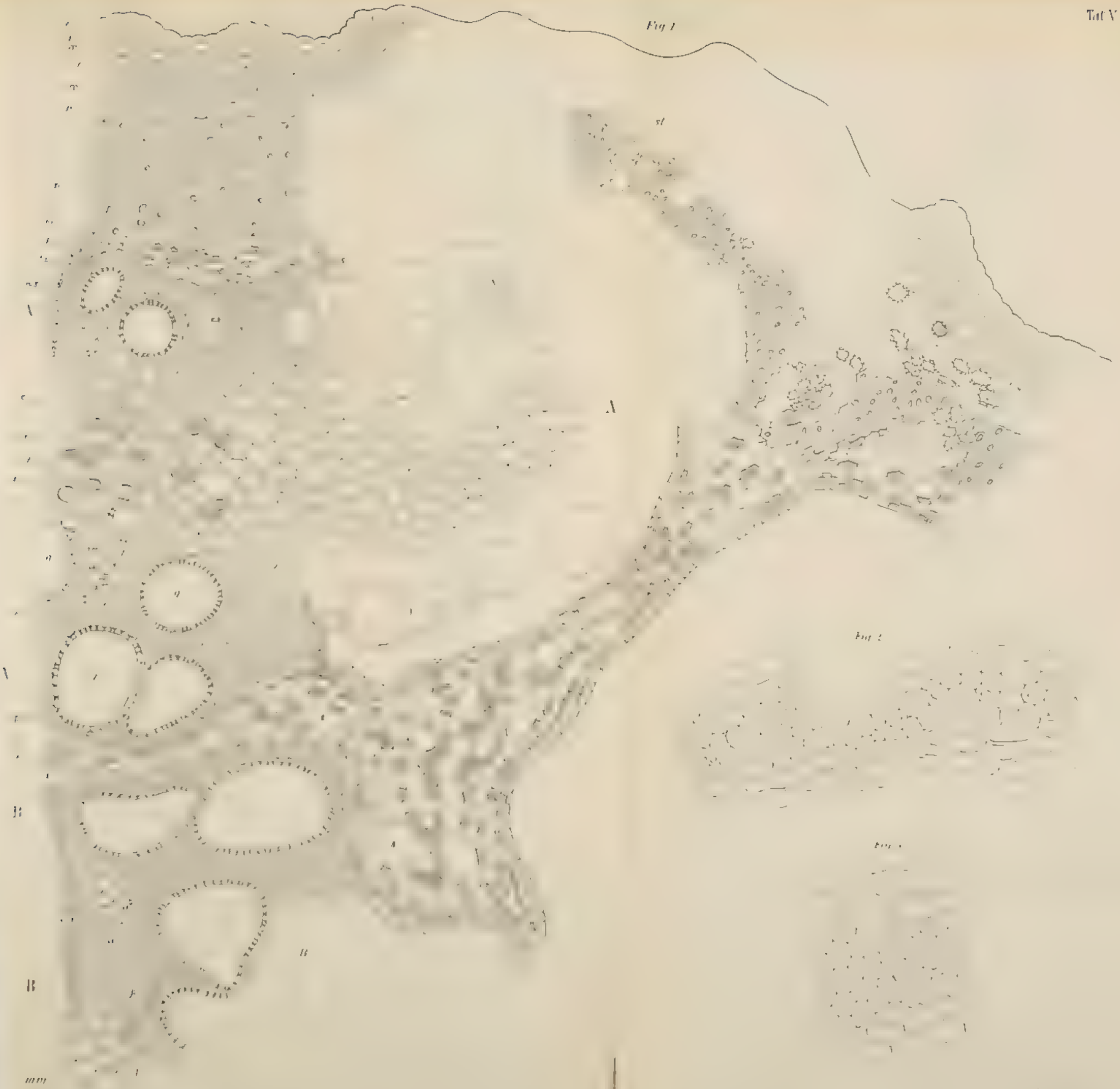


Fig 2

Abh d II Cl d k Akad d Wiss XVI Bd I Abth

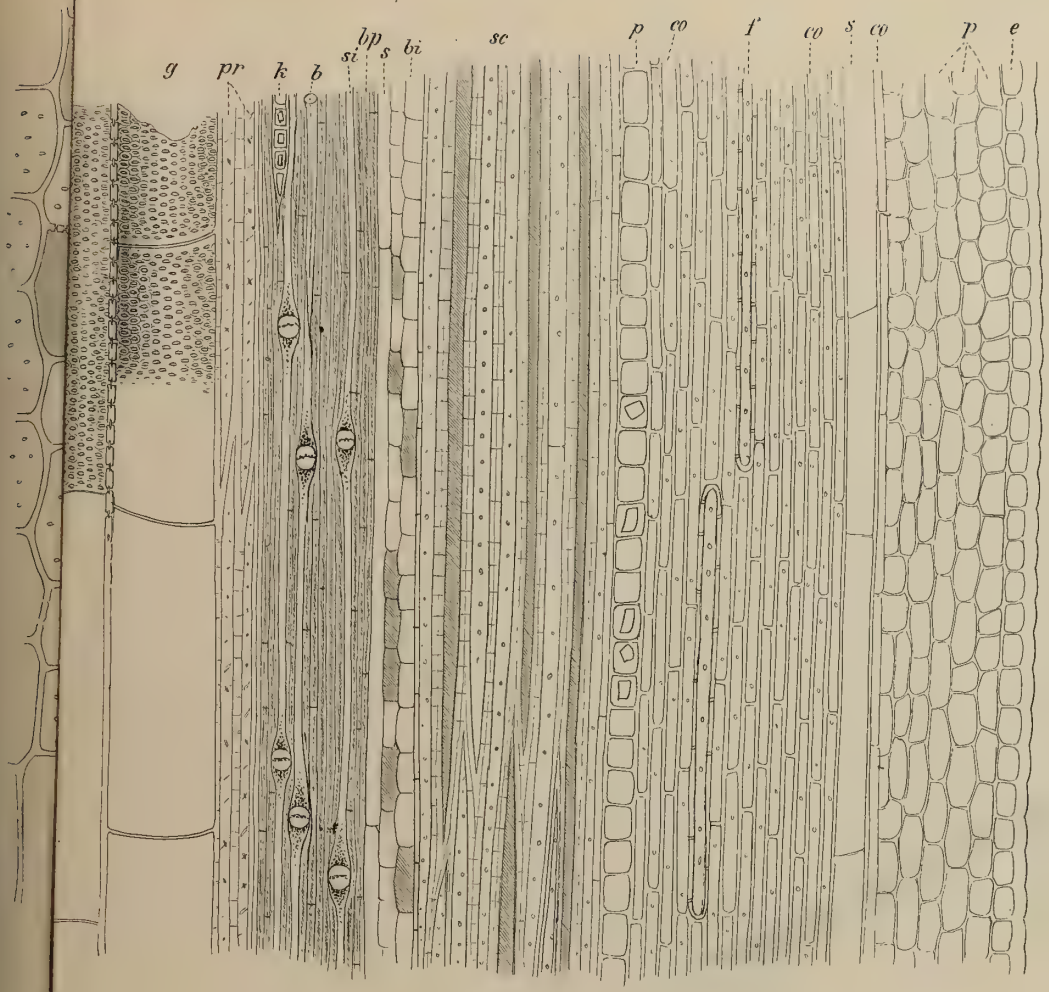
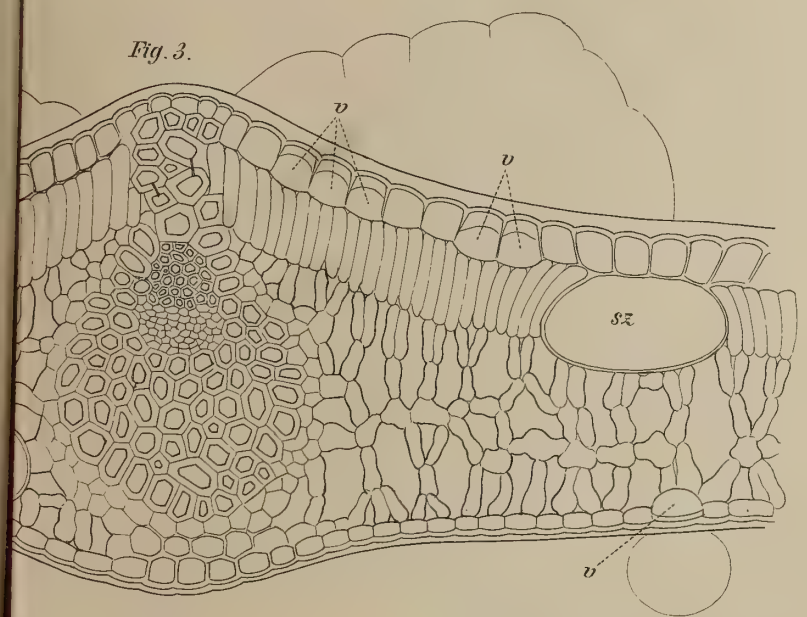
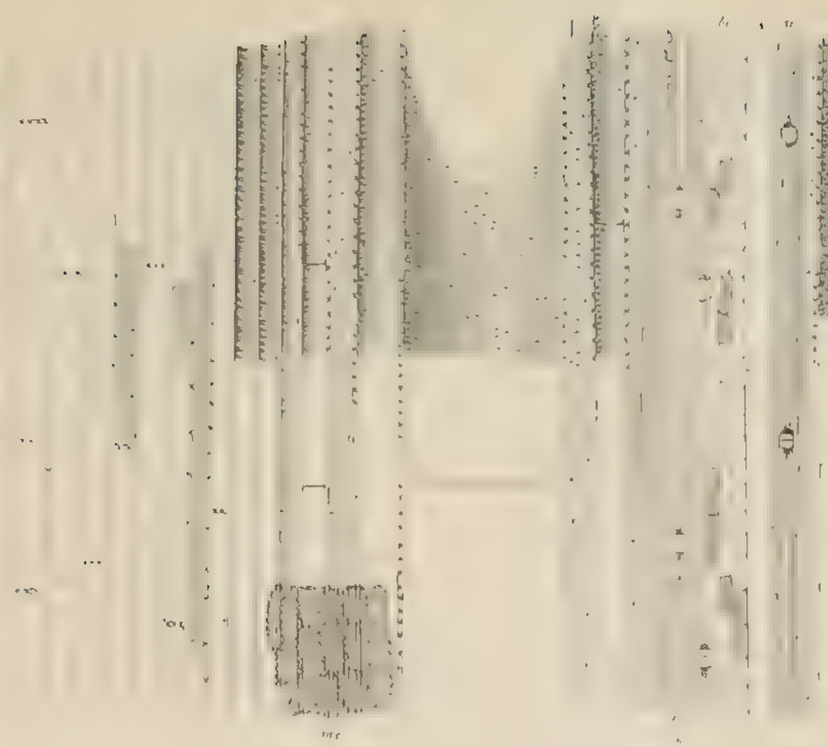


Fig. 3.



lith.v.B. Keller.

Abh. d.II.Cl.d.k.bayr.Akad.d.Wiss.XVI.Bd.I.Abth.


B
B
A
A

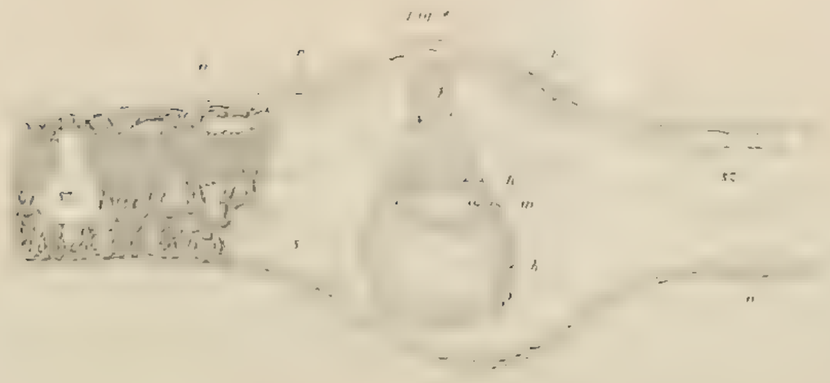


Fig. 1.

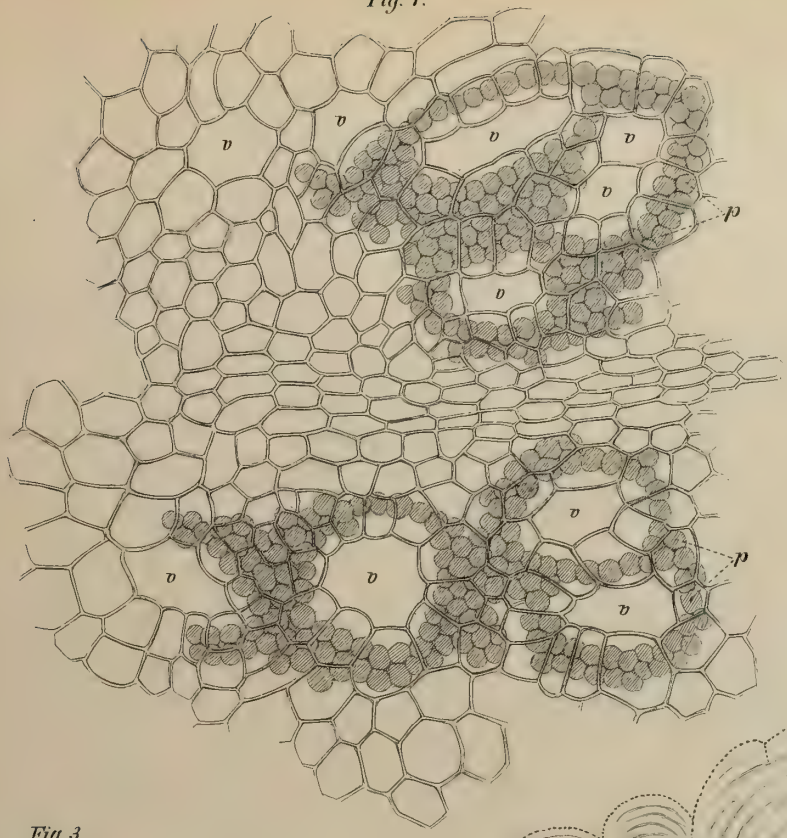


Fig. 3.

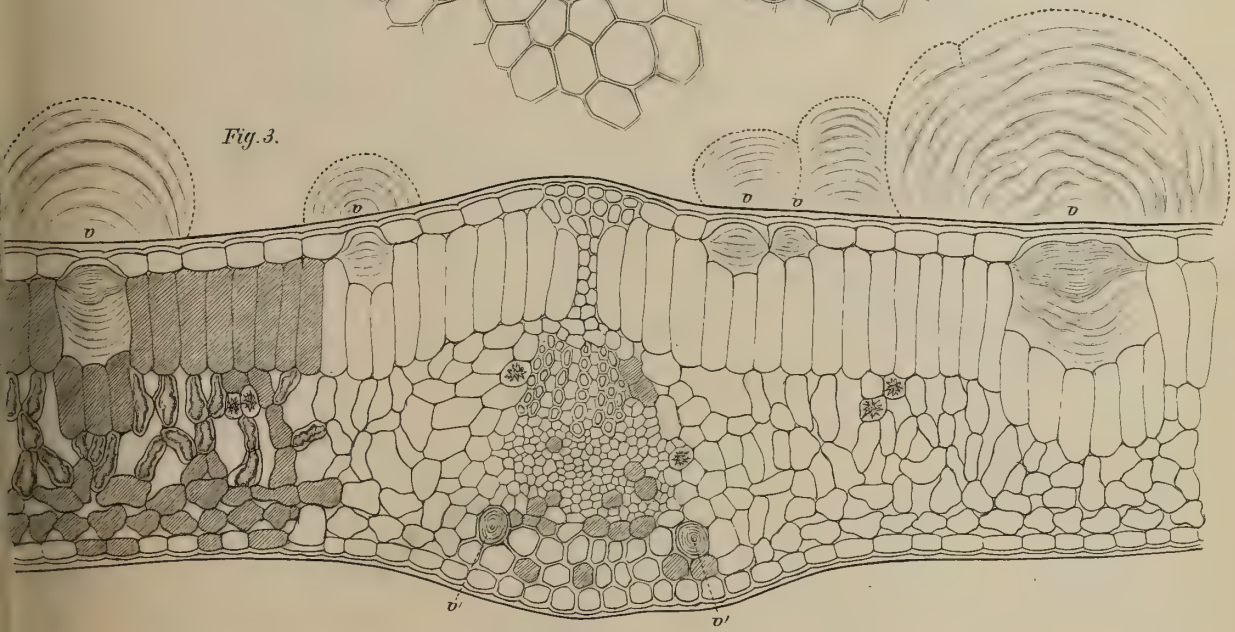
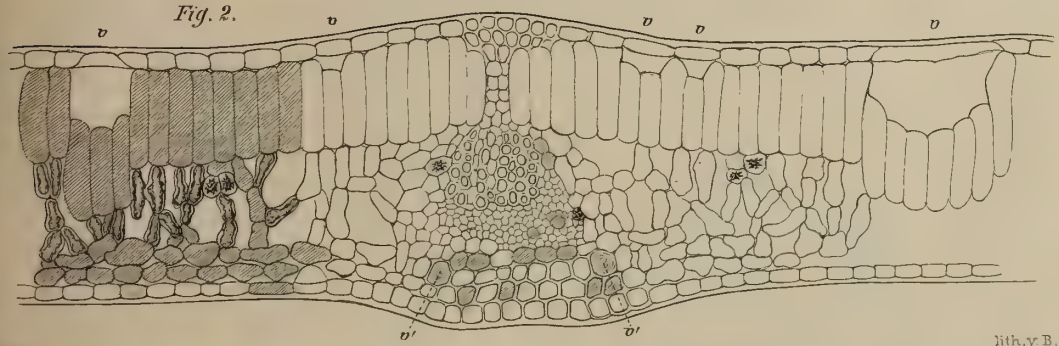


Fig. 2.



lith. v. B. Keller.

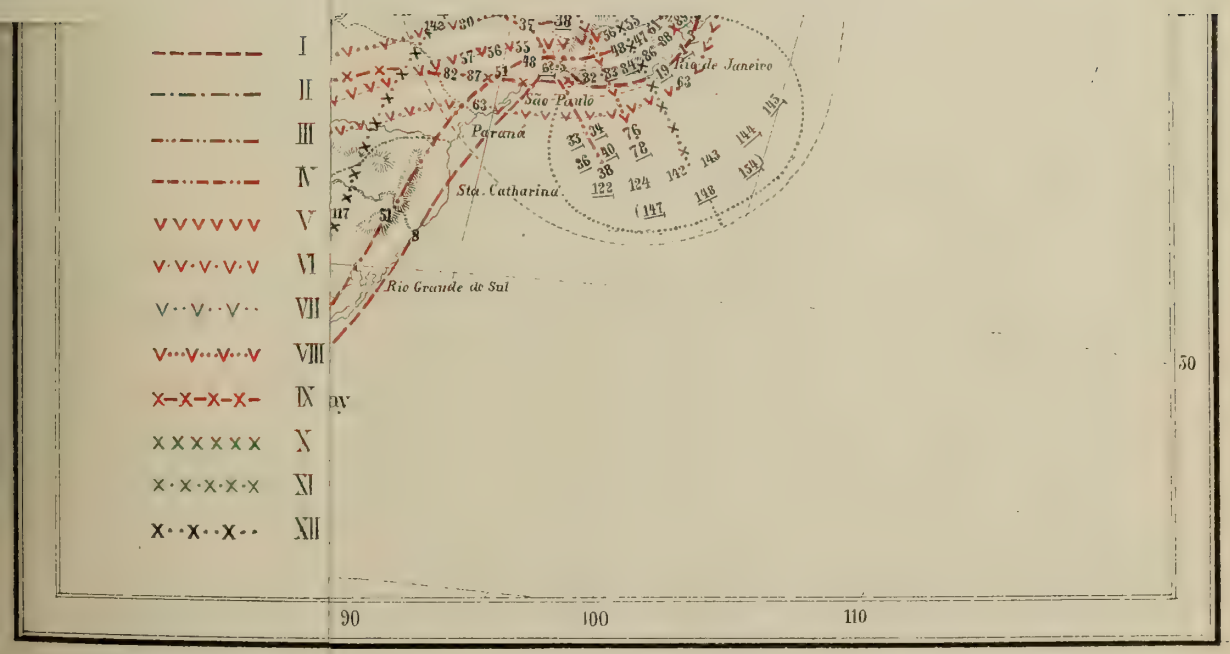
Abh. d. II. Cl. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. XVI. Bd. I. Abth.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

fec. v. Deroth, Fig. 1 u. 2 v. Wirf.

lith. v. Br. Keller.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.



Mit Benützung der Kiep

Karte über die Verbreitung

der

Arten und Sectionen von Serjania.

Bezeichnung der Sectionen:

	Section:	Art. N°:	Hauptgebiet
------	I	1 – 19	Cisandines Südamerica
- - - -		20 - 21	Andines America.
- - - -	II	22 - 45	Cisandines Südamerica
-- -- -		44 -	
v v v v v			
v v v v v	VI	59 - 64	
· · ·	VII	65 - 71	Antillengebiet
v v v v	VIII	72 - 80	Cisandines Südamerica
x-x-x-x-	IX	81 -	
· · · · ·	X	91 - 96	Andines America
· · · · ·	XI	97 – 116	
x x x ·	XII	117 - 145	Gesammtgebiet

Abh. d. II. Cl. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. XII. Bd. I. Abth.

Ueber

die kanonischen Perioden

der

Abel'schen Integrale.

(Zweite Abhandlung.)

Von

J. Lüroth
in Freiburg in Baden.

In einer Arbeit, welche in die Abhandlungen der Akademie (XV. Band II. Abtheil. Seite 331 ff.) aufgenommen wurde, habe ich die kanonischen Perioden der Abel'schen Functionen mit Benutzung der Riemann'schen Fläche abgeleitet.[1]) Es schien mir jedoch interessant zu versuchen, ob nicht auch ohne dieses Hilfsmittel es möglich wäre, jene Perioden zu finden, in ähnlicher Weise wie dies Clebsch und Gordan gethan haben, indem sie einfache Verzweigungspunkte voraussetzten. In der folgenden Arbeit erlaube ich mir meine Resultate darzulegen. Ueber die algebraische Gleichung, welche der Betrachtung zu Grunde liegt, sind gar keine speciellen Annahmen gemacht, so dass die Verzweigungspunkte einfache oder mehrfache sein können. Geometrische Betrachtungen habe ich möglichst vermieden und die Riemann'sche Fläche durch eine „Verzweigungstafel" ersetzt, so dass die Resultate, die man sonst wohl (auch in meiner früheren Arbeit) aus der Betrachtung von Linienzügen herleitet, hier aus Reihen von Buchstaben abgelesen werden. Besonders gilt dies vom § 10, in welchem gezeigt wird, dass und wie man sich das Hinschreiben der langen Buchstabenreihen ersparen und dieselben nur auf die nothwendige Länge beschränken kann. Wenn auch die Arbeit grösstentheils eine Uebersetzung meiner früheren ist, so habe ich doch geglaubt mit Rücksicht auf die ungewohnten Betrachtungen etwas ausführlicher sein zu dürfen. Ich habe mich dabei auf Integrale erster Gattung beschränkt,

1) Zu den Literaturnachweisen ist noch nachzutragen: Casorati, Annali di matem. II. Ser. Tom. III Seite 1, wo eine Vereinfachung des 4. Kap. von Clebsch und Gordan gegeben wird. Auch das Diagramm, dessen ich mich in meiner früheren Arbeit bediente, findet sich schon in einer Fussnote zur Seite 123 des Werkes Teorica delle funzioni di variabili complesse, Bd. I, Pavia 1868, von Casorati angedeutet.

einmal weil die andern sich leicht dem gegebenen Schema einfügen und dann weil die Ableitung der Gleichungen, welche an die Stelle von Gl. XVI treten, Erörterungen über die Normirung der Integrale zweiter und dritter Gattung nöthig gemacht hätte, welche nur in einer ausführlichen Theorie der Abel'schen Functionen ihre passende Stelle finden können.

§ 1.

Es sei $f(x\,y) = o$ eine algebraische, irreducibele Gleichung zwischen den beiden complexen Variabeln x und y, von welchen x, wie gebräuchlich, durch einen Punkt in einer Ebene dargestellt werde.

Die durch jene Gleichung definirte Function y von x habe σ Verzweigungspunkte $w_1, w_2, \ldots w_\sigma$, von welchen auch einer im Unendlichen liegen kann. Für einen Werth x_0 von x, der keinem Verzweigungspunkt entspricht, gibt es, wenn $f(x\,y)$ in Bezug auf y vom ν^{ten} Grade ist, ν Potenzreihen $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ die nach ganzen positiven Potenzen von $x—x_0$ fortschreiten und für y gesetzt die Gleichung $f(x\,y) = o$ erfüllen.

Wenn man eines dieser Functionselemente von x_0 auf einem Wege fortsetzt nach x_0 zurück, der in seinem Innern keinen der Punkte w_i einschliesst oder, wenn alle Verzweigungspunkte im Endlichen liegen, sie alle einschliesst, so kommt man in x_0 mit demselben Functionselemente an, mit dem man ausgegangen war. Wenn aber der Weg nicht jene Bedingungen erfüllt, so kann man zwar mit demselben Element in x_0 ankommen mit dem man ausgegangen war, aber es braucht nicht der Fall zu sein. Da man irgend einen Weg von x_0 nach x_0 zurück, ohne das Element mit dem man ankommt zu ändern, aus Wegen zusammensetzen kann, die je nur einen Verzweigungspunkt umschliessen, so braucht man nur zu wissen wie die Functionselemente sich verändern, wenn sie über einen solch' einfacheren Weg fortgesetzt werden. Dies gilt auch dann, wenn einer der Verzweigungspunkte im Unendlichen liegt. Man hat dann nur unter dem Wege, der diesen Verzweigungspunkt allein umschliesst, einen Weg zu verstehen, der alle endlichen Verzweigungspunkte in seinem Innern enthält. Für unseren Zweck kann aber ein Weg, der nur einen Verzweigungspunkt w_i umschliesst, ohne Schaden wieder zusammengezogen werden auf eine Schleife, d. h. einen Weg der von

x_0 bis in die Nähe von w_i längs einer, sich selbst nicht schneidenden, Curve verläuft, dann w_i in einem kleinen Kreise umgibt, der keinen andern Verzweigungspunkt enthält, und schliesslich wieder längs der schon benützten Curve zurück nach x_0 führt. Entspricht w_i dem Werthe ∞ von x, so besteht die Schleife aus einer von x_0 ausgehenden Curve und einem an ihr sitzenden Kreise von solchem Radius, dass er alle endlichen Verzweigungspunkte einschliesst.

Setzt man nun die sämmtlichen Elemente $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ über eine bestimmte Schleife von x_0 fort bis nach x_0 zurück, so findet man bei der Rückkehr, der Reihe nach entsprechend, die Elemente $y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \ldots y_{\alpha_\nu}$, wobei $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ eine Permutation der Zahlen $1\ 2 \ldots \nu$ ist. Die entsprechende Substitution kann man immer in eine Reihe von Cyklen zerlegen

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{k})\ (\mathfrak{l}\,\mathfrak{m} \ldots \mathfrak{r}) \ldots\ldots$$

so dass durch jene Fortsetzung $y_\mathfrak{a}$ in $y_\mathfrak{b}$, $y_\mathfrak{b}$ in $y_\mathfrak{c}$ .. schliesslich $y_\mathfrak{k}$ wieder in $y_\mathfrak{a}$ übergeht; dass ferner $y_\mathfrak{l}$ in $y_\mathfrak{m}$, .. $y_\mathfrak{r}$ in $y_\mathfrak{l}$ übergeht u. s. w. Natürlich können auch einige Elemente in sich selbst übergeführt werden. Die Reihenfolge $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ hängt aber auch von dem Sinne ab, in welchem man den Kreis der Schleife durchläuft. Wir wollen bei einem endlichen oder unendlichen Verzweigungspunkt die Umlaufsrichtung als positiv oder vorwärts bezeichnen, welche den Punkt zur Rechten hat, die entgegengesetzte aber negativ oder rückwärts nennen, indem wir annehmen in der x-Ebene liege die positive Axe des Imaginären rechts von der positiven Axe des Reellen. Liefert dann ein positiver Umlauf die Cyklen

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k})\ (\mathfrak{l}\,\mathfrak{m} \ldots \mathfrak{r}) \ldots\ldots$$

so liefert ein negativer die Cyklen

$$(\mathfrak{k} \ldots \mathfrak{b}\,\mathfrak{a})\ (\mathfrak{r} \ldots \mathfrak{m}\,\mathfrak{l}) \ldots\ldots$$

Zu jedem Verzweigungspunkte gehören ein oder mehrere Cyklen. Die Gesammtzahl aller Cyklen aller Verzweigungspunkte sei mit τ bezeichnet.

Die Zahl σ der Verzweigungspunkte muss mindestens $= 2$ sein. Denn gäbe es nur einen, so würde eine ihn umschliessende Schleife gewisse Vertauschungen von Elementen hervorbringen und andererseits

doch, weil sie alle Verzweigungspunkte umschlösse, keine Aenderungen hervorbringen können.

Wir wollen zwischen Curven und Wegen unterscheiden. Jede auf der x-Ebene gezogene Linie ist eine Curve. Hat sie einen Anfang in x_0 oder geht sie, wenn sie geschlossen ist, durch x_0, so kann man sie mit jedem der Elemente $y_1 y_2 .. y_\nu$ durchlaufen, oder jedes dieser Elemente längs ihr fortsetzen und jede solche Fortsetzung wollen wir einen Weg nennen. Zu jeder Curve gehören also ν Wege, dagegen zu jedem Wege nur eine Curve. Wenn ein Weg in x_0 beginnt und endigt, so wollen wir das Anfangselement und das Endelement durch dem Namen des Weges angehängte Zeiger 1 bez. 2 andeuten. Dagegen soll allgemein ein dem Namen des Weges beigesetzter Accent bezeichnen, dass der Weg rückwärts durchlaufen werden soll. Somit ist, unter A einen Weg verstanden, der in x_0 mit y_a beginnt und mit y_b endigt, $A_1 = y_a$, $A_2 = y_b$, $A_1' = y_b$, $A_2' = y_a$. Ein Weg ist geschlossen, wenn die zugehörige Curve geschlossen ist und wenn bei ihm Endelement und Anfangselement übereinstimmen. Es kann sein, dass eine geschlossene Curve nur dann einen geschlossenen Weg liefert, wenn man bestimmte Elemente über sie fortsetzt, dass dagegen bei andern Elementen das Anfangs- vom Endelement verschieden ist. Hienach gehören zu jeder Schleife, wenn man sie im positiven Sinn beschrieben annimmt, ν Wege, die wir als Uebergänge bezeichnen wollen. Sind die Cyklen des Punktes w_i die oben Seite 5 angeführten, so ist also ein Uebergang derjenige Weg, welcher längs der Schleife y_a in y_b fortsetzt, indem er die Schleife positiv umläuft; ein zweiter Uebergang führt y_b in y_c, ... einer y_f in y_m über u. s. w. Wenn man die Schleife, mit y_b beginnend, rückwärts durchläuft, so kommt man wieder mit y_a in x_0 an. Wir wollen dann sagen der Uebergang führe vorwärts von y_a zu y_b und rückwärts von y_b zu y_a. Durchläuft man die Schleife rückwärts mit y_a, so kommt man zu y_f, daher ein Uebergang vorwärts von y_f zu y_a und rückwärts von y_a zu y_f führt. Zu jeder Schleife gehören somit ν Uebergänge, so dass es deren im Ganzen $\nu\sigma$ gibt. Zu jedem Uebergange gehören zwei Functionselemente, die aber nicht verschieden zu sein brauchen.

Jeder Uebergang sei mit einem Buchstaben (hier kleine lateinische oder zuweilen deutsche) bezeichnet. Führt der Uebergang a von y_a

zu y_b, so führt a' von y_b zu y_a und entsprechend der obigen Festsetzung ist dann $a_1 = a_2' = y_a$, $a_2 = a_1' = y_b$.

[Beispiel: Es sei $\nu = 7$, $\sigma = 3$. Zu den 3 nach $w_1\, w_2\, w_3$ gehenden Schleifen mögen bez. die folgenden Substitutionen der Indices der Elemente gehören

w_1	w_2	w_3
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&2&5&6&7&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&3&4&6&7&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&5&3&2&1&7&4\end{pmatrix}$
mit den Cyklen		
$1(2\,3)(4\,5\,6\,7)$	$(1\,5\,7)(2\,3\,4\,6)$	$3(1\,6\,7\,4\,2\,5)$

so dass $\tau = 7$ ist.

Die hier auftretenden $3 \cdot 7$ Uebergänge seien wie folgt bezeichnet:

bei w_1	w_2	w_3
$y_1\, y_1$ a	$y_1\, y_5$ h	$y_1\, y_6$ p
$y_2\, y_3$ b	$y_2\, y_3$ i	$y_2\, y_5$ q
$y_3\, y_2$ c	$y_3\, y_4$ k	$y_3\, y_3$ r
$y_4\, y_5$ d	$y_4\, y_6$ l	$y_4\, y_2$ s
$y_5\, y_6$ e	$y_5\, y_7$ m	$y_5\, y_1$ t
$y_6\, y_7$ f	$y_6\, y_2$ n	$y_6\, y_7$ u
$y_7\, y_4$ g	$y_7\, y_1$ o	$y_7\, y_4$ v

Die Schleife um w_1 ist hier zwar wie alle Schleifen eine geschlossene Curve, aber nur, wenn man sie mit dem Element y_1 durchläuft ein geschlossener Weg, weil nur y_1 sich längs ihr wieder zu y_1 fortsetzt. Durchläuft man sie zweimal indem man y_2 fortsetzt, so kommt man wieder nach y_2 zurück und hat wieder einen geschlossenen Weg; eine zweimalige Umlaufung mit y_4 dagegen liefert keinen geschlossenen Weg, sondern hiezu ist eine viermalige Umkreisung nöthig.]

Irgend einen geschlossenen oder ungeschlossenen Weg, der in x_0 beginnt und endet, kann man, ohne das Endelement zu ändern, auf Umkreisungen von Schleifen, also auf das Durchlaufen von Uebergängen reduciren und dann durch Angabe der Namen der Uebergänge vollständig beschreiben.

Ist a b c . . m in dieser Bezeichnungsweise ein Weg, so muss des Zusammenhanges wegen a mit dem Element endigen, mit dem b beginnt, dessen Endelement wieder das Anfangselement von c sein muss u. s. w. Ist der Weg geschlossen, so muss das Endelement von m mit dem Anfangselement von a übereinstimmen, oder in Zeichen es muss

$$a_2 = b_1,\ b_2 = c_1, \ldots\ m_2 = a_1$$

sein.

[So sind die am Schlusse des Beispiels angeführten Wege beziehlich a, b c, d e, d e f g.]

Wir denken uns nun von x_0 aus die Schleifen nach den einzelnen Verzweigungspunkten so gezogen, dass sie sich gegenseitig nicht treffen. Legt man dann eine geschlossene Curve C_0, die keine Schleife schneidet, also alle Verzweigungspunkte einschliesst wenn sie alle endlich sind, und sie alle ausschliesst wenn einer dem $x = \infty$ entspricht, so ist diese Curve für jedes Element ein geschlossener Weg. Man kann sie umformen in die Folge der Schleifen, die eine nach der andern, in der Reihenfolge wie sie beim positiven Umkreisen von x_0 aufeinanderfolgen, durchlaufen werden. In dieser reducirten Gestalt ist sie immer noch für jedes der ν Elemente ein geschlossener Weg, der sich durch eine Reihe von Uebergängen beschreiben lässt. Jeder dieser ν Wege heisse ein Umgang.[1]) Wenn sich die Schleifen um x_0 in der Ordnung $w_1\, w_2 \ldots w_\sigma$ folgen, so findet man einen Umgang also: man durchläuft die zu w_1 gehörige Schleife mit y_1 und komme durch den Uebergang a nach y_a, dann hat man mit y_a die Schleife von w_2 zu umkreisen und kommt zu y_b. Der Uebergang $y_a\, y_b$ von w_2 heisse b. Mit y_b begonnen liefert die Schleife w_3 als Endelement y_c durch den Uebergang c u. s. w. Dann ist a b c . . . der Umgang. Macht man dieselbe Operation indem man mit $y_2\, y_3 \ldots y_\nu$ ausgeht, so erhält man die übrigen $\nu - 1$ Umgänge.

Jeder Uebergang kommt in einem, aber auch nur in einem Umgang vor. Denn handelt es sich um einen Uebergang m, der zu w_i gehört und von y_I zu y_m führt, so durchlaufe man rückwärts gehend mit dem Element y_I die Schleifen $w_{i-1}, w_{i-2}, \ldots w_2, w_1$. Man kommt dann am Anfang von w_1 mit einem gewissen Elemente y_a an.

---

1) Clebsch und Gordan. Abel'sche Functionen Seite 84.

Geht man umgekehrt mit diesem aus um die vorher beschriebene Operation zu machen, so kommt man nach Durchlaufung von w_{i-1} in x_0 mit y_l an und hat nun w_i von y_l zu y_m zu umkreisen d. h. den Uebergang m zu machen. Somit gehört dann m zum α^{ten} Umgange.

Andererseits gehöre zu einer Schleife der Cyklus $y_r\, y_s\, y_t \ldots y_z$, so dass die Elemente y_r, y_s, $y_t \ldots y_z$ der Reihe nach in einander übergehen, wenn man die Schleife positiv umläuft. Seien die Uebergänge $y_r\, y_s$, $y_s\, y_t, \ldots$ $y_z\, y_r$ resp. mit p, q, ... z bezeichnet, so ist der durch wiederholte Umkreisung der Schleife entstandene geschlossene Weg durch pqr..z beschrieben. Wir nennen ihn ebenfalls einen Cyklus.

[Im Beispiel hat man die 7 Umgänge aht, bks, cir, dmv, enq, fop, glu und die 7 Cyklen a, bc, defg, hmo, ikln, puvsqt, r.]

§ 2.

Wenn man aus allen Uebergängen eine Gruppe G_ν von möglichst wenig Uebergängen herausnimmt, die so beschaffen sind, dass man mit ihrer Hilfe von jedem Element zu jedem anderen gelangen kann, so gelten über sie folgende Sätze:[1])

I) Man kann nicht aus Uebergängen der Gruppe G_ν einen geschlossenen Weg so herstellen, dass ein Uebergang nur einmal gebraucht wird. Gesetzt die Uebergänge a, b, c, ... m von G_ν, die nicht alle verschieden zu sein brauchen, bildeten in dieser Reihenfolge einen geschlossenen Weg und einer von ihnen, f, komme nur einmal vor. Führt f von y_p zu y_q, so muss der Weg gh..mab...e mit y_q beginnen und mit y_p enden, weil ja der ganze Weg abc.efg..m geschlossen sein soll. Da aber f nur einmal auftreten soll, kommt es in g..ma...e nicht mehr vor und man kann also, ohne f zu benützen, von y_p zu y_q kommen und somit f auch aus G_ν fortlassen und doch noch von jedem Element zu jedem andern gelangen. Dies geht nicht, weil G_ν möglichst wenig Uebergänge enthalten soll. Folglich ist der obige Satz bewiesen.

II) Es muss mindestens ein Element geben, zu welchem von den Uebergängen in G_ν nur ein einziger führt. Denn

1) Diese bekannten Sätze werden hier des Folgenden wegen noch einmal abgeleitet.

wäre dies nicht der Fall und träte jedes Element in zwei Uebergängen aus G_ν auf, so würde ein Uebergang n von y_1 zu $y_\mathfrak{p}$ führen; dann gäbe es einen o der von $y_\mathfrak{p}$ zu $y_\mathfrak{q}$ leitete, dann wieder einen p der $y_\mathfrak{q}$ mit $y_\mathfrak{r}$ verbände u. s. w. Wenn man so fortginge, so müsste man dann einmal zu einem Uebergange t gelangen, der nicht zu einem neuen, sondern zu einem schon benutzten Elemente, etwa zu $y_\mathfrak{q}$ führte. Dann bildeten aber die von einander verschiedenen Uebergänge p, q, .. t den geschlossenen Weg p q ... t, was nach dem ersten Satze nicht angeht.

Ist ϱ_ν die Zahl der Uebergänge in G_ν und sind diese a b c .. z, so sei jetzt $y_\mathfrak{a}$ das Element oder eines der Elemente, welche nur bei einem Uebergange a auftreten, dagegen bei den andern b c ... z nicht, und a verbinde $y_\mathfrak{a}$ mit $y_\mathfrak{b}$; dann werden die ϱ_ν—1 Uebergänge b c .. z hinreichen, um von jedem der ν—1 Elemente $y_\mathfrak{b} \ldots y_\mathfrak{m}$ zu jedem andern überzugehen, da ja a nur gebraucht wurde, um zu $y_\mathfrak{a}$ zu gelangen. Andererseits kann man auch von den Uebergängen b c ... z keinen fortlassen, weil man den betreffenden sonst auch aus G_ν ohne Schaden fortlassen könnte. Die Gruppe b c ... z besteht also aus der Minimalzahl von Uebergängen die man braucht, um ν—1 Elemente zu verbinden, also aus $\varrho_{\nu-1}$. Somit ist $\varrho_\nu = \varrho_{\nu-1} + 1$. Da aber $\varrho_2 = 1$ ist, folgt $\varrho_\nu = \nu$—1.

ν—1 Uebergänge, welche so beschaffen sind, dass man mit ihrer Hilfe von jedem Element zu jedem anderen kommen kann, sollen fundamentale heissen. Es ist noch zu zeigen, dass man solche immer finden kann. Mindestens ein Uebergang muss existiren, der y_1 mit einem andern Element verbindet. Denn gäbe es keinen, so würde jede Schleifenumkreisung y_1 wieder in y_1 verwandeln, man könnte also das Element y_1 in der ganzen Ebene eindeutig fortsetzen und die so definirte Function wäre, weil sie nur eine endliche Zahl von ausserwesentlichen singulären Punkten enthalten kann, rational $= g(x)$; dann hätte $f(x\,y)$ den rationalen Factor $y - g(x)$ und wäre, unserer Annahme entgegen, reducibel. Somit muss ein Uebergang existiren, der y_1 in ein anderes Element $y_\mathfrak{a}$ verwandelt. Wenn nun kein Uebergang y_1 oder $y_\mathfrak{a}$ mit einem andern Element verbände, so würde jeder Weg y_1 und $y_\mathfrak{a}$ entweder unverändert lassen oder nur unter sich vertauschen, die Functionselemente $y_1 + y_\mathfrak{a}$ und $y_1\, y_\mathfrak{a}$ lieferten dann rationale Functionen $h(x)$ und $k(x)$ von x und $f(x\,y)$ hätte den Factor $y^2 - y\,h(x) + k(x)$ und wäre reducibel. Also muss ein

Uebergang vorhanden sein, der entweder y_1 oder y_a mit einem dritten Element y_b verbindet. Und so kann man weiter schliessen, bis alle ν Elemente erschöpft und dabei $\nu - 1$ Uebergänge gewonnen sind. Die Elemente werden hier in gewisser Weise geordnet $y_1\, y_a\, y_b \ldots$. und zwar kann man von jedem gelangen zu einem der links von ihm stehenden und schliesslich zu y_1, folglich auch, wie es verlangt war, von jedem zu jedem anderen. [Im Beispiel sind b d p s t u fundamentale Uebergänge].

Betrachten wir nun geschlossene Wege, die nur aus fundamentalen Uebergängen bestehen. Sei a ein solcher Uebergang. Dann muss er nach dem ersten Satze (Seite 205) mehr als einmal auftreten.

Beginnt man den Weg mit a, so möge dann eine Reihe anderer Uebergänge kommen, deren Gesammtheit ein Weg B sein möge, dann komme wieder a. Dieses kann aber jetzt vorwärts oder rückwärts durchlaufen werden müssen. Dann kann wieder eine Reihe von Uebergängen kommen, die auch noch a oder a′ enthalten kann, und deren Gesammtheit der Weg $\mathfrak{C}$ sei. Also ist der ganze geschlossene Weg entweder a B a $\mathfrak{C}$ oder a B a′ $\mathfrak{C}$ zu schreiben, wobei, wie erwähnt, in B der Buchstabe a nicht mehr vorkömmt. Im ersten Falle wäre $a_2 = B_1$, daher B a ein geschlossener, aus lauter fundamentalen Uebergängen bestehender Weg, der a nur einmal enthielte, was nicht möglich ist. Also kann nur die Form a B a′ $\mathfrak{C}$ vorkommen. Da $a_2 = B_1$, $B_2 = a_1' = a_2$ ist, so ist B selbst wieder ein geschlossener Weg. Ferner ist, weil $a_2' = a_1 = \mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2 = a_1$, auch $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Weg und muss also, wenn er a noch enthält, entweder die Form haben C a′ D a $\mathfrak{D}$ oder C a D a′ $\mathfrak{D}$, wobei C und D das a nicht mehr enthalten sollen. Im ersten Falle wäre, weil $C_1 = \mathfrak{C}_1 = a_1 = a_2'$ der Weg C a′ geschlossen und enthielte a nur einmal. Also muss $\mathfrak{C}$ die Form haben C a D a′ $\mathfrak{D}$. Von $\mathfrak{D}$ schliesst man dann ähnlich u. s. w. Man kann also den ganzen geschlossenen Weg schreiben

$$a\,B\,a'\,C\;a\,D\,a'\,E \ldots a'\,M \qquad \text{III}$$

wobei die geschlossenen Wege B, C, D, ... M, die auch zum Theil fehlen können, a oder a′ nicht mehr enthalten.

§ 3.

Das Integral einer rationalen Function von x und y ist durch Angabe des Weges (im obigen Sinne) vollständig bestimmt, weil man in

jedem Punkte des Weges den anzuwendenden Werth von y kennt. Wir betrachten hier nur Integrale erster Gattung, die allenthalben endlich bleiben. Solche sind unbestimmt um Perioden, d. h. um Integrale, die über geschlossene Wege genommen sind. Wenn die dem geschlossenen Wege entsprechende Curve sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne einen Verzweigungspunkt zu überschreiten, so gibt sie dem über sie erstreckten Integrale den Werth Null. Andernfalls kann man sie auf Schleifen bez. den Weg auf Uebergänge reduciren, so dass das Integral über den geschlossenen Weg gleich ist einer Summe von Integralen, die über Uebergänge erstreckt sind, welche sich zu einem geschlossenen Wege zusammenschliessen. Sei a b c .. m dieser Weg. Ist a kein fundamentaler Uebergang und führt von y_p zu y_q, so kann man aus fundamentalen Uebergängen einen andern Weg A, die Ergänzung von a, zusammenstellen, der von y_q zu y_p führt, so dass a A ein geschlossener Weg ist. Ist aber a ein fundamentaler Uebergang, so sei unter seiner Ergänzung der umgekehrt durchlaufene Uebergang, a′, verstanden. Aehnlich seien zu b, c, ... m die Ergänzungen B, C ..... M gefunden. Ein über einen Weg W genommenes Integral sei hier, wo es nur auf den Weg ankommt, mit (W) bezeichnet. Weil Integraltheile sich aufheben, deren Wege sich nur durch die Richtung unterscheiden, ist dann

$$\begin{aligned}
(a\,b\,c\ldots m) &= (a\,A\,A'\,b\,c\,..\,m) = (a\,A) + (b\,c\ldots m) + (A')\\
(b\,c\ldots m) &= (b\,B\,B'\,c\ldots.\,m) = (B') + (b\,B) + (c\ldots m)\\
&\quad\cdots\cdots\\
(a\,b\,c\ldots m) &= (a\,A) + (b\,B) + .. + (m\,M)\\
&\quad + (A') + (B') + \ldots + (M').
\end{aligned}$$

Weil aber $A_2' = A_1 = a_2 = b_1 = B_2 = B_1'$ ist, da a A, b B und a b c.. geschlossene zusammenhängende Wege sind, so schliesst der Anfang von B′ an das Ende von A′ an u. s. w. und schliesslich das Ende von M′ an den Anfang von A′ und daher ist der Weg A′ B′ ... M′ geschlossen. Er besteht aber nur aus fundamentalen Uebergängen. Ist p derjenige fundamentale Uebergang mit dem er beginnt, so ist nach dem auf Seite 207 gefundenen Resultate (III), der Weg = p P p′Q, wo P und Q selbst geschlossene Wege sind. Daher ist

$$(A'\,B'\ldots M') = (p\,P\,p'\,Q) = (p\,p') + (P) + (Q) = (P) + (Q).$$

Die Wege P und Q haben die nämliche Eigenschaft, wie der ursprüngliche Weg, somit fällt aus jedem wieder ein Buchstabe fort, so dass man schliesslich Null als Werth des Integrales $(A' B' \ldots M')$ findet. Da aber

$$(A' B' \ldots M') = (A') + (B') + \ldots + (M')$$

ist, so setzt sich also die betrachtete Periode durch Addition und Subtraction aus Integralen wie $(a A)$, $(b B)\ldots$ zusammen. Ist a ein fundamentaler Uebergang, so ist die Ergänzung $A = a'$, daher $(a A) = (a a') = o$; und es bleiben also als Perioden nur Integrale, genommen über die $\nu\sigma-(\nu-1)$ Wege, welcher jeder aus einem nichtfundamentalen Uebergang und seiner Ergänzung besteht.

IV) Den eben gemachten Schluss, dass $(A' B' \ldots M') = o$ ist, kann man auf jeden geschlossenen nur aus fundamentalen Uebergängen bestehenden Weg anwenden, so dass ein über einen solchen Weg genommenes Integral stets gleich Null ist.[1])

Man kann ein Verfahren angeben, wie man diese Ergänzungen in systematischer Weise finden kann. Zu diesem Zwecke stellt man sich aus den fundamentalen Uebergängen einen geschlossenen Weg W her, auf dem man in x_0 zu sämmtlichen ν Functionselementen gelangt. Um nun die Ergänzung eines Ueberganges a zu finden, der von y_p zu y_q führt, theilt man W so in 3 Theile, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, dass $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 = y_p$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_1 = y_q$ ist. Dann ist der Weg $\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}$ die gesuchte Ergänzung A, indem er von y_q zu y_p führt. Da nun auch $\mathfrak{B}'$ von y_q zu y_p führt, könnte man auch $\mathfrak{B}'$ als Ergänzung wählen; weil aber der Weg W ganz aus fundamentalen Uebergängen besteht, ist nach dem vorhin bewiesenen Satze IV $(W) = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) = o$ und somit ist die Periode $(a\,\mathfrak{B}')$ der $(a\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A})$ gleich. Mög-

---

1) Bei dem Beweise des entsprechenden Satzes meiner ersten Abhandlung (Bd. XV dieser Abhandlungen, II. Abth. auf S. 337 und 338) ist ein Versehen vorgekommen, auf das mich Herr Nöther aufmerksam machte. In dem Falle der Figur 4 daselbst ist das Integral über C nicht gleich dem über PQURSVP. Aber eine Curve wie die in Figur 4 ist nicht möglich. Denn sind in den dortigen Figuren PR und QS zwei Schnittpunkte von C mit s, welche unmittelbar aufeinanderfolgen, wenn man C durchlauft, so dass auf dem Stücke PVS von C kein Schnittpunkt mit s mehr liegt, so wäre im Falle der Figur 4 PVSQP eine geschlossene nur fundamentale Uebergänge überschreitende Curve, die s nur in einem Punkt (QS) träfe, was nicht möglich ist (Seite 338 oben). Bei Figur 5 ist aber das Integral über C gleich der Summe der über PVQP und RSUR genommen, von welchen jede mit s zwei Schnittpunkte weniger hat als C u. s. w.

licherweise lässt sich eine Ergänzung auf verschiedene Arten herstellen. Ist nun A eine zweite, von $\mathfrak{A}$ verschiedene Ergänzung von a, so ist $A\,\mathfrak{A}'$ ein geschlossener, nur aus fundamentalen Uebergängen bestehender Weg, daher $(A\,\mathfrak{A}') = o$ und $(A) = (\mathfrak{A})$, so dass die Perioden $(a\,A)$ und $(a\,\mathfrak{A})$ gleich werden.

Um die Willkür in der Wahl von W und der Aufsuchung der Ergänzungen zu vermeiden, wollen wir die Anordnung des geschlossenen Wegs und die Einfügung der nicht-fundamentalen Uebergänge zwischen die fundamentalen in eine bestimmte Regel bringen, die uns zugleich leicht gewisse Schlüsse erlauben wird, was sonst nicht der Fall wäre.

§ 4.

Zuerst stelle man sich eine Tafel her, die Verzweigungstafel, die für jede Schleife eine Reihe und für jedes Element eine Zeile hat. Die Schleifen sollen dabei in der Reihenfolge stehen wie sie sich um den Punkt x_0 folgen, also in der $w_1\, w_2 \ldots w_\sigma$. Wenn nun ein Uebergang a der zur Schleife w_i gehört, positiv durchlaufen, von $y_\mathfrak{p}$ zu $y_\mathfrak{q}$ führt, so dass $a_1 = y_\mathfrak{p}$, $a_2 = y_\mathfrak{q}$ ist, so werde in die Reihe w_i und die $\mathfrak{p}^{te}$ Zeile a_1, in die Reihe w_i und die $\mathfrak{q}^{te}$ Zeile a_2 gesetzt, das erstere links, das zweite rechts um anzudeuten, dass man die Schleife von links nach rechts, durchlaufen müsse um von $y_\mathfrak{p}$ zu $y_\mathfrak{q}$ zu gelangen. So wie mit a verfährt man mit allen Uebergängen.

[In unserem Beispiel ist die Tafel

	w_1		w_2		w_3	
y_1	a_1	a_2	h_1	o_2	$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{t_2}$
y_2	$\mathbf{b_1}$	c_2	i_1	n_2	q_1	s_2
y_3	c_1	$\mathbf{b_2}$	k_1	i_2	r_1	r_2
y_4	$\mathbf{d_1}$	g_2	l_1	k_2	s_1	v_2
y_5	e_1	$\mathbf{d_2}$	m_1	h_2	$\mathbf{t_1}$	q_2
y_6	f_1	e_2	n_1	l_2	$\mathbf{u_1}$	$\mathbf{p_2}$
y_7	g_1	f_2	o_1	m_2	v_1	$\mathbf{u_2}$

wobei die fetten Buchstaben sich auf die fundamentalen Uebergänge beziehen].

Wir bilden nun zuerst eine gewisse Buchstabenreihe R_0, die so zu sagen als Wegweiser für den Weg W dienen soll, den wir jetzt mit W_0 bezeichnen wollen.

In der Zeile y_1 steht der Name mindestens eines fundamentalen Ueberganges. Ist derselbe, oder wenn mehrere da sind, einer von ihnen, a und steht a_α in der ersten Zeile, so beginnen wir R_0 mit $a_\alpha\, a'_\alpha$ ($\alpha = 1$ oder 2, $a'_1 = a_2$, $a'_2 = a_1$); das a'_α sei mit y_a identisch. In der $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Zeile geht man nun von a'_α nach rechts hin und notirt in R_0 hinter a_α die dort stehenden Buchstaben der Reihe nach, indem man dabei die Tafel als geschlossen ansieht, so als ob hinter der Reihe w_σ wieder die w_1 käme, bis man wieder zu einem fundamentalen Buchstaben kommt. Ist dieser a'_α selbst, so springt man rückwärts nach a_α und notirt in R_0 $a'_\alpha\, a_\alpha$; ist er dagegen von a'_α verschieden und b_β so geht man zu $b'_\beta = y_\mathfrak{b}$ über ($\beta = 1$ oder 2), notirt $b_\beta\, b'_\beta$ und geht dann in der $\mathfrak{b}^{\text{ten}}$ Zeile von b'_β nach rechts hin weiter, indem man in R_0 die Buchstaben dieser Zeile einfügt, bis man wieder zu einem fundamentalen kommt u. s. w.

[Im Beispiel kommt so $p_1\, p_2$, dann schliessen sich die Buchstaben an die in der 6ten Zeile rechts neben p_2 stehen, nämlich $f_1\, e_2\, n_1\, l_2\, u_1$, dann kommt weil u fundamental ist, u_2 und weiter $g_1\, f_2\, o_1\, m_2\, v_1\, u_2$, hierauf $u_1\, p_2\, p_1\, t_2\, t_1\, q_2\, e_1\, d_2\, d_1\, g_2\, l_1\, k_2\, s_1\, s_2\, b_1\, b_2\, k_1\, i_2\, r_1\, r_2\, c_1\, b_2\, b_1\, c_2\, i_1\, n_2\, q_1\, s_2\, s_1\, v_2\, d_1\, d_2\, m_1\, h_2\, t_1\, t_2\, a_1\, a_2\, h_1\, o_2$].

Es sind jetzt einige Eigenschaften dieser Reihe zu beweisen.

Kommt man im Verlaufe des geschilderten Verfahrens zu einem Buchstaben r_ϱ der nicht-fundamental ist, so ist der ihm vorangehende unzweideutig bestimmt, indem es ja in der Zeile der Verzweigungstafel, in der r_ϱ steht, der zunächst links von r_ϱ stehende ist. Ist aber r fundamental, so muss man wissen, welches der nachfolgende Buchstabe ist, damit der vorhergehende unzweideutig gegeben ist. Denn folgt dem r_ϱ in der angegebenen Operation das r'_ϱ, so findet man den vorhergehenden, indem man von r_ϱ wie eben beschrieben links geht; folgt aber dem r_ϱ ein anderer Buchsabe s, so ist der vorhergehende r'_ϱ. Also bestimmt eine Gruppe von zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben den vorhergehenden unzweideutig und damit auch alle vorhergehenden und ebenso auch die nachfolgenden.

Wenn man nun wie vorhin beschrieben die Reihe $a_\alpha\, a'_\alpha\, b_\beta\, c_\gamma\, d_\delta\, i_\iota\, k_\varkappa\, l_\lambda\, m_\mu\, n_\nu \ldots$ bildet, so muss man, wegen der endlichen Anzahl von Buchstaben, einmal zu einer Gruppe von zwei Buchstaben kommen $m_\mu\, n_\nu$ die schon da war, indem z. B. $m_\mu = b_\beta$, $n_\nu = c_\gamma$ ist. Dann muss aber nach dem eben bewiesenen auch $l_\lambda = a'_\alpha$, $k_\varkappa = a_\alpha$ sein, so dass also die Reihe von $k_\varkappa\, l_\lambda \ldots$ an eine blosse Wiederholung von $a_\alpha\, a'_\alpha\, b_\beta \ldots . i_\iota$, und diese Reihe, die wir nun allein mit R_0 bezeichnen wollen, geschlossen ist.

V) Die Reihe R_0 hat, wie jetzt gezeigt werden soll, die Eigenschaft, dass wenn a ein fundamentaler Buchstabe ist, in ihr einmal $a_1\, a_2$ und einmal $a_2\, a_1$, wenn a nicht-fundamental ist, einmal a_1 und einmal a_2 auftritt. Wenden wir die geschilderte Operation an auf eine Tafel von zwei Zeilen, die durch einen fundamentalen Uebergang a verbunden sind. In der ersten Zeile stehe a_α und die andern Buchstaben der Zeile von a_α aus nach rechts gezählt mögen eine Reihe A bilden. In der zweiten Zeile stehe a_β und die andern Buchstaben bilden die Reihe B. Dann ist $R_0 = a_\alpha\, a_\beta\, B\, a_\beta\, a_\alpha\, A$ und diese hat die angeführten Eigenschaften. Gesetzt es sei bewiesen, dass die aus $\nu-1$ Zeilen mit $\nu-2$ fundamentalen Uebergängen zu bildende Reihe R die fraglichen Eigenschaften hat. Nun gibt es nach Satz II Seite 205 stets ein Element, etwa y_1, zu dem nur ein fundamentaler Uebergang a führt. Es sei $a_\alpha = y_1$, $a'_\alpha = y_a$. Die in der ersten Zeile neben a_α rechts stehenden Buchstaben mögen die Reihe C geben. Wenn man nun auf diejenige Tafel, die aus der 2ten, $3^{\text{ten}} \ldots n^{\text{ten}}$ Zeile der gegebenen gebildet ist, die Regel anwendet, indem man a'_α nicht als fundamental ansieht, so entsteht eine Reihe von der Form $Da'_\alpha E$, weil ja a'_α einmal vorkommen muss, wobei D und E Gruppen sind, welche die zu beweisenden Eigenschaften haben. Bildet man nun R_0, indem man mit dem ersten Buchstaben von D anfängt, so hat man von a'_α zu a_α zu springen, dann die Buchstaben von C hinzuschreiben, dann wieder a_α, nach a'_α zu springen, an das sich die Gruppe E anschliesst, so dass $R_0 = Da'_\alpha a_\alpha Ca_\alpha a'_\alpha E$ ist und demnach ebenfalls die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Aus R_0 entsteht nun die Beschreibung des Weges W_0, wenn man aus R_0 die nicht fundamentalen Buchstaben fortlässt, je ein Paar fundamentale die nebeneinanderstehen, wie $a_\iota\, a_\varkappa$ durch den Uebergang $a_{\iota\varkappa}$ ersetzt und dabei a_{12} mit a, a_{21} mit a' identificirt. Da nun, wie vorhin

bewiesen wurde, in R_0 $a_1 a_2$ und $a_2 a_1$ auftritt, so kommt in W_0 a und a′ vor.

VI) Der Weg W_0 ist geschlossen und da er nur aus fundamentalen Uebergängen besteht, ertheilt er einem über ihn genommenen Integral den Werth Null.

Der Bequemlichkeit wegen werde aus R_0 noch eine zweite geschlossene Buchstabenreihe S_0 dadurch abgeleitet, dass man aus R_0 die fundamentalen Buchstaben fortlässt.

[In unserem Beispiel ist

$$W_0 = p\,u\,u'\,p'\,t'\,d'\,s\,b\,b'\,s'\,d\,t$$

und

$$S_0 = f_1\,e_2\,n_1\,l_2\,g_1\,f_2\,o_1\,m_2\,v_1\,q_2\,e_1\,g_2\,l_1\,k_2\,k_1\,i_2\,r_1\,r_2\,c_1\,c_2\,i_1\,n_2\,q_1\,v_2\,m_1\,h_2\,a_1\,a_2\,h_1\,o_2].$$

§ 5.

Anknüpfend an die Reihe S_0 wollen wir nun den Weg W_0 durch „Einfügung“ oder „Eröffnung“ neuer Uebergänge abändern. In S_0 sind entweder keine „Trennungen“ vorhanden, d. h. es kommt nicht vor, dass zwei gleiche Buchstaben durch zwei andere gleiche getrennt werden oder dies kommt vor. [In der obigen Reihe sind die beiden f durch die beiden n getrennt, dagegen sind die beiden l durch die beiden g nicht getrennt.] Wenn S_0 keine Trennungen hat, so sind, wie später (§ 7) bewiesen werden wird, alle Perioden Null. Wenn aber Trennungen vorkommen, indem die beiden a durch die beiden b getrennt werden, so sind auch in R_0 die beiden a durch die beiden b getrennt und R_0 hat die Form

$$R_0 = \mathfrak{A}\,a_\iota\,\mathfrak{B}\,b_\varkappa\,\mathfrak{C}\,a_\lambda\,\mathfrak{D}\,b_\mu,$$

wo ι und λ, sowie $\varkappa$ und μ Eins und Zwei sind und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ Gruppen von Buchstaben bezeichnen, die zum Theil auch fehlen können.

Aus der Reihe R_0 werde nun die neue Reihe

$$R_1 = \mathfrak{A}\,a_\iota\,a_\lambda\,\mathfrak{D}\,b_\mu\,b_\varkappa\,\mathfrak{C}\,a_\lambda\,a_\iota\,\mathfrak{B}\,b_\varkappa\,b_\mu$$

abgeleitet. Diese entsteht auch, wenn man die zur Bildung von R_0 befolgte Regel auf die Verzweigungstafel anwendet und dabei nicht nur bei den fundamentalen Uebergängen sondern auch bei den a und b in eine

andere Zeile springt. Dann hat man nämlich von a_ι zu a_λ zu springen, an dieses schliesst sich $\mathfrak{D}$ an mit b_μ, von diesem springt man zu $b_\varkappa$, durchläuft $\mathfrak{C}$ u. s. w.

Man sieht, dass R_1 die Eigenschaften, die oben Seite 212 für R_0 bewiesen wurden, ebenfalls besitzt, insbesondere dass die Namen aller Uebergänge in R_1 vorkommen.

Aus R_1 werde abgeleitet die Buchstabenreihe S_1 durch Fortlassung der fundamentalen Buchstaben und der a, b; und ferner der Weg W_1, indem man wieder ein Paar nebeneinanderstehender gleicher Buchstaben, seien sie fundamental oder die a, b, durch den betreffenden Uebergang ersetzt, ähnlich wie dies geschah, um W_0 aus R_0 abzuleiten. In W_1 werden also die Uebergänge a und b durchlaufen, so dass sie ausser den fundamentalen nun erlaubt sind.

Sei u irgend ein nicht fundamentaler Uebergang und U die Ergänzung desselben. Mit Hilfe von R_0 kann man sie wie folgt finden. Zwischen u_2 und u_1, indem man von u_2 etwa nach rechts hin geht, stehe die Buchstabengruppe $\mathfrak{U}$. Wenn man dann auf $\mathfrak{U}$ die Regel anwendet, die W_0 aus R_0 hervorgehen lässt, so entsteht U. Denn ist $u_1 = y_p$, $u_2 = y_q$, so führen die in $\mathfrak{U}$ vorkommenden fundamentalen Uebergänge, die zusammen U bilden, von y_q zu y_p, wie es verlangt wird. Geht man nach links von u_2 zu u_1, so sind um $\mathfrak{U}$ zu bilden natürlich die Buchstaben in der Reihe zu schreiben, wie man sie nun antrifft.

[So ist im Beispiel Seite 211 die Ergänzung zu l gegeben durch u u′ p′ t′ d′ oder durch p′ t′ d′ s b b′ s′, je nachdem man nach rechts oder links geht.]

Man findet nun auch in R_1 zwischen u_2 und u_1 eine Buchstabengruppe $\mathfrak{U}_1$ und kann mit Anwendung der Regel zur Ableitung von W_1 aus R_1, daraus einen Weg U_1 ableiten. Es soll ermittelt werden, wie sich U und U_1 unterscheiden. Die Differenz wird davon abhängen, in welchen der 4 Buchstabengruppen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ sich u_1 und u_2 befinden. Seien nun p q r s 4 Buchstaben bez. aus $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$, sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}\,p\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}\,q\,\mathfrak{J}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{K}\,r\,\mathfrak{L}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}\,s\,\mathfrak{N}$, so wird

$$R_0 = \mathfrak{F}\,p\,\mathfrak{G}\,a_\iota\,\mathfrak{H}\,q\,\mathfrak{J}\,b_\varkappa\,\mathfrak{K}\,r\,\mathfrak{L}\,a_\lambda\,\mathfrak{M}\,s\,\mathfrak{N}\,b_\mu$$

dagegen

$$R_1 = \mathfrak{F}\,p\,\mathfrak{G}\,a_\iota\,a_\lambda\,\mathfrak{M}\,s\,\mathfrak{N}\,b_\mu\,b_\varkappa\,\mathfrak{K}\,r\,\mathfrak{L}\,a_\lambda\,a_\iota\,\mathfrak{H}\,q\,\mathfrak{J}\,b_\varkappa\,b_\mu.$$

Bezeichnen wir die aus den Buchstabengruppen $\mathfrak{A} \ldots \mathfrak{N}$ nach der oft erwähnten Regel hervorgehenden Wege mit A ... N, so geben die beiden Reihen, in welchen die Klammern Integrale bezeichnen,

$$p\,(G\,H)\,q\,(J\,K)\,r\,(L\,M)\,s\,(N\,F)\,p \qquad (1)$$

$$p\,(F'\,b_{\mu\varkappa}\,J')\,q\,(H'\,a_{\iota\lambda}\,L')\,r\,(K'\,b_{\varkappa\mu}\,N')\,s\,(M'\,a_{\lambda\iota}\,G')\,p \qquad (2)^{1})$$

eine Uebersicht über die zwischen den einzelnen der 4 Buchstaben p q r s liegenden Wegtheile und die über sie erstreckten Integrale. Die Integrale in der zweiten Reihe sind aber gleich denjenigen in der Reihe

$$p\,(G\,H)\,[b_{\mu\varkappa}]\;q\,(J\,K)\,[a_{\iota\lambda}]\;r\,(L\,M)\,[b_{\varkappa\mu}]\;s\,(N\,F)\,[a_{\lambda\iota}]\,p \qquad (3)$$

in welcher

$$\begin{aligned}
[b_{\mu\varkappa}] &= (b_{\mu\varkappa}\,H'\,J'\,G'\,F') &&= (b_{\mu\varkappa}\,B'\,A')\\
[b_{\varkappa\mu}] &= (b_{\varkappa\mu}\,K'\,L'\,M'\,N') = (b_{\varkappa\mu}\,C'\,D') &&= -\,[b_{\mu\varkappa}]\\
[a_{\iota\lambda}] &= (a_{\iota\lambda}\;J'\,H'\,K'\,L') &&= (a_{\iota\lambda}\,B'\,C')\\
[a_{\lambda\iota}] &= (a_{\lambda\iota}\;G'\,F'\,M'\,N') = (a_{\lambda\iota}\,A'\,D') &&= -\,[a_{\iota\lambda}]
\end{aligned}$$

gesetzt ist. In der Reihe (3) stehen zwischen je zweien der p q r s die Integrale über dieselben Wegtheile wie in der Reihe (1), abgesehen von den in eckige Klammern gesetzten Grössen.

Weil aber der Weg $B'\,A'$ die Ergänzung von $b_{\mu\varkappa}$, $A'\,D'$ die von $a_{\lambda\iota}$ ist, sind jene Grössen die Perioden, die zu den Uebergängen $b_{\mu\varkappa}$ und $a_{\lambda\iota}$ gehören, und diesen entgegensetzt sind die zu $b_{\varkappa\mu}$ und $a_{\iota\lambda}$ gehörigen Perioden. Aus der Vergleichung der Reihen (3) und (1) entsteht somit das Resultat: das Integral (U_1) über U_1 ist gleich dem (U) über U genommen plus der Summe der Perioden, welche zu den in R_1 zwischen u_2 und u_1 stehenden Uebergängen a oder b gehören. Addiren wir das Integral über u, so entsteht in (u U) die Periode [u] und in $(u\,U_1)$ eine neue, auf W_1 bezügliche Periode, die $[u]_1$ sei, und es ist $[u]_1$ gleich [u] plus der Summe derjenigen Perioden $[a_{\iota\lambda}]$, $[a_{\lambda\iota}]$, $[b_{\varkappa\mu}]$, $[b_{\mu\varkappa}]$, deren Uebergänge $a_\iota\,a_\lambda$, $a_\lambda\,a_\iota$, $b_\varkappa\,b_\mu$, $b_\mu\,b_\varkappa$ in R_1 zwischen u_2 und u_1 stehen.

Setzt man also $[a_{\lambda\iota}] = [a]$, $[b_{\mu\varkappa}] = [b]$, so ist

$$[u] = [u]_1 + \delta\,[a] + \varepsilon\,[b]$$

wo δ und ε, 0, 1 oder -1 sind.

---

1) Die Reihe (2) entsteht aus R_1, indem man nach links geht.

Wenn nun die Reihe S_1 keine Trennungen mehr enthält, so sind die $[u]_1$, wie gezeigt werden wird (§ 7), alle $= 0$. Sind aber noch Trennungen da, so seien c und d zwei sich trennende Buchstaben. Dann kann man durch ein Verfahren, das dem ganz analog ist, durch welches R_1 und W_1 aus R_0 und W_0 hergeleitet wurden, indem man noch die Uebergänge c und d öffnet, R_2 und W_2 aus R_1 und W_1 ableiten und findet dann

$$[u]_1 = [u]_2 + \zeta\,[c]_1 + \vartheta\,[d]_1$$

wobei $[u]_2$ ein Integral bezeichnet über u plus dem über einen Weg U_2, der aus R_2 gerade so abgeleitet ist, wie U_1 aus R_1; und wo die Zahlen ζ, ϑ nur 1, -1, oder 0 sein können.

Wenn nöthig kann man auf diese Art weiter gehen bis zu einem Wege W_ϱ, für den die zugehörigen Reihen R_ϱ oder S_ϱ keine Trennungen mehr enthalten. Sind dabei nach und nach die Uebergänge a, b, c ... m geöffnet worden, so drücken sich die Perioden alle linear und ganzzahlig aus durch 2ϱ Integrale [a], [b], $[c]_1$, $[d]_1$, ... $[l]_{\varrho-1}$, $[m]_{\varrho-1}$ und durch $\nu\sigma - (\nu - 1) - 2\varrho$ Grössen, die sich auf diejenigen Uebergänge beziehen, deren Namen in S_ϱ noch vorkommen. Ist u einer von ihnen, so ist die betreffende Grösse $[u]_\varrho$ gleich dem über den Uebergang u genommenen Integral plus dem Integrale über einen Weg U_ϱ, der aus der Buchstabengruppe $\mathfrak{U}_\varrho$ zwischen u_2 und u_1 in R_ϱ entsteht, indem man nur die in W_ϱ geöffneten und durchlaufenen Uebergänge berücksichtigt. Es wird gezeigt werden (§ 7), dass diese $[u]_\varrho$ alle gleich Null sind. (Satz VII.)

Da $(W_0) = (ABCD)$ und $(W_1) = (A\,a_\iota\,\lambda\,D\,b_{\mu\varkappa}\,C\,a_{\lambda\iota}\,B\,b_{\varkappa\mu})$ ist, so ist auch $(W_1) = 0$ und folglich ist auch weiter $(W_2) = 0 \ldots (W_\varrho) = 0$.

[In unserem Beispiel sind f und n in R_0 getrennt. Somit wird zunächst $[f] = (f\,u')$, $[n] = (n\,b\,b'\,s'\,d\,t\,p\,u\,u') = (n\,s'\,d\,t\,p)$ und

$$\begin{aligned} R_1 = {} & p_1\,p_2\,f_1\,f_2\,o_1\,m_2\,v_1\,u_2\,u_1\,p_2\,p_1\,t_2\,t_1\,q_2\,e_1\,d_2\,d_1\,g_2\,l_1\,k_2\,s_1\,s_2\,b_1\,b_2 - \\ & k_1\,i_2\,r_1\,r_2\,c_1\,b_2\,b_1\,c_2\,i_1\,n_2\,n_1\,l_2\,u_1\,u_2\,g_1\,f_2\,f_1\,e_2\,n_1\,n_2\,q_1\,s_2\,s_1\,v_2\,d_1\,d_2 - \\ & - m_1\,h_2\,t_1\,t_2\,a_1\,a_2\,h_1\,o_2, \end{aligned}$$

worin die geöffneten Uebergänge fett gedruckt sind. Diese Reihe enthält keine Trennungen mehr, so dass die Operation beendet ist. Es findet sich hier z. B.

$$[q]_1 = [q] - [f]$$
$$[g]_1 = [g] - [n].]$$

§ 6.

In der Reihe R_0 kommen alle $\nu\sigma$ Buchstaben, die Namen sämmtlicher Uebergänge vor, daher in S_0 noch die $\nu\sigma - (\nu - 1)$, welche nicht fundamental sind; in S_1 fehlen noch a und b, in S_2 weiter c und d, ... bis in S_ϱ, das keine Trennungen mehr enthält, die 2ϱ Buchstaben a, b, ... l, m fehlen, und also nur noch $\nu\sigma - (\nu - 1) - 2\varrho$ vorkommen. Man könnte denken beim Fortschreiten von S_0 zu S_ϱ verschwänden einmal sämmtliche Uebergänge eines Cyklus oder eines Umganges aus einer der Reihen S. Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies nicht der Fall ist. Da die Uebergänge eines Cyklus oder eines Umganges einen geschlossenen Weg bilden, in dem jeder Uebergang nur einmal vorkommt, so können nicht alle Uebergänge eines Cyklus oder eines Umganges fundamental sein (siehe den Satz I auf Seite 205) und also in S_0 fehlen. Gesetzt es sei bewiesen, dass von jedem Cyklus und von jedem Umgange in S_0 S_1 S_2 .. $S_\varkappa$ mindestens ein Uebergang vorkomme. Wenn nun in $S_{\varkappa+1}$ die sämmtlichen Uebergänge eines Cyklus fehlten, so könnte, da beim Fortschreiten von $S_\varkappa$ zu $S_{\varkappa+1}$ zwei Buchstaben fortfallen, in $S_\varkappa$ entweder nur ein oder höchstens zwei Buchstaben aus jenem Cyklus vorhanden gewesen sein. Wenn in $S_\varkappa$ nur einer p vorkömmt und es ist p q r .. x y z der geschlossene Weg des Cyklus, von dem die Uebergänge q r ... y z in $W_\varkappa$ schon geöffnet sind, so stehen in unserer Verzweigungstafel, in der Reihe, welche den Cyklus enthält, in den Zeilen, abgesehen von der Ordnung die folgenden Gruppen von je zwei Buchstaben: $p_1\, z_2$, $q_1\, p_2$, $r_1\, q_2$, ... $y_1\, x_2$, $z_1\, y_2$.

Beginnt man die Herstellung von $R_\varkappa$ bei p, so kommt man nach der Regel des § 4 Seite 211 zu z_2, springt zu z_1, rechts davon steht y_2, das einen Sprung nach y_1 veranlasst. Zu dessen Rechten steht x_2 .... schliesslich kommt man zu q_2, springt nach q_1 neben dem rechts p_2 sich findet. Also sieht der betreffende Theil von $R_\varkappa$ so aus: $p_1\, z_2\, z_1\, y_2\, y_1$ ... $q_2\, q_1\, p_2$.

Wenn man hieraus $S_\varkappa$ bildet, so sind die offenen Uebergänge q r ... y z fortzulassen und es bleibt $S_\varkappa = \ldots p_1\, p_2 \ldots$.

Weil hier die beiden p ungetrennt neben einander stehen, können sie durch den Fortschritt zu $S_{\varkappa+1}$ und den weiteren Reihen auch nicht fortfallen.

Sind aber in $S_\varkappa$ noch zwei Uebergänge p und t aus dem Cyklus vorhanden und ist er p q . . s t u . . . y z, so stehen in der Verzweigungstafel in den einzelnen Zeilen, von der Ordnung abgesehen, die Gruppen $p_1 z_2$, $q_1 p_2$, ... $t_1 s_2$, $u_1 t_2$, ... $z_1 y_2$. Beginnt man mit p_1, so wird man zuerst erhalten $p_1 z_2 z_1 y_2 y_1 . . u_2 u_1 t_2$, weil die Uebergänge u . . . y z schon geöffnet sind. Von t_2 kommt man dann durch eine Reihe anderer Buchstaben auch sicher einmal zu t_1 und dann folgt die Reihe $t_1 s_2 s_1$ .... $q_2 q_1 p_2$, so dass

$$R_\varkappa = p_1 z_2 z_1 \; y_2 y_1 . . u_2 u_1 t_2 . . . . . t_1 \; s_2 s_1 . . . q_2 q_1 p_2 . . . .$$

und

$$S_\varkappa = p_1 t_2 . . . t_1 p_2 . . . .$$

wird. Da die beiden Buchstaben p und t sich also in $S_\varkappa$ nicht trennen, können sie auch aus $S_{\varkappa+1}$ nicht verschwunden sein. Wenn es sich statt um einen Cyklus um den Umgang p q . . s t u . . . y z handelte, so stünden in unserer Tafel in je einer Zeile, abgesehen von der Ordnung, die Gruppen $q_2 r_1$, . . . $s_2 t_1$, $t_2 u_1$, . . . $y_2 z_1$, $z_2 p_1$, $p_2 q_1$, indem z. B. q_2 in einem Fach rechts und in dem nächstfolgenden derselben Zeile r_1 links steht u. s. w. Wenn nun alle Uebergänge des Umganges bis auf p geöffnet sind, so wird

$$R_\varkappa = p_2 q_1 q_2 r_1 r_2 . . . s_1 s_2 t_1 t_2 u_1 . . y_2 z_1 z_2 p_1 . . . .$$
$$S_\varkappa = p_2 p_1 . . . . .$$

Ist aber auch t noch nicht geöffnet, so wird

$$R_\varkappa = p_2 q_1 q_2 . . s_1 s_2 t_1 . . . t_2 u_1 u_2 . . z_1 z_2 p_1 . . . .$$
$$S_\varkappa = p_2 t_1 . . . t_2 p_1 . . . .$$

und weder in diesem noch im vorigen Falle ist ein Verschwinden von p t bez. p möglich. (VIII) Also muss jede Reihe $S_0 . . . S_\varrho$ von jedem Cyklus und jedem Umgang mindestens noch einen Buchstaben enthalten.

Man kann. aus den eben gebildeten Reihen noch folgendes entnehmen: Lässt man aus der Bezeichnung des Cyklus oder des Umganges die Namen derjenigen Uebergänge fort, die in $W_\varkappa$ schon geöffnet sind, also in $S_\varkappa$ nicht mehr vorkommen, und ist dann der Cyklus bez. Umgang gegeben durch p t . . . ., so tritt in $S_\varkappa$ auf: im Falle eines Cyklus

die Gruppe $p_1 t_2$, und bei einem Umgang die $p_2 t_1$. Wenn also in $S_\varkappa$ die Gruppe $p_1 p_2$ oder $p_2 p_1$ vorhanden ist, so folgt, dass alle Uebergänge des Cyklus bez. des Umganges, dem p angehört, schon in $W_\varkappa$ geöffnet sind, denn andernfalls stände neben p_1 bez. p_2 ein anderer Buchstabe als p_2 oder p_1. (Satz IX.)

Wir wollen nun die τ Cyklen aber (des folgenden wegen) rückwärts durchlaufen und die ν Umgänge in irgend einer Ordnung als die geschlossenen Wege T_1, T_2 .. T_ω bezeichnen, indem wir $\tau + \nu = \omega$ setzen. Wenn man in den Buchstabenreihen, welche diese Wege darstellen, diejenigen Buchstaben fortlässt, welche in $S_\varkappa$ nicht mehr vorkommen, so kann nach dem eben bewiesenen keine Reihe ganz wegfallen. Die so entstehenden ω „reducirten“ Gruppen seien $U_1^{(\varkappa)} U_2^{(\varkappa)} \ldots U_\omega^{(\varkappa)}$. Von ihnen nehme man eine beliebige Zahl heraus, deren Gesammtheit G sei. (X) Dann gibt es Buchstaben, die in G nur einmal vorkommen. Die Gruppen, welche G bilden, zerfallen in solche, die aus Cyklen entstanden sind — ihre Gesammtheit sei C — und solche aus Umgängen, deren Gesammtheit U sei. Weil jeder Cyklus und jeder Umgang nur verschiedene Buchstaben enthält und jeder Uebergang nur einem Cyklus und einem Umgang angehört, so ist der Satz bewiesen, wenn G nur aus C oder nur aus U besteht.

Andernfalls aber kann auch in Folge dessen ein Buchstabe nur dadurch zweimal in G vorkommen, dass er C und U angehört. Ist also der Satz falsch, so ist jeder in C auftretende Buchstabe auch in U und umgekehrt, und die Gruppen C und U können sich nur durch die Einordnung der Buchstaben in die Reihen unterscheiden. Es ist zu zeigen, dass diese Annahme unmöglich ist. Sei p ein Buchstabe aus C und p q . . . der reducirte Cyklus, dem er angehört. Dann beginnt $S_\varkappa$ mit $p_1 q_2$ nach dem auf Seite 218 bewiesenen. Das q gehört aber auch zu U und dort zu einem Umgange q r . . , . Desswegen enthält $S_\varkappa$ auch die Gruppe $q_2 r_1$; r gehört in C zu einem Cyklus r s . . ., wesswegen $S_\varkappa$ die Gruppe $r_1 s_2$ enthalten muss u. s. w. $S_\varkappa$ hat also die Form $p_1 q_2 r_1 s_2 \ldots$, wobei man aus Buchstaben, die G angehören, nicht herauskommt. Da aber nach Art seiner Bildung $S_\varkappa$ alle die Buchstaben enthalten muss, die in den $U_1^{(\varkappa)} \ldots U_\omega^{(\varkappa)}$ auftreten, so ist ein Widerspruch vorhanden, der sich entweder

so löst, dass G alle die $U^{(\varkappa)}$ umfasst, oder dass es in G Buchstaben gibt, die nur einmal vorkommen.

Hievon kann man folgende Anwendung machen. In $U_1^{(\varkappa)}$ kommt kein Buchstabe zweimal vor. Ist p einer der Buchstaben aus $U_1^{(\varkappa)}$, so gehört er noch einer anderen Reihe etwa $U_2^{(\varkappa)}$ an. Die beiden $U_1^{(\varkappa)}$ und $U_2^{(\varkappa)}$ enthalten mindestens einen Buchstaben q nur einmal, der dann noch in einer weiteren Reihe $U_3^{(\varkappa)}$ auftreten muss. Die drei Reihen $U_1^{(\varkappa)}$ $U_2^{(\varkappa)}$ $U_3^{(\varkappa)}$ enthalten wieder einen Buchstaben r nur einmal, der sich dann noch in einer Reihe $U_4^{(\varkappa)}$ finden muss u. s. w. Schliesslich enthalten die Reihen $U_1^{(\varkappa)}$ $U_2^{(\varkappa)}$ . . $U_{\omega-1}^{(\varkappa)}$ einen Buchstaben z nur einmal und der muss dann noch in $U_\omega^{(\varkappa)}$ vorkommen. Die Buchstaben p q . . . z sind natürlich alle verschieden und ihre Zahl ist $\omega-1$; sie kommen alle in den $U^{(\varkappa)}$ und folglich auch in $S_\varkappa$ vor, das, wie wir sahen, $\nu\sigma - (\nu-1) - 2\varkappa$ Buchstaben enthält.

Also muss, für $\varkappa = 0, 1, \ldots \varrho$

$$\nu\sigma - (\nu-1) - 2\varkappa \geqq \omega-1$$

und besonders, für $\varkappa = \varrho$,

XI) $$2\varrho \leqq \nu\sigma - \nu - \omega + 2$$

sein.

§ 7.

Die Reihe S_ϱ enthält keine Trennungen gleicher Buchstaben mehr, daher kommt es sicher mindestens einmal vor, dass zwei gleiche Buchstaben neben einanderstehen. Kommt in S_ϱ die Gruppe $n_1 n_2$ vor, so gehört nach dem Resultate IX) auf Seite 218 n einem Wege T, etwa T_1 an, der ein Cyklus ist; ist dagegen die Gruppe $n_2 n_1$, so ist der Weg T_1 ein Umgang, und zwar werden dann alle anderen Uebergänge, aus welchen T_1 ausser n noch besteht, in W_ϱ schon durchlaufen. Ist $S_\varrho = \overline{\mathfrak{A}}\, n_1 n_2$ und gehört n dem Cyklus an $n\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}$, so ist

$$R_\varrho = \mathfrak{A}\, n_1\, \mathfrak{k}_2\, \mathfrak{k}_1 \ldots . \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_1\, n_2,$$

wo $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}$ Gruppen von Buchstaben vorstellen.

Man leite nun eine neue Reihe ab, $R_{\varrho+1}$, indem man das Durchlaufen von n jetzt gestattet und also in der Tafel von n_1 direct zu n_2 überspringt. Dann wird

$$R_{\varrho+1} = \mathfrak{A}\, n_1\, n_2$$

und die zugehörige Reihe $S_{\varrho+1}$ wird, durch Weglassen von n,

$$S_{\varrho+1} = \overline{\mathfrak{A}}.$$

Da $U_1^{(\varrho)}$ hier einfach n war, so fällt es mit n ganz weg, wenn man diesen Buchstaben aus den Reihen $U^{(\varrho)}$ fortlässt und so neue Reihen $U^{(\varrho+1)}$ herstellt. Es wäre möglich, dass mit $U_1^{(\varrho)}$ hiebei noch eine zweite Reihe $U_2^{(\varrho)}$ wegfiele, die dann auch nur n sein könnte und, weil T_1 ein Cyklus sein sollte, nun einem Umgange entsprechen müsste. Dann müsste aber nach dem Resultat IX auf Seite 218 in S_ϱ neben n_2 sofort wieder n_1 stehen und folglich die ganze Reihe S_ϱ einfach $n_1\, n_2$ sein. Aber in diesem Falle könnten neben den Reihen $U_1^{(\varrho)}$ und $U_2^{(\varrho)}$ keine weiteren existiren, weil ja sonst deren, von n verschiedene, Buchstaben sich in S_ϱ finden müssten. Es gäbe also dann nur einen Cyklus, was nicht angeht, weil ja mindestens zwei Verzweigungspunkte vorhanden sein müssen. Also kann mit n nur $U_1^{(\varrho)}$ fortfallen, während die $\omega - 1$ anderen $U^{(\varrho)}$ in neue Reihen $U_2^{(\varrho+1)} \ldots U_\omega^{(\varrho+1)}$ übergehen. Der Reihe $R_{\varrho+1}$ entspricht ein Weg $W_{\varrho+1}$, der aus $R_{\varrho+1}$ hervorgeht, wenn man, unter α irgend einen der geöffneten Uebergänge a b . . l m n verstanden, für $\alpha_\iota\ \alpha_\varkappa\ \alpha_{\iota\varkappa}$ setzt.

Entspricht der Gruppe $\mathfrak{A}$ durch diese Substitution der Weg A, so wird

$$W_\varrho = A\, \mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\, \mathfrak{a}'$$

und

$$W_{\varrho+1} = A\, n.$$

Weil nach unserer Annahme T_1 der rückwärts durchlaufene Cyklus sein soll, ist es $= \mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\, \mathfrak{a}'\, n'$. Fügt man nun in W_ϱ hinter A den Weg $n\, n'$ ein, so zerfällt W_ϱ in $W_{\varrho+1}$ und T_1, was durch die Gleichung

$$W_\varrho = W_{\varrho+1} + T_1$$

angedeutet sei.

Gesetzt aber $U_1^{(\varrho)} = n$ entspreche einem Umgange $T_1 = n\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}$, so ist $R_\varrho = \mathfrak{A}\, n_2\, \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{k}_1\, \mathfrak{k}_2\, n_1$, $S_\varrho = \overline{\mathfrak{A}}\, n_2\, n_1$.

Dann folgt, wenn man n durchlaufen darf, $R_{\varrho+1} = \mathfrak{A}\, n_2\, n_1$, $S_{\varrho+1} = \mathfrak{A}$ und $U_1^{(\varrho)}$ fällt mit n fort. Würde damit noch eine zweite Reihe $U_2^{(\varrho)}$ wegfallen, das dann einem Cyklus entspräche, so wäre $S_\varrho = n_2\, n_1$ und es würde nur ein Cyklus existiren. Somit wird auch jetzt mit n nur $U_1^{(\varrho)}$ fortfallen, während die andern $\omega - 1$ Reihen $U^{(\varrho)}$ in ebensoviele Reihen $U^{(\varrho+1)}$ übergehen. Der Weg $W_{\varrho+1}$ wird $A\, n'$, der $W_\varrho = A\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}$, $T_1 = n\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}$, also ist auch hier $W_\varrho = W_{\varrho+1} + T_1$.

Die Reihe $R_{\varrho+1}$ entsteht aus unserer Tafel genau nach dem in § 4 Seite 211 geschilderten Verfahren, nur mit dem Unterschiede, dass nicht nur bei den Buchstaben a b .. l m und den fundamentalen, sondern auch noch bei n Sprünge stattfinden. Man kann also auf $R_{\varrho+1}$, $S_{\varrho+1}$, $W_{\varrho+1}$ die obigen Schlüsse anwenden. Besteht demnach $S_{\varrho+1}$ nur aus $o_\iota\, o_\varkappa$, so gibt es nur noch zwei Reihen $U^{(\varrho+1)}$, die zwei Wegen T_2 und T_3 entsprechen, von welchen der eine der rückwärts durchlaufene Cyklus $o\, \mathfrak{m}\, \mathfrak{n} \ldots \mathfrak{p}$, der andere der Umgang $o\, \mathfrak{r}\, \mathfrak{f} \ldots \mathfrak{x}$ sei, welchen beiden o angehört und in welchen die mit deutschen Buchstaben bezeichneten Uebergänge schon geöffnet sind.

Ist dann $S_{\varrho+1} = o_1\, o_2$, so ist

$$R_{\varrho+1} = o_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{m}_2\, \mathfrak{m}_1\, o_2\, \mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2$$

$$W_{\varrho+1} = \mathfrak{p}' \ldots \mathfrak{m}'\, o'\, o\, \mathfrak{r} \ldots \mathfrak{x}$$

$$= T_2 + T_3.$$

Bei der Annahme $S_{\varrho+1} = o_2\, o_1$ folgt für $W_{\varrho+1}$ das nämliche. Dann ist also $\omega = 3$ und S_ϱ enthält nur die beiden Buchstaben n und o. Kommen nun in $S_{\varrho+1}$ ausser o noch andere Buchstaben vor, während $o_1\, o_2$ nebeneinander stehen, so kann man $S_{\varrho+2}$, $W_{\varrho+2}$, $R_{\varrho+2}$ ableiten, indem man das Durchlaufen von o gestattet. Dann fällt $U_2^{(\varrho+1)}$ fort, es entstehen $\omega - 2$ andere Reihen $U_3^{(\varrho+2)} \ldots U_\omega^{(\varrho+2)}$ und man kann setzen

$$W_{\varrho+1} = W_{\varrho+2} + T_2.$$

In dieser Weise kann man weiter gehen, bis man zu einer Reihe $S_{\varrho+\mu}$ kommt, die nur noch e i n e n Buchstaben enthält, für welche nur noch zwei Reihen $U^{(\varrho+\mu)}$ existiren und

$$W_{\varrho+\mu} = T_{\mu+1} + T_{\mu+2}$$

ist. Dann sind aus S_ϱ nach und nach μ Buchstaben weggefallen, einer ist in $S_{\varrho+\mu}$ noch übrig geblieben, so dass sicher $\mu+1$ in S_ϱ vorhanden waren. Da aber $\mu+2 \leqq \omega$ sein muss, weil ja die $T_1 \ldots T_{\mu+2}$ zu den ω Wegen T gehören, so folgt

$$\mu+1 = \nu\sigma - (\nu-1) - 2\varrho \leqq \omega - 1$$

und dies gibt mit dem Resultate XI der Seite 220 die Gleichung

XII) $$\nu\sigma - (\nu-1) - 2\varrho = \omega - 1$$

$$2\varrho = \nu\sigma - \nu - \omega + 2 = \nu\sigma - 2\nu - \tau + 2.^1)$$

Bezeichnet man mit τ_λ die Anzahl der zum Verzweigungspunkt w_λ gehörigen Cyklen, so ist $\tau = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \tau_\lambda$ und also, da $\nu\sigma = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \nu$ ist,

XII) $$2\varrho = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} (\nu - \tau_\lambda) - 2(\nu-2).$$

Was nun die Perioden betrifft, die oben zu Ende des § 5 mit $[u]_\varrho$ bezeichnet wurden, so ist zunächst $[n]_\varrho = (n) + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}\,n)$ und dies ist $= o$, weil das über einen ganzen Cyklus genommene Integral erster Gattung $= o$ ist, da der Cyklus auf den Verzweigungspunkt zusammengezogen werden kann. Wenn aber u von n verschieden ist, so sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,u_1\,\mathfrak{C}\,u_2\,\mathfrak{D}$ und es bezeichnen B, C, D die aus $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ entstehenden Wege, wenn man die Regel anwendet, die W_ϱ aus R_ϱ entstehen lässt. Dann hat man

$$\begin{aligned}[u]_\varrho &= (u) + (D\,\mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}'\,B) \\ &= (u) + (D\,n\,B) + (n'\,\mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}') \\ &= (u) + (D\,n\,B).\end{aligned}$$

Wenn man aber $[u]_{\varrho+1}$ aus $R_{\varrho+1}$ so ableitet, wie eben $[u_\varrho]$ aus R_ϱ abgeleitet wurde, nur mit Anwendung der Substitutionen die $R_{\varrho+1}$ in $W_{\varrho+1}$ überführen, so wird $[u]_{\varrho+1} = (u) + (D\,n\,B)$, d. h. es ist $[u]_\varrho = [u]_{\varrho+1}$ und dasselbe Resultat ergibt sich, wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}\,n$ einen Umgang darstellt. Also ist $[o]_\varrho = [o]_{\varrho+1} = o$ und indem man so weiter schliesst, zeigt man, dass alle $[u]_\varrho = o$ sind, dass sich folglich alle Perioden eines

1) Ein anderer Beweis findet sich in § 10.

Integrales erster Gattung linear und ganzzahlig durch die 2ϱ Perioden [a], [b], $[c]_1 \ldots [l]_{\varrho-1}$, $[m]_{\varrho-1}$ ausdrücken. (Satz XIII.)

Wenn es sich um die praktische Herstellung dieser „normalen“ oder „kanonischen“ Perioden handelt, so kann man folgendes beachten. Offenbar braucht man in die Buchstabenreihen und in die Verzweigungstafel ausser den fundamentalen Buchstaben nur die a, b, ... l, m aufzunehmen, denn die übrigen liefern Perioden gleich Null. Die Namen dieser letzteren treten allein in S_ϱ auf und können wie in § 6 zu Ende angegeben, aus den Reihen $U^{(\varrho)}$ abgeleitet werden. Wenn dann n in $U_1^{(\varrho)}$ nur einmal vorkommt, so kommt es auch in T_1 nur einmal vor, dafür aber in T_2. Tritt in $U_1^{(\varrho)}$ und $U_2^{(\varrho)}$ der Buchstabe p nur einmal auf, so findet er sich auch in T_1 und T_2 nur einmal, dagegen noch in T_3 u. s. w. Man kann nun zeigen (§ 10), dass wenn man umgekehrt aus den $T_1 \ldots T_\omega$ $\omega - 1$ Buchstaben wie angegeben bestimmt, diese sich nicht zu den kanonischen Perioden eignen, sondern nur die übrigen, von welchen noch $\nu - 1$ die fundamentalen Uebergänge liefern. Man braucht also auch jene $\omega - 1$ nicht in die Verzweigungstafel aufzunehmen.

In dem Beispiel von Clebsch und Gordan ist $\nu = 4$, $\sigma = 12$, $\tau = 36$, $\omega - 1 = 39$, $2\varrho = 6$. Man reicht hier aus mit der Tafel

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_1	a_1		e_1					q_2				
y_2	a_2	c_1					n_1	q_1	r_1	t_1		
y_3		c_2							r_2		v_1	x_1
y_4			e_2				n_2			t_2	v_2	x_2

womit, und mit den fundamentalen Buchstaben a c e

$$R_0 = a_1\, a_2\, c_1\, c_2\, r_2\, v_1\, x_1\, c_2\, c_1\, n_1\, q_1\, r_1\, t_1\, a_2\, a_1\, e_1\, e_2\, n_2\, t_2\, v_2\, x_2\, e_2\, e_1\, q_2$$

mit

$$S_0 = r_2\, v_1\, x_1\, n_1\, q_1\, r_1\, t_1\, n_2\, t_2\, v_2\, x_2\, q_2$$

wird. n und q trennen sich, also sind zwei der kanonischen Perioden

$$[n] = (n\, e'\, a) \qquad [q] = (q\, a),$$

dann wird

$$R_1 = q_2\, q_1\, r_1\, t_1\, a_2\, a_1\, e_1\, e_2\, n_2\, n_1\, q_1\, q_2\, a_1\, a_2\, c_1\, c_2\, r_2\, v_1\, x_1\, c_2\, c_1\, n_1\, n_2\, t_2\, v_2\, x_2\, e_2\, e_1$$
$$S_1 = r_1\, t_1\, r_2\, v_1\, x_1\, t_2\, v_2\, x_2.$$

Hier trennen sich r und t und liefern das zweite Periodenpaar

$$[r]_1 = (r\, c'\, n\, e'\, q') \qquad [t]_1 = (t\, e'\, q').$$

Indem wir nun die Substitutionen q' für $q_2\, q_1$ u. s. w. der Kürze wegen schon bei R_2 eintreten lassen, wird

$$R_2 = q'\, r\, v_1\, x_1\, c'\, n\, t'\, a'\, e\, n'\, q\, a\, c\, r'\, t\, v_2\, x_2\, e'$$
$$S_2 = v_1\, x_1\, v_2\, x_2,$$

woraus das letzte Periodenpaar

$$[v]_2 = (v\, e'\, q') \qquad [x]_2 = (x\, e'\, q'\, r)$$

folgt und die Operation beendet ist.

§ 8.

Wir gehen nun zur Ableitung zweier von Riemann gegebener Gleichungen über und schicken ihr einen Satz voraus.

Es sei v das Integral einer rationalen Function ψ von x und y, φ eine andere rationale Function von x und y und es werde $\varphi\, dx$ mit du bezeichnet. Es werde nun $\int v\, du$ genommen über einen zusammenhängenden Weg MN, verglichen mit dem, welches über den ebenfalls zusammenhängenden Weg MPP'N genommen ist, wobei in jedem Punkte der betreffenden Wege für v derjenige Werth zu setzen ist, den man erhält, indem man $\int \psi\, dx$ über den Weg bis zu jenem Punkt erstreckt. Nennen wir $\int \psi\, dx$ über den zweiten Weg MPP'N, bis zu einem variabeln Punkt erstreckt w, so ist $v = w$, wenn der Punkt in M oder N gelegen ist. Somit unterscheiden sich die Integrale $\int v\, du$ und $\int w\, du$ um $\int w\, du$ erstreckt über PP'. Ist α ein Punkt von P, so wird er in dem Wege PP' zweimal, in verschiedenen Richtungen, berührt. Folgt auf α bei P der Wegtheil Q, so kommt bei P' vor α der Wegtheil Q'. Die beiden Werthe von w in α unterscheiden sich also um $\int \psi\, dx$ genommen über QQ' und

sind also gleich. Da ferner du für den Punkt α in P einen entgegengesetzten Werth hat von dem den es in demselben Punkt von P′ erhält, so ist $\int w\,du$ über PP′ genommen gleich Null und somit $\int v\,du$ über MN $= \int v\,du$ über MPP′N. (Satz XIV.)

Indem wir jetzt wieder unter φ und ψ Integranden erster Gattung verstehen, wollen wir $\int v\,du$ über die verschiedenen Wege $W_\varkappa$ nehmen und die Werthe vergleichen.

Es sei $R_0 = \mathfrak{A}\,a_\iota\,\mathfrak{B}\,b_\varkappa\,\mathfrak{C}\,a_\lambda\,\mathfrak{D}\,b_\mu$ und die den Gruppen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ entsprechenden Theile von W_0 bez. A B C D, dann ist $W_0 =$ A B C D, $W_1 =$ A $a_{\iota\lambda}$ D $b_{\mu\varkappa}$ C $a_{\lambda\iota}$ B $b_{\varkappa\mu}$ (siehe § 5, Seite 213). Setzen wir der Kürze wegen $a_{\lambda\iota} = a$, $b_{\mu\varkappa} = b$, so ist $\int v\,du$ über W_0 gleich dem über A B b′ b C D, wie der obige Satz lehrt; und indem man diesen Satz wiederholt anwendet, zeigt sich, dass der Weg W_0 und der

$$V = ABb'.bCaBb'.bB'A'.bB'a'C'b'.bCaBb'Aa'D$$

dem $\int v\,du$ denselben Werth ertheilen.

Der letzte Theil bCaBb′Aa′D ist der geschlossene Weg W_1, nur mit anderem Anfang als vorhin, der erste Theil sei mit U bezeichnet, so dass der ganze Weg $V = U\,W_1$ ist. Der Werth, den v in irgend einem unbestimmten Punkte ζ des Weges V hat, d. h. der Werth von $\int \psi\,dx$ vom Anfang von A bis zu ζ über jenen Weg erstreckt sei $v(V\zeta)$. Er hängt davon ab, ob ζ in U oder in W_1 liegt. Bezeichnen wir den Punkt ζ für den ersten Fall mit ξ, für den zweiten mit η, so ist für letzteren $v(V\eta) = \int \psi\,dx$ über U plus dem über W_1 bis zum Punkte η genommen. Der erste Theil ist Null, weil jeder Wegtheil in U zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird, der zweite sei mit $v(W_1\eta)$ bezeichnet, so dass also $v(V\eta) = v(W_1\eta)$ und somit

$$\int_{W0} v\,du = \int_U v(U\xi)\,du + \int_{W1} v(W_1\eta)\,du = \int_U v(U\xi)\,du + \int_{W1} v\,du.$$

ist, wobei die den Integralen angehängten Buchstaben die Wege angeben, über welche sie zu nehmen sind.

Der Weg U enthält die geschlossenen Wege $A\,B\,b' = B'$ und $b\,C\,a\,B\,b' = A$ und ist $= B'\,A\,B\,A'$, so dass das erste der obigen Integrale in 4 Theile zerfällt, die sich auf die Wege B', A, B, und A' beziehen. Sind $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ 4 Punkte auf diesen Wegen und sind $v(\alpha)$, $v(\beta)$, $v(\gamma)$, $v(\delta)$ die entsprechenden Werthe von $v(U\xi)$, $du_\alpha \ldots du_\delta$ die von $\varphi\,dx$, so wird

$$\int_U v(U\xi)\,du = \int_{B'} v(\alpha)\,du_\alpha + \int_A v(\beta)\,du_\beta + \int_B v(\gamma)\,du_\gamma + \int_{A'} v(\delta)\,du_\delta$$

Wenn aber die Punkte α, γ einerseits und β, δ andrerseits zu demselben x gehören, so ist $du_\alpha = -du_\gamma$, $du_\beta = -du_\delta$ und die rechte Seite

$$= \int_B \Big(v(\gamma) - v(\alpha)\Big)\,du_\gamma + \int_{A'} \Big(v(\delta) - v(\beta)\Big)\,du_\delta.$$

$v(\gamma) - v(\alpha)$ ist $\int \psi\,dx$ genommen über einen Theil I' von B', der mit α beginnt, über A und den anschliessenden Theil von B bis γ. Dieser ist aber I', so dass

$$v(\gamma) - v(\alpha) = \int_A \psi\,dx = \int_A dv$$

ist. Ebenso ist

$$v(\delta) - v(\beta) = \int_B \psi\,dx = \int_B dv,$$

so dass schliesslich

$$\int_U v(U\xi)\,du = \Big(\int_B du\Big)\Big(\int_A dv\Big) + \Big(\int_{A'} du\Big)\Big(\int_B dv\Big)$$

wird.

Die geschlossenen Wege A und B sind diejenigen, welche man braucht, um die oben Seite 215 mit [a] und [b] bezeichneten Perioden zu berechnen. Nennt man diese Perioden für die Function u wie eben [a] und [b], die für v dagegen [A] und [B], so ergibt sich schliesslich

$$\int_{W_0} v\,du = \int_{W_1} v\,du - [a]\,[B] + [b]\,[A]$$

Eine ähnliche Gleichung findet man zwischen den über W_1 und W_2 genommenen Integralen u. s. w. Bezeichnet man immer mit den in

eckigen Klammern gesetzten grossen Buchstaben Perioden des Integrals $\int \psi \, dx$, die über dieselben Wege genommen sind, wie die mit kleinen Buchstaben bezeichneten von $\int \varphi \, dx$, so kommt schliesslich die Gleichung

$$\int_{W_0} v \, du = - [b]\,[A] + [a] \cdot [B] - [d]_1\,[C]_1 + [c]_1\,[D]_1 + \ldots - [m]_{\varrho-1}\,[L]_{\varrho-1} + [l]_{\varrho-1}\,[M]_{\varrho-1} + \int_{W_\varrho} v \, du.$$

Der Weg W_0, der geschlossen ist und nur aus fundamentalen Uebergängen besteht, hat nun nach dem Resultat III des § 2 die Form $\mathfrak{a}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{L}$, wenn $\mathfrak{a}$ einen fundamentalen Uebergang bezeichnet und $\mathfrak{R}$ wie $\mathfrak{L}$ geschlossene Wege sind, die $\mathfrak{a}$ nicht mehr enthalten. Enthalten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ einen andern fundamentalen Uebergang $\mathfrak{b}$, so muss jeder der beiden Wege ihn doppelt enthalten, dann kommt er aber in W_0 viermal vor, während er (siehe V Seite 212) nur zweimal auftritt. Also kann $\mathfrak{b}$ nur in $\mathfrak{R}$ oder in $\mathfrak{L}$ auftreten. Daher sind in W_0 keine Trennungen gleicher Buchstaben durch andere vorhanden und folglich muss W_0 die Form haben $\mathfrak{E}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'\,\mathfrak{F}$. Der Weg $\mathfrak{E}\,\mathfrak{F} = W_0'$ hat dann denselben Character und nach dem vorausgeschickten Satz XIV ist also

$$\int_{W_0} v \, du = \int_{W_0'} v \, du.$$

Indem man so successive weiter schliesst, findet sich Null als Werth von $\int_{W_0} v \, du$.

Mit den Bezeichnungen von § 7 ist aber $\int_{W_\varrho} v \, du$ gleich demselben Integral über den Weg $A\,n\,T_1$ bez. $A\,n'\,T_1$, also über $W_{\varrho+1}\,T_1$ genommen. Da $\int \varphi \, dx$ und $\int \psi \, dx$ über $W_{\varrho+1}$ genommen gleich Null sind, so findet man durch eine ähnliche Ueberlegung, wie sie vorhin bei dem Wege $V = U\,W_1$ angestellt wurde

$$\int_{W_\varrho} v \, du = \int_{W_{\varrho+1}} v \, du + \int_{T_1} v \, du.$$

Durch wiederholte Anwendung derselben Ueberlegung ergibt sich endlich

$$\int_{w_\varrho} v\,du = \sum_{\lambda=1}^{\omega} \int_{T_\lambda} v\,du.$$

so dass man erhält

XV)
$$-\sum_{\lambda=1}^{\omega} \int_{T_\lambda} v\,du = [A]\,[b] - [B]\,[a] + \ldots + \\ + [L]_{\varrho-1}\,[m]_{\varrho-1} - [M]_{\varrho-1}\,[l]_{\varrho-1}.$$

Entspricht nun T_λ einem Umgang, so umschliesst die zugehörige Curve C_0 (§ 1 Seite 204) entweder alle oder keinen Verzweigungspunkt, folglich ist v ausserhalb bez. innerhalb eine einwerthige, vom Wege unabhängige Function des Ortes, die keinen singulären Punkt hat und desshalb ist $\int_{T_\lambda} v\,du = 0$. Entspricht aber T_λ einem Cyklus des Verzweigungspunktes w_λ, so kann man den geschlossenen Weg ohne den Werth des Integrals zu ändern auf den wiederholt durchlaufenen Kreis um w_λ zusammenziehen. Da aber v und u allenthalben endliche Integrale sein sollen, so kann man in der Nähe von w_λ v nach positiven Potenzen von $(x-w_\lambda)^{1/\alpha}$ entwickeln, du aber kann, wenn es negative enthält, nur solche enthalten, deren Exponent $\geqq \frac{1}{\alpha} - 1$ ist, wobei α die Anzahl der Uebergänge im Cyklus ist. Das α mal über den erwähnten Kreis erstreckte Integral verschwindet somit. Ist der Verzweigungspunkt $x = \infty$, so hat man nur $\frac{1}{x}$ für $x - w_\lambda$ zu setzen, um das nämliche zu finden. So ergibt sich endlich die Riemann'sche Gleichung

$$[A]\,[b] - [B]\,[a] + [C]_1\,[d]_1 - [D]_1\,[c]_1 + \ldots \\ + [L]_{\varrho-1}\,[m]_{\varrho-1} - [M]_{\varrho-1}\,[l]_{\varrho-1} = 0. \qquad \text{(XVI)}$$

§ 9.

Die Gleichung XV oben gilt nicht nur wenn φ und ψ Integranden erster Gattung sind, sondern auch dann, wenn man, $x = \xi + i\eta$ setzend, $\Phi\,d\xi + \Psi\,d\eta$ für du und $\Phi_1\,d\xi + \Psi_1\,d\eta$ für dv schreibt, wenn

nur die 4 Functionen Φ, Ψ, Φ_1, Ψ_1 in den Punkten der vorkommenden Wege eindeutig als solche Functionen des Ortes gegeben sind, dass die über die Wege $T_1 \ldots T_\omega$ genommenen Integrale der beiden Ausdrücke du und dv Null sind. Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung, wenn man die Schlüsse des vorigen § unter diesen Annahmen wiederholt.

Wir machen davon eine Anwendung, um eine zweite von Riemann herrührende Gleichung zu beweisen, welche für die Convergenz der ϑ-Functionen wichtig ist. Es sei der in § 8 gebrauchte Integrand erster Gattung φ, wenn man ihn in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt $= \varphi_1 + i\varphi_2$, so ist $du = \varphi dx = \varphi_1 d\xi - \varphi_2 d\eta + i(\varphi_1 d\eta + \varphi_2 d\xi) = d\zeta + i d\vartheta$. Da φ_1 und φ_2 für jeden Punkt der x Ebene und jedes Element nur einen Werth haben und da $\int du = \int d\zeta + i \int d\vartheta$ über einen der Wege $T_1 \ldots T_\omega$ genommen Null liefert, so ist auch $\int d\zeta$ und $\int d\vartheta$ über einen solchen Weg genommen gleich Null. Die vorhin erwähnten Bedingungen sind also erfüllt und man darf in der Gl. XV der vorigen Seite für du setzen $d\vartheta$ und ζ für v.

An die Stelle der Grössen [a] und [A] treten nun $\int d\vartheta$ bez. $\int d\zeta$ über den Weg A genommen. Diese Integrale sind aber der Coefficient von i und der reelle Theil des $\int \varphi dx$, wenn dies über A erstreckt wird, d. h. es sind der Coefficient von i und der reelle Theil im Ausdruck der Periode [a]. Setzt man somit

$$[a] = \alpha' + i\alpha,$$

so ist in der fraglichen Gleichung für [a] zu setzen α und α' für [A]. Ist ebenso

$$[b] = \beta' + i\beta,$$

so treten β und β' an Stelle von [b] bez. [B]. Setzen wir weiter $[c]_1 = \gamma_1' + i\gamma_1, \ldots [l]_{\varrho-1} = \lambda'_{\varrho-1} + i\lambda_{\varrho-1}$, $[m]_{\varrho-1} = \mu'_{\varrho-1} + i\mu_{\varrho-1}$, so folgt hienach

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' + \gamma_1'\delta_1 - \gamma_1\delta_1' + \ldots + \lambda'_{\varrho-1}\mu_{\varrho-1} - \lambda_{\varrho-1}\mu'_{\varrho-1}$$

(XVII)
$$= -\sum_{\lambda=1}^{\omega} \int_{T_\lambda} \zeta d\vartheta.$$

In Bezug auf $\int \zeta \, d\vartheta$ gelten nun folgende Sätze:

1) Wenn der geschlossene Integrationsweg eine Curve ist, die in ihrem Innern keinen Verzweigungspunkt enthält, so ist in diesem Innern ζ als einwerthige Function des Ortes zu erklären und dann kann man beweisen,[1]) dass das Integral einen positiven Werth hat, wenn man bei der Integration die Curve so umläuft, dass das Innere zur Fortschreitungsrichtung auf der Curve so liegt, wie die η Axe zur ξ Axe. Liegt also, wie wir angenommen haben (§ 1), die η Axe rechts von der ξ Axe, so hat man die Curve so zu durchlaufen, dass man das Innere der Curve zur Rechten hat.

2) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei geschlossene Wege, die beide in demselben Punkt beginnen und enden. Dann ist $\int \zeta \, d\vartheta$ genommen über den Weg $\mathfrak{B}$ gleich demselben Integral, wenn man es über den Weg $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}$ nimmt. Das letztere zerfällt in die beiden Theile. das über $\mathfrak{A}$ und das über $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$. Für einen Punkt dieses letzteren Weges ist für ζ derjenige Werth zu setzen, der folgt, wenn man $\int d\zeta$ vom Anfang von $\mathfrak{A}$ an über den Weg $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}$ erstreckt. Dieser Werth ist aber gleich $\int\limits_{\mathfrak{A}} d\zeta$ plus dem Integral $\int d\zeta$ vom Beginn von $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ bis zu jenem Punkt genommen. Bezeichnen wir diesen letzteren Werth mit ζ_1, $\int\limits_{\mathfrak{A}} d\zeta$ mit ζ_0, so wird

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} \zeta \, d\vartheta = \int\limits_{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta \, d\vartheta = \int\limits_{\mathfrak{A}} \zeta \, d\vartheta + \int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} (\zeta_0 + \zeta_1) \, d\vartheta$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{A}} \zeta \, d\vartheta + \int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta_1 \, d\vartheta + \zeta_0 \int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} d\vartheta.$$

Dem geschlossenen Wege $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ entspricht auf der x Ebene eine Curve. Wenn im Innern derselben weder ein Verzweigungspunkt noch ein singulärer Punkt liegt, so ist $\int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} d\vartheta = 0$.

---

1) Es ist mir kein anderer Beweis bekannt als der Riemann'sche (Werke Seite 124), der auf der Umformung des Randintegrals in ein Flächenintegral beruht.

Wird diese Curve im Wege $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ q mal durchlaufen, so zerfällt $\int_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta_1 \, d\vartheta$ in eine Summe von q Integralen, von welchen sich auf jeden Umlauf eines bezieht. Im Anfang von $\mathfrak{A}'$ hat y q verschiedene Werthe und nach diesen unterscheiden sich in den q Integralen die Functionen ζ_1 und $d\vartheta$. Für ein bestimmtes dieser Integrale ist aber, in einem bestimmten Punkt des Weges, der Werth von ζ_1 nicht abhängig vom Wege und ist also eine einwerthige Function des Ortes. Nach dem ersten Satze oben ist also $\int_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta_1 \, d\vartheta > 0$, wenn die Durchlaufung des Weges $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ so geschieht, dass die umlaufene Fläche rechts liegt. Unter dieser Annahme und der $\int_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} d\vartheta = 0$, ist demnach

XVIII $$\int_{\mathfrak{B}} \zeta \, d\vartheta > \int_{\mathfrak{A}} \zeta \, d\vartheta.$$

Nehmen wir jetzt zuerst an, dass kein Verzweigungspunkt im Unendlichen liegt. Jeder der Wege $T_1 \ldots T_\omega$ ist ein rückwärts durchlaufener Cyklus oder ein Umgang. Wenn T_λ ein rückwärts durchlaufener Cyklus ist, sei er $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$, wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$ die Uebergänge bezeichnen, aus welchen er besteht. Dann zerfällt der Weg $\mathfrak{p}$ in drei Theile, von welchen der erste und letzte der Curve der Schleife und der mittleren dem Kreis entspricht, welcher um den Verzweigungspunkt gelegt ist. Diese 3 Theile seien als $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3$ unterschieden. Ebenso sei dies bei $\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$ der Fall, so dass der ganze Weg durch $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2\,\mathfrak{q}_3\,\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{t}_3$ bezeichnet werden kann. Nun beginnt $\mathfrak{q}_1$ mit demselben Element, mit dem $\mathfrak{p}_3$ endigt, und weil beide sich auf dieselbe Curve beziehen, ist $\mathfrak{p}_3' = \mathfrak{q}_1$; ebenso ist $\mathfrak{q}_3' = \mathfrak{r}, \ldots \mathfrak{t}_3' = \mathfrak{p}_1$ so dass nach dem Satze XIV Seite 226, der auch hier gilt, das über den Weg $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$ genommene Integral gleich dem über $\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{t}_2$ genommenen ist. Der Werth von y, mit dem $\mathfrak{p}_2$ endigt, ist dem gleich, mit welchem $\mathfrak{q}_2$ beginnt u. s. w., folglich schliessen sich die Kreiswege, $\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{t}_2$ zu einem geschlossenen, den Verzweigungspunkt q mal umlaufenden Kreis zusammen, der rückwärts, d. h. so zu durchlaufen ist, dass die Fläche links liegt.

Setzt man aber für Punkte in der Nähe des Verzweigungspunktes $x = w_\lambda + r(\cos t + i \sin t)$, so kann man $\zeta + i\vartheta$ in eine Reihe nach

positiven Potenzen von $(x - w_\lambda)^{\frac{1}{q}}$ entwickeln, aus der man ζ und $d\vartheta$ entnehmen kann. Die angeführte Integration, die in Bezug auf t zwischen den Grenzen o und $-2\pi q$ auszuführen ist, liefert dann für $\int \zeta d\vartheta$ eine negative Summe von Quadraten, so dass $\int_{T_\lambda} \zeta d\vartheta < o$ ist. Ist aber T_λ ein Umgang, so sei im Resultat XVIII voriger Seite $\mathfrak{A}$ der Weg T_λ, $\mathfrak{B}$ dagegen derjenige, welcher aus einer vom Punkte x_0 ausgehenden Curve $\mathfrak{D}$, einem um x_0 geschlagenen sehr grossen Kreise $\mathfrak{C}$ und endlich aus $\mathfrak{D}'$ besteht; dabei nehmen wir an, die Wegtheile seien mit demjenigen Element durchlaufen mit dem T_λ beginnt und endigt. Da im Wege $T_\lambda' \mathfrak{B}$ die eingeschlossene Fläche zur Rechten des Umlaufenden liegt, ist

$$\int_{\mathfrak{B}} \zeta d\vartheta > \int_{T_\lambda} \zeta d\vartheta.$$

Der Weg $\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$; weil $d\vartheta$ über $\mathfrak{B}$ genommen, Null ist, da der Kreis sämmtliche Verzweigungspunkte einschliesst, so ist der Beginn der Integration im Wege $\mathfrak{B}$ ohne Einfluss auf den Integralwerth, so dass man

$$\int_{\mathfrak{B}} \zeta d\vartheta = \int_{\mathfrak{D}'\mathfrak{D}\mathfrak{C}} \zeta d\vartheta = \int_{\mathfrak{C}} \zeta d\vartheta$$

setzen kann, wobei der Kreis im positiven Sinne durchlaufen wird. Da aber $\zeta + i\vartheta$ für $\varphi = \infty$ endlich bleibt und $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt ist, gibt es, für x mit grossen absoluten Werthen, ν nach positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Potenzreihen und jedem Umgange entspricht eine dieser Reihen.

Durch Einführung von Polarcoordinaten findet man leicht, dass das

$$\int_{\mathfrak{C}} \zeta d\vartheta < o$$

ist und somit auch von $\int_{\mathfrak{B}} \zeta d\vartheta$ und $\int_{T_\lambda} \zeta d\vartheta$ das nämliche gilt. Im Ganzen ist dann also auch

$$\sum_{\lambda=1}^{\omega} \int_{T_\lambda} \zeta d\vartheta < o.$$

Liegt aber einer der Verzweigungspunkte im Unendlichen, so wird bei einem Umgange T_λ die eingeschlossene Fläche so umlaufen, dass sie links bleibt und, weil sie keine singulären Punkte enthält, ist dann das über T_λ genommene Integral negativ. Bei einem endlichen Verzweigungspunkt gilt die vorhin angestellte Betrachtung. Entspricht aber T_λ dem im Unendlichen liegenden Verzweigungspunkt, so sei ein jeder Uebergang in Theile zerlegt wie sie den oben benutzten Curven $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}'$ entsprechen. Wie bei einem endlichen Verzweigungspunkte findet sich dann, dass nur die auf den Kreis $\mathfrak{C}$ bezüglichen Wegtheile zum Integral beitragen und sich zu einem geschlossenen Weg zusammensetzen. Weil aber in T_λ der Cyklus rückwärts zu durchlaufen war, ist der Kreis $\mathfrak{C}$ hier so zu durchlaufen, dass der Punkt ∞ links liegt, d. h. im positiven Sinne und mit Hilfe einer Reihe findet sich, dass auch in diesem Falle das Integral < 0 ist.

Somit ist allgemein

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' + \gamma_1'\delta_1 - \gamma_1\delta_1' + \ldots + \lambda_{\varrho-1}'\mu_{\varrho-1} - \lambda_{\varrho-1}\mu_{\varrho-1}' > 0,$$

welches die Riemann'sche Ungleichung ist.[1])

§ 10.

Man kann die in § 4 vorgetragenen Operationen an sich und allgemeiner betrachten.

Es sei eine Gruppe R von Buchstabenreihen gegeben, in welchen die Buchstaben $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, ... jeder einmal vorkommen. Die Buchstaben seien in zwei Abtheilungen zerlegt: die activen und die passiven Buchstaben. Durch Anwendung der Regel, die in § 4 angewandt wurde, um R_0 aus der Verzweigungstafel abzuleiten, kann man nun aus den Reihen R andere S herstellen, indem man nur an die Stelle der fundamentalen Buchstaben dort hier die activen treten lässt. Dabei soll (der Gleichförmigkeit wegen) die Aenderung eintreten, dass wenn a ein activer Buchstabe ist, an Stelle der Gruppen $a_1 a_2$ oder $a_2 a_1$, die jene Regel fordern würde, einfach a_1 bez. a_2 gesetzt werden soll. Wie im angeführten Paragraphen kann man dann zeigen, dass jede Reihe S, die man mit irgend

1) Theorie der Abel'schen Functionen § 21 (Werke: Seite 125).

einem Buchstaben beginnt, nothwendig geschlossen sein muss. Vielleicht aber enthält eine solche Reihe noch nicht alle Buchstaben der Reihen R, dann bildet man eine zweite, dritte ... bis alle in R vorkommenden Buchstaben erschöpft sind. Die Reihen S sollen die abgeleiteten der Reihen R heissen. Wie oben in § 4 folgt, dass jeder Buchstabe a_α in einer, aber auch nur einer der Reihen S auftritt.

Betrachtet man die Reihen S als gegebene, so kann man aus ihnen wieder neue ableiten. Diese sind dann wieder die R. Denn enthält eine Reihe von R nur passive Buchstaben, so ist die abgeleitete ihr gleich, und liefert als neue abgeleitete wieder die ursprüngliche. Enthält sie aber auch active Buchstaben, so sei $a_\alpha \mathfrak{A} b_\beta$, wo $\mathfrak{A}$ nur passive Buchstaben enthält, eine Gruppe aus ihr; dann kommt in einer abgeleiteten Reihe, wenn wir a_α' das a mit dem Index $\frac{2}{\alpha}$ nennen, die Gruppe $a_\alpha' \mathfrak{A} b_\beta$ vor, und deren abgeleitete enthält wieder die Gruppe $a_\alpha \mathfrak{A} b_\beta$.

[Beispiel. Die Gruppe R sei $a_1\, c_2\, d_2\, f_2\, (e_1)$, $(b_2\, g_1\, e_2\, h_2)$, $c_1\, f_1\, k_2\, d_1\, k_1$, $a_2\, (b_1\, h_1\, g_2)$, wo die passiven Buchstaben oder Gruppen aus solchen in Klammern gesetzt sind. Dann wird S sein: $a_1\, (b_1\, h_1\, g_2)\, a_2\, c_2\, f_1\, (e_1)$, $(b_2\, g_1\, e_2\, h_2)$, $c_1\, d_2\, k_1\, d_1\, f_2\, k_2$.]

Es soll nun untersucht werden, wie die Reihen S sich verändern, wenn man annimmt, ein activer Buchstabe werde passiv oder umgekehrt. Sei a ein passiver Buchstabe, der in zweien der Reihen S vorkommt, so dass diese sind, $a_1 \mathfrak{A}$, $a_2 \mathfrak{B}$, unter $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Gruppen von Buchstaben verstanden. Wird nun a activ, so ändern sich die andern Reihen von S nicht, die beiden aber verschmelzen in die eine $a_2 \mathfrak{A}\, a_1 \mathfrak{B}$. Denn wenn a activ ist, so hat man nach der Regel des § 4 zu schreiben $a_2\, a_1$, von a_1 kommt man zu der Gruppe $\mathfrak{A}$ und wieder nach a_1, dann springt man nach a_2 und findet $\mathfrak{B}$, womit die Reihe schliesst. Nach der Uebereinkunft im Beginn dieses Paragraphen hat man aber a_1 für $a_1 a_2$ und a_2 für $a_2 a_1$ zu schreiben. Kommen die beiden a in derselben Reihe S vor, so dass sie $a_1 \mathfrak{A}\, a_2 \mathfrak{B}$ ist, so entstehen durch das Activwerden von a die beiden Reihen $a_1 \mathfrak{B}$ und $a_2 \mathfrak{A}$.

War aber a ein activer Buchstabe, der passiv wird, so mögen zunächst die beiden a in verschiedenen Reihen, $a_1 \mathfrak{A}$ und $a_2 \mathfrak{B}$, auftreten. Diese sind ausführlicher geschrieben $a_1 a_2 \mathfrak{A}$ und $a_2 a_1 \mathfrak{B}$. Wenn

nun a passiv wird, so hat man neben a_1 die Buchstabengruppe zn stellen, die auf a_1 folgt, ohne dass man springt und diese ist $\mathfrak{B}$, an dessen Ende schliesst sich a_2 und von ihm aus gelangt man, wenn man ohne Sprung weitergeht, zu $\mathfrak{A}$ und zu a_1 zurück. Also entsteht aus den beiden Reihen die eine $a_1 \mathfrak{B} a_2 \mathfrak{A}$. Wenn aber die beiden a in einer Reihe vorkommen, wie in $a_1 \mathfrak{A} a_2 \mathfrak{B}$, so entstehen durch die Passivirung die beiden Reihen $a_1 \mathfrak{B}$ und $a_2 \mathfrak{A}$, wie man sieht, wenn man ausführlicher $a_1 a_2 \mathfrak{A} a_2 a_1 \mathfrak{B}$ schreibt.

Sind die Buchstaben a b . . l activ, so sei die Operation der Ableitung der Reihen S aus den R mit (a b . . l) (R) bezeichnet. Dann kann man den bewiesenen Satz in die Formeln fassen

$$(a\,b\,c\,..\,l)(R) = (a)((b\,c\,..\,l)(R)); \quad (b\,c\,..\,l)(R) = a((a\,b\,c\,...\,l)(R)).$$

Somit ist speciell $(a\,b)(R) = (a)((b)(R)) = (b)((a)(R))$, denn die linke Seite $(a\,b)(R)$ ist ein ganz bestimmtes, eindeutig definirtes Resultat. Oder weniger umständlich geschrieben es ist $a\,b\,(R) = b\,a\,(R) = (a\,b)\,(R)$. Daraus ergibt sich aber $a\,b\,c\,R = (a\,b)\,(c\,R) = a\,(b\,(c\,R)) = a\,(c\,(b\,R)) = a\,c\,b\,(R)$ u. s. w.

Diese Operationen erfüllen also das Commutations- und Associationsprincip und ausserdem ist, wie schon gezeigt, $a^2 R = R$. Die obige Ueberlegung zeigt noch, dass wenn R aus r Reihen besteht, a (R) deren $r - 1$ oder $r + 1$ enthält.

Seien nun a b . . . l Buchstaben die in R vorkommen und $a\,b \ldots l\,(R) = S$. Wenn dann einer der Buchstaben a b . . l z. B. a in zwei verschiedenen der Reihen S vorkömmt, so wird $a\,(S) = b \ldots l\,(R)$ diese beiden Reihen in eine verschmelzen. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man also aus den Buchstaben a b . . . l eine Anzahl $\alpha\,\beta \ldots \zeta$ aussondern, so dass in $\alpha\,\beta\,..\,\zeta\,(R) = \Sigma$ jede Reihe jeden der Buchstaben $\alpha\,\beta\,..\,\zeta$, den sie überhaupt enthält, zweimal enthält. Wenn nun in einer Reihe von Σ zwei der Buchstaben $\alpha\,\beta\,\gamma\,..\,\zeta$ z. B. $\alpha\,\beta$ sich trennen, so dass die Reihe ist $\alpha_\iota\, A\, \beta_\varkappa\, B\, \alpha_\lambda\, I' \beta_\mu\, \Delta$, so wird $\alpha\,(\Sigma)$ aus dieser Reihe die beiden $\alpha_\iota\, I' \beta_\mu\, \Delta$, $\alpha_\lambda\, A\, \beta_\varkappa\, B$ hervorgehen lassen und die anderen nicht ändern, und in $\alpha\,\beta\,(\Sigma)$ werden ebenfalls die letzteren ungeändert geblieben sein, dagegen die beiden ersteren Reihen in die eine $\beta_\mu\, B\, \alpha_\lambda\, A\, \beta_\varkappa\, \Delta\, \alpha_\iota\, I'$ zusammenschmelzen, so dass dann $\alpha\,\beta\,(\Sigma) = \gamma \ldots \zeta\,(R)$ ebensoviele Reihen als Σ enthält. Kommen in $\gamma \ldots \zeta\,(R)$ noch Trennungen der Buch-

staben $\gamma \ldots \zeta$ vor, so kann man in ähnlicher Weise weitergehen, ohne die Reihenzahl zu verändern und kann also schliesslich Buchstaben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{h}$ finden, so dass die Reihen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{h}\,(R)$ keine Trennungen der $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{h}$ mehr enthalten, sondern vielleicht nur von den andern Buchstaben.

[Beispiel: Es sei R: $a_1\,c_2\,d_2\,f_2\,e_1$, $b_2\,g_1\,e_2\,h_2$, $c_1\,f_1\,k_2\,d_1\,k_1$, $a_2\,b_1\,h_1\,g_2$. Dann ist $a\,b\,c\,d\,(R) = a_1\,b_1\,g_1\,e_2\,h_2\,b_2\,h_1\,g_2\,a_2\,c_2\,f_1\,k_2\,d_1\,f_2\,e_1$ und $c_1\,d_2\,k_1$. Hiemit wird

$$a\,b\,d\,(R) = a_1\,b_1\,g_1\,e_2\,h_2\,b_2\,h_1\,g_2\,a_2\,c_2\,d_2\,k_1\,c_1\,f_1\,k_2\,d_1\,f_2\,e_1.$$

Hier sind die 3 Buchstaben a b d nicht mehr getrennt.

Dagegen besteht $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,k\,(R)$ aus den 3 Reihen $b_2\,h_1$, $f_2\,k_2\,c_1\,d_2\,k_1\,d_1$, und $a_1\,b_1\,g_1\,a_2\,c_2\,f_1\,e_1\,h_2\,g_2\,e_2$. Dann ist $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,k\,(R)$ aus den beiden Reihen $f_2\,k_2\,c_1\,d_2\,k_1\,d_1$ und $b_2\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,b_1\,g_1\,a_2\,c_2\,f_1\,e_1\,h_2$ zusammengesetzt und $a\,b\,d\,e\,f\,g\,k\,(R)$ ist die eine Reihe $f_2\,k_2\,c_1\,f_1\,e_1\,h_2\,b_2\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,b_1\,g_1\,a_2\,c_2\,d_2\,k_1\,d_1$. Damit wird weiter

$$d\,e\,f\,g\,k\,(R) = f_2\,k_2\,c_1\,f_1\,e_1\,h_2\,b_2\,g_1\,a_2\,b_1\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,c_2\,d_2\,k_1\,d_1$$

und ferner

$$d\,e\,g\,(R) = f_2\,e_1\,h_2\,b_2\,g_1\,a_2\,b_1\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,c_2\,d_2\,k_1\,c_1\,f_1\,k_2\,d_1,$$

wo nun zwischen den d, e, g keine Trennungen mehr existiren.]

In Bezug auf die Buchstaben $a\,b \ldots l$ sei nun R, wie wir im Folgenden immer annnehmen wollen, irreducibel, d. h. es sei unmöglich, R so in kleinere Gruppen zu theilen, dass jede alle diejenigen der Buchstaben $a\,b \ldots l$, die sie überhaupt enthält, zweimal enthält. Wenn dann $a\,b \ldots l\,(R) = S$ reducibel wäre in Bezug auf $a\,b \ldots l$, so sei T eine Gruppe, welche z. B. die Buchstaben $a\,b \ldots f$ allein und jeden zweimal enthielte. Dann entstände, wenn man $a\,b \ldots l\,(S) = R$ bildete, aus T eine Reihengruppe, die auch nur die Buchstaben $a\,b \ldots f$ und jeden zweimal enthielte, so dass R reducibel wäre. Also ist $a\,b \ldots l\,(R)$ irreducibel.

Betrachtet man nun $b\,c \ldots l\,(R)$. Es umfasse V diejenigen Reihen von S, welche a enthalten und W die andern, in welchen a nicht auftritt. Dann besteht $b\,c \ldots l\,(R)$ aus den Reihen $a\,(V)$ und den $a\,(W)$, die W selbst sind, weil dieses ja a nicht enthält. Wäre nun in Bezug auf $b\,c \ldots l$ W reducibel, so wäre es auch S; wäre $a\,(V)$ reducibel in Bezug auf dieselben Grössen, so müsste es aus zwei Reihen bestehen und dann wäre V nur eine Reihe; bildete aber ein Theil von $a\,(V)$ mit einem von

W eine irreducibele Gruppe, und der andere Theil von a (V) mit dem Rest von W eine zweite, so wäre a (V) aus zwei Reihen zusammengesetzt und V nur aus einer. Wenn also die beiden a in zwei verschiedenen Reihen von S vorkommen, so ist b c . . l (R) in Bezug auf b c . . l irreducibel. Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses folgt dann, dass $\Sigma = \alpha\,\beta \ldots \zeta\,(\mathrm{R})$ in Bezug auf $\alpha\,\beta \ldots \zeta$ irreducibel sein muss. Da aber jede Reihe von Σ jeden überhaupt in ihr auftretenden Buchstaben zweimal enthält, so kann es nur dann irreducibel sein, wenn es nur aus einer Reihe besteht und dann besteht auch $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}\,(\mathrm{R})$ nur aus einer Reihe.

Es sei die Gruppe R r-reihig und die S s-reihig; die Zahl der Buchstaben a b . . l sei q, die der $\alpha\,\beta \ldots \zeta$ sei q'. Da nun beim Uebergang von a b . . l (R) zu $\alpha\,\beta \ldots \zeta\,(\mathrm{R})$ $\mathrm{q} - \mathrm{q}'$ Buchstaben fortgefallen sind, und beim Wegfall eines jeden Buchstabens 2 Reihen in eine zusammengezogen wurden, so sind auch $\mathrm{q} - \mathrm{q}'$ Reihen fortgefallen und da in $\alpha\,\beta \ldots \zeta\,(\mathrm{R})$ eine geblieben ist, so ist $\mathrm{s} - (\mathrm{q} - \mathrm{q}') = 1$. Ist ferner die Zahl der Buchstaben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ mit q'' bezeichnet, so ist die Differenz $\mathrm{q}' - \mathrm{q}''$ gerade. Weil die Reihe $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}\,(\mathrm{R})$ keine Trennungen der Buchstaben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ mehr enthält, so müssen einmal zwei gleiche Buchstaben z. B. $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ unmittelbar neben einander stehen oder wenigstens nur durch eine Buchstabengruppe $\mathfrak{B}$ getrennt sein, die keinen der Buchstaben $\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ enthält, so dass

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}\,(\mathrm{R}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{C}$$

ist, wo die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ noch die Buchstaben $\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ enthalten müssen. Damit ist aber

$$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}\,(\mathrm{R})) = \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}\,(\mathrm{R}) = \begin{cases} \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{C} \\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{B}. \end{cases}$$

$\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{B}$ enthält keinen der $\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ mehr, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{C}$ dagegen wird ebenfalls keine Trennungen enthalten und folglich auf dieselbe Weise wieder Anlass zu zwei Reihen geben u. s. w., bis man schliesslich R selbst mit r Reihen findet. Also muss die Zahl der Buchstaben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ gleich $\mathrm{r} - 1$ sein. Daher hat man, wenn man $\mathrm{q} - \mathrm{q}' = \lambda$, $\mathrm{q}' - \mathrm{q}'' = 2\,\mu$ setzt, $\mathrm{q}'' = \mathrm{r} - 1$ und somit

$$\lambda = \mathrm{s} - 1, \qquad 2\,\mu = \mathrm{q} - \mathrm{s} - \mathrm{r} + 2.$$

Wenn man also auch die Auswahl der Buchstaben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{h}$ auf verschiedene Art vornehmen kann, so sind doch die Zahlen λ und μ bei den verschiedenen Arten die nämlichen.

Ist $r = q + 1$, so wird $2\mu + \lambda = o$, d. h. $\lambda = o$, $\mu = o$, $s = 1$, folglich ist dann schon S eine einzige Reihe ohne Trennungen. [Im ersten der obigen Beispiele ist $r = 4$, $q = 4$, $s = 2$, daher $\lambda = 1$, $2\mu = o$; im zweiten ist $r = 4$, $q = 9$, $s = 3$, und es wird $\lambda = 2$, $2\mu = 4$].

Es seien, um eine Anwendung zu machen, die Reihen R unsere ω Wege $T_1 \ldots T_\omega$ von § 6 (Seite 219) mit passenden Indices. Ist nämlich a b c . . i k ein Cyklus, a m n . . . z ein Umgang, so seien 2 der Reihen R

$$k_2\, i_2 \ldots b_2\, a_2 \text{ und } a_1\, m_1 \ldots z_1.$$

Wenn dann alle Buchstaben activ sind, so beginnt eine der Reihen S mit $z_2\, a_1\, k_2 \ldots$ und eine andere mit $b_1\, a_2\, m_1 \ldots$. Nun stehen aber in einer Zelle der Verzweigungstafel des Cyklus wegen $a_1\, k_2$ und links neben a_1 steht, wegen des Umganges, z_2; ferner steht in einer andern Zelle wegen des Cyklus $b_1\, a_2$ und, wegen des Umganges, rechts von a_2 das m_1. Folglich sind die Reihen S die ν Zeilen der Verzweigungstafel und s ist $= \nu$. q ist ferner $= \nu\sigma$ und somit, weil R bez. S irreducibel ist,

$$\lambda = \nu - \iota,\quad 2\mu = \nu\sigma - \nu - \omega + 2 = 2\varrho$$

wie diese Zahlen oben (XII Seite 223) gefunden waren.

Wenn man bei einer irreducibelen Gruppe R von q Buchstaben a b . . . o p t u . . . z und r Reihen, $w = q - r + 1$ Buchstaben a b . . . p gefunden hat, derart, dass in Bezug auf die r — 1 übrigen t u . . z R ebenfalls irreducibel ist, so ist t u . . z (R) eine Reihe P, ohne Trennungen der Buchstaben t u . . z durch einander. Dann ist a t u . . z (R) = a (P) zweireihig. Ob aber b a (P) drei- oder einreihig ist, kann man nicht sagen; wir wollen annehmen, es sei $(2 + \delta_2)$-reihig, wo δ_2 entweder $+1$ oder -1 ist, dagegen c b a (P) $(2 + \delta_2 + \delta_3)$-reihig, wo δ_3 wieder $+1$ oder -1 ist u. s. w. Schliesslich bestehe p o . . c b a (P) aus $2 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_w$ Reihen. Es ist aber p o . . . c b a (P) = a b c . . p t u . . z (R) = S und besteht somit aus $s = q - r + 2 - 2\mu = w + 1 - 2\mu$ Reihen, so dass

$$\delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_w = w - 1 - 2\mu$$

sein muss.

Ist $\mu = 0$, so folgt $\delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_w = w - 1$, so dass alle $\delta_\varkappa = +1$ sein müssen. Dann ist also b a (P) 3 reihig und muss b in zwei verschiedenen Reihen enthalten, weil sonst beim Uebergang zu a (P) eine Reihe in zwei zerfallen, also 4 Reihen entstehen würden, während a (P) zweireihig ist. Ferner ist c b a (P) 4-reihig und muss aus einem ähnlichen Grund, wie der eben erwähnte, c in zwei verschiedenen Reihen enthalten u. s. w. Man kann also aus S mit Hilfe des oben geschilderten Verfahrens, indem man p (S), o p (S), ... a b c .. p (S) bildet, allmälig die Reihe P ohne Trennungen herleiten.

Ist aber $\mu > 1$, so ist $w - 1 - 2\mu < w - 1$, daher können nicht alle $\delta_\varkappa$ gleich $+1$ sein. Es sei $\delta_{\alpha+1}$ das erste δ, welches $= -1$ ist, und es seien a b ... l die ersten α der Buchstaben a b ... p. Dann besteht l .... b a (P) aus $2 + \alpha - 1 = \alpha + 1$ Reihen, dagegen ist m l .... b a (P) nur α-reihig. Wenn nun in P zwischen den Buchstaben a b ... l m keine Trennungen vorkämen, so wäre m l .... b a (P) aus $1 + \alpha + 1 = \alpha + 2$ Reihen zusammengesetzt, wie man sieht, wenn man den vorhin bei a b .. ḥ (R) gemachten Schluss wiederholt. Also müssen in P mindestens zwei der Buchstaben a b ... l m sich trennen. Seien dies die beiden a und b, so ist a b (P) einreihig, c b a (P) zweireihig und das Zufügen der Buchstaben d e .. p füge nun $\varepsilon_4, \varepsilon_5 .. \varepsilon_w$ Reihen hinzu (alle $\varepsilon = +1$ oder -1), so dass S aus $2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + .. + \varepsilon_w$ Reihen besteht. Dann hat man die Gleichung

$$\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \ldots + \varepsilon_w = w - 3 - 2(\mu - 1).$$

Da $\mu = 0$ schon erledigt ist, kann man annehmen, es sei $\mu \gtreqless 1$. Ist $\mu = 1$, so folgt $\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \ldots + \varepsilon_w = w - 3$, also $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \ldots = \varepsilon_w = 1$. Dann kommen also in b a (P) a und b getrennt vor, dagegen c in c b a (P) in zwei getrennten Reihen, ebenso d in d c b a (P) u. s. w., so dass man durch Bildung von p (S), o p (S) ... d ... o p (S), c d .. o p (S) und a b c d ... o p (S) die Reihe P ohne Trennungen herleiten kann. Ist aber $m > 1$, so können nicht alle $\varepsilon = +1$ sein. Ist $\varepsilon_{\beta+1}$ das erste, das $= -1$ ist, so seien c d .. g h die ersten $\beta - 2$ der Buchstaben c d ... p. Dann ist h g .. c d b a (P) $(\beta - 2)$ reihig, dagegen i h g .. c d b a (P) $(\beta - 3)$ reihig. Desswegen müssen sich unter den Buchstaben c d ... g h i immer zwei finden, sie seien c und d, so dass in b a (P) c und d getrennt sind

und d c b a (P) wieder einreihig wird. Man geht nun in der eben gezeigten Art fort, bis man 2μ Buchstaben a b, c d, ... k l gefunden hat, so dass b a (P), d c b a (P) ... l k ... d c b a (P) alle einreihig sind und in diesen Reihen a b, bez. c d, ... l k sich trennen. Wenn man nun die übrigen $w - 2\mu = \lambda$ Buchstaben m .. p allmählig activirt, so wird m l k ... b a (P) zweireihig, dagegen mögen bei den folgenden Buchstaben n ... p, resp. $\pi_2 \ldots \pi_\lambda$ Reihen hinzutreten, wo die π wieder $+1$ oder -1 sind. Dann muss sein

$$\pi_2 + \pi_3 + .. + \pi_\lambda = w - 1 - 2\mu = \lambda - 1,$$

so dass alle π gleich $+1$ sind. Folglich enthält m l k .. b a (P) m in zwei getrennten Reihen, ... schliesslich p ... l k .. b a (P) = S p in zwei getrennten Reihen, so dass man nach der oben gegebenen Regel aus S durch Verschmelzen von je zwei Reihen allmälig p (S) o p (S) ... m ... o p (S) herleiten kann, wobei dies letzte aus einer einzigen Reihe besteht, in der k und l getrennt sind, so dass man weiter k l m .. o p (S) u. s. w. bis a b ... o p (S) abzuleiten im Stande ist.

Wendet man dies an auf unsere ω Cyklen und Umgänge $T_1 \ldots\ldots T_\omega$ als Reihen R, zu welchen die ν Zeilen der Verzweigungstafel als S gehören und für welche $q - r + 1 = 2\varrho + \nu - 1$, $r - 1 = \omega - 1$, $\lambda = \nu - 1$ ist, so folgt: wenn man $2\varrho + \nu - 1$ Uebergänge sucht, so dass in Bezug auf die übrigen $\omega - 1$ die $T_1 \ldots T_\omega$ noch eine irreducibele Gruppe bilden, so gibt es unter den $2\varrho + \nu - 1$ ersteren Uebergänge $\nu - 1$, welche dazu dienen können, um allmälig die ν Zeilen der Verzweigungstafel in eine Reihe R_0 zu vereinigen und die andern 2ϱ kommen dann in R_0 so vor, dass man die Regeln zur Ableitung der Reihen R_1, R_2 .. auf sie anwenden kann, d. h. sie liefern die kanonischen Perioden.

Dies ist die Begründung der Methode zur praktischen Herstellung der kanonischen Perioden, welche auf Seite 224 erwähnt wurde.

10 AUG 1937

Inhalt.

Seite

Monographiae Generis Serjaniae Supplementum. Ergänzungen zur Monographie der Sapindaceen-Gattung Serjania. Von *L. Radlkofer*. Mit 8 Tafeln und 1 Karte 1

Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. (Zweite Abhandlung.) Von *J. Lüroth* in Freiburg in Baden 197

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

2 FEB 1888

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SECHZEHNTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LVI. BAND.

MÜNCHEN 1887.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Ueber

die projective Centrafläche

einer

algebraischen Fläche n. Ordnung.

Von

A. Voss.

Der Begriff der von den Krümmungsmittelpuncten der Hauptnormalschnitte einer gegebenen Fläche gebildeten Fläche, oder der Centrafläche derselben, lässt sich in zweifacher Weise projectiv verallgemeinern, je nachdem man als absolutes Gebilde eine Fläche zweiten Grades oder einen Kegelschnitt voraussetzt. Obwohl der letztere Fall aus dem ersteren als Grenzfall hervorgeht, so scheint es doch angemessen, die beiden auf diese Art entstehenden Flächen als projective Centraflächen erster und zweiter Art zu unterscheiden.[1]) Im Folgenden habe ich versucht, die Theorie dieser Flächen, unter Voraussetzung einer allgemeinen algebraischen Fläche n. Ordnung, analytisch darzulegen, soweit dies mit Hülfe einfacher Formenbildungen geschehen kann; es genügt dabei die Centrafläche erster Art zu betrachten, deren analytische Behandlung in mancher Beziehung sich einfacher gestalten lässt.

In § 1 behandle ich zuerst eine allgemeine Classe von Brennflächen. Sie gehört zu denjenigen Strahlensystemen, welche entstehen, wenn man jeden Punct x einer allgemeinen Ordnungsfläche f mit einem Puncte y verbindet, dessen Coordinaten rationale Functionen von x sind. Dabei erscheint die Brennfläche im allgemeinen zweideutig auf f bezogen; für gewisse Curven derselben tritt indessen eine eindeutige Beziehung ein; hieraus ergeben sich sofort alle Singularitäten der ebenen Schnittcurve und des Tangentenkegels dieser Flächen. Zu diesen Curven gehören insbesondere die in § II betrachtete Rückkehr und parabolische Curve der Brennfläche, deren Verhalten demnach durch ihre eindeutige Abbildung auf f untersucht werden kann.

1) Bei den Flächen zweiten Grades sind diese beiden Centraflächen im projectiven Sinne nicht verschieden.

Von diesem Gesichtspunct aus sind in § IV die Centraflächen erster Art betrachtet. Als besonders characterisch für das Strahlensystem der projectiven Normalen erweisen sich die Hauptpuncte desselben, welche zu den Kreispuncten von f gehören. In den § V und VII stelle ich die Gleichungen zweier Flächen $8(2n-3)$ Ordnung auf, welche f in der eindeutigen Abbildung der Rückkehr und parabolischen Curve der Centrafläche durchsetzen; hieraus ergibt sich eine Reihe von Eigenschaften, welche diese Curven in ihrem gegenseitigen Verhalten und dem in Bezug auf andere Curven auszeichnen. Im § IX sind die Hauptpuncte einer Theorie der Centraflächen zweiter Art skizzirt, und endlich noch die einfachsten Modificationen besprochen, welche eintreten, wenn f entweder einen vielfachen Punct hat, oder die absolute Fläche resp. die absolute Ebene berührt.

Wenn nun die Resultate dieser Arbeit sich auch zunächst auf gewisse Hauptfragen der abzählenden Geometrie in Betreff der projectiven Centraflächen beziehen, so war es doch zugleich meine Absicht, durch die Bildung geeigneter analytischer Formen zur Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der algebraischen Flächen neue Gesichtspuncte zu gewinnen, insbesondere auch eine synthetische Behandlung der Theorie der Centraflächen anzubahnen, von der man eine vollständigere Darlegung aller Singularitäten dieser Flächen erwarten darf. In dieser Beziehung sei es mir gestattet auf den in § III entwickelten Begriff des Hauptschnittes einer Fläche, die analytische Bestimmung der Anzahl der Kreispuncte, den Inhalt der § V und X, sowie auf die in mancher Hinsicht ausgezeichneten Krümmungseigenschaften der Flächen dritter Ordnung hinzuweisen.

§ I.

Eigenschaften einer allgemeinen Classe von Brennflächen.

Die projective Centrafläche erster Art der allgemeinen Ordnungsfläche n. Ordnung $f = 0$ ist die Brennfläche des Strahlensystemes, welches aus den Verbindungsgeraden der Pole y der Tangentenebenen von f in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades $X = 0$ mit den Berührpuncten jener Tangentenebenen gebildet wird. Sie entsteht daher

einerseits als Ort der Durchschnittspuncte unendlich naher Strahlen des Systems, andererseits als Umhüllungsgebilde der Ebenen durch benachbarte sich schneidende Strahlen. Die Puncte y bilden die reciproke Fläche F von f. Man kann das Strahlensystem also auch durch die Verbindungsgeraden der Puncte y mit den Polen x der Tangentenebenen von F definiren; die beiden Flächen F und f haben dieselbe Centrafläche. Und da zwischen der Fläche F und einer beliebigen anderen Reciprokalfläche von f kein wesentlicher Unterschied besteht, so kann man auch sagen: Die Centrafläche erster Art von f ist in projectivem Sinne identisch mit der Centrafläche der Reciproken von f.[1])

Wird der Einfachheit halber

$$X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

vorausgesetzt, so hat man, falls zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, d\, x_k} = f_{ik}, \text{ etc.}$$

gesetzt wird,

$$1) \qquad \varrho\, y_i = f_i,$$

als Coordinaten der zu den Puncten x gehörigen Pole y.

Statt der Gleichungen 1) sollen zunächst die y_i proportional mit homogenen Functionen ψ_i vom Grade s vorausgesetzt werden, welche für kein gemeinsames Werthsystem der x, für das f gleich Null ist, gleichzeitig verschwinden. Das durch die Geraden (xy) gebildete Strahlensystem ist von der Classe ns^2, von der Ordnung $n(s^2 + s + 1)$. Die letztere Zahl ergibt sich sofort, wenn man beachtet, dass die Matrix[2])

---

1) Für die C. Flächen zweiter Art besteht ein analoger Satz nicht, obwohl auch hier gewisse Charactere bei dualistischer Vertauschung ungeändert bleiben, vgl. § IX.

2) Zur Abkürzung soll bei der Angabe von Determinanten in der Regel nur eine Verticalreihe derselben, welche durch den Index i bezeichnet ist, angegeben werden. Ebenso bediene ich mich zur Darstellung der geränderten Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & o \end{vmatrix}$$

$$A = \left\| \begin{matrix} \psi_i \\ x_i \\ a_i \end{matrix} \right\| = 0; \; i = 1. 2, 3, 4,$$

welche ausdrückt, dass die Puncte ψ_i, x_i, a_i in einer Geraden liegen. bei willkürlichen Werthen der a_i eine Curve der Ordnung

$$s^2 + s + 1$$

darstellt. welche mit der Fläche f die soeben angegebene Zahl von Puncten gemein hat. Im Folgenden sollen die Unterdeterminanten jener Matrix mit

$$\eta_1, \; \eta_2, \; \eta_3, \; \eta_4,$$

bezeichnet werden.

Schreitet man auf f von x um dx fort, so erhalten die y die Incremente dy. Befinden sich die Puncte x, y, $x + dx$, $y + dy$, in einer Ebene, so ist dieselbe eine Tangentenebene der Brennfläche des Strahlensystems.

Liegt der willkürliche Punct a in derselben, so kann man demnach setzen

$$2) \qquad \begin{aligned} dx_i &= a_i + \lambda x_i + \mu y_i, \\ dy_i &= a_i + \lambda_1 x_i + \mu_1 y_i. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$\Sigma f_i \, dx_i = 0, \text{ [1]}$$

folgt hieraus

$$3) \qquad \Sigma a_i f_i + \mu \Sigma y_i f_i = 0.$$

Setzt man noch

$$4) \qquad dy_i = \Sigma \psi_{ik} \, dx_k; \quad \psi_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}.$$

und führt die dx_i aus 2) in 4) ein, so entsteht

---

des Zeichens

$$\begin{vmatrix} a_i k & b k \\ a_i & o \end{vmatrix}.$$

1) Da alle Summationszeichen sich im Folgenden immer auf diejenigen Indices i, k, l = 1, 2, 3, 4 beziehen, welche doppelt unter dem Σ-zeichen vorkommen, so wird die besondere Bezeichnung der Indices unterbleiben.

$$\Sigma a_k \psi_{ik} + \mu \Sigma \psi_{ik} \psi_k = a_i + \lambda_1 x_i + \psi_i (\mu_1 - \lambda s),$$

und endlich, wenn man die λ_1, $\mu_1 - \lambda s$ eliminirt, und μ aus 3) einsetzt

$$5) \quad F = \Sigma y_i f_i \Sigma a_k \psi_{ik} \eta_i - \Sigma a_i f_i \Sigma \psi_{ik} \psi_k \eta_i = o.$$

Die Fläche $3s + n - 1$. Ordnung F, welche einem gegebenen Werthe von a entspricht, berührt, wovon man sich leicht überzeugt, die Fläche f in allen den Puncten, in denen die gemeinsame Curve der Matrix A f durchsetzt; sie schneidet f in einer Curve l' mit ebenso viel Doppelpuncten, welche diejenigen Puncte x enthält, für welche eine der zugehörigen Tangentenebenen der Brennfläche durch den Punct a geht. Bei gegebenem x dagegen repräsentirt die in a quadratische Form F das Product jener beiden Tangentenebenen selbst, zerfällt also beständig vermöge $f = o$ in das Product zweier linearer Factoren.

Die Classe M der Brennfläche ist gleich der Zahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$f = o, \; F = o, \; \Sigma b_i \eta_i = o,$$

welche ausdrücken, dass eine Tangentenebene der Brennfläche durch die beiden willkürlichen Puncte a, b, geht, also wird

$$M = n(s + 1)(3s + n - 1) - 2n(s^2 + s + 1).$$

Die von den Puncten x gebildete Curve l' ist eindeutig umkehrbar auf die Berührungscurve des Tangentenkegels der Brennfläche mit der Spitze a bezogen. Das liefert den folgenden Satz:

Das Geschlecht p des Tangentenkegels der Brennfläche ist gegeben durch die Gleichung

$$2p - 2 = n(3s + n - 1)(3s + 2n - 5) - 2n(s^2 + s + 1),$$

nämlich gleich dem Geschlechte einer Curve mit $n(s^2 + s + 1)$ Doppelpuncten, welche vollständiger Schnitt von f und F ist.

Auf eine ähnliche Art, wie im vorigen die Ebenen der Brennfläche, lassen sich nun auch die beiden zu einem Puncte x von f gehörigen Puncte derselben characterisiren. Bezeichnet man nämlich mit z_i die

Coordinaten eines Punctes der Brennfläche, welcher auf dem zu x gehörigen Strahle (x y) liegt, so ist

$$6) \quad \varrho\, z_i = x_i + \lambda\, y_i,$$

falls beim Fortschreiten um dx und correspondirende Werthe der dy (4) die Verhältnisse der z_i keine Aenderung erfahren. Setzt man daher:

$$7) \quad \frac{d\varrho}{\varrho}(x_i + \lambda y_i) = dx_i + \lambda\, dy_i + y_i\, d\lambda,$$

so erhält man durch Elimination der dx_i, $d\lambda$, $\frac{d\varrho}{\varrho}$, zur Bestimmung von λ die quadratische Gleichung

$$8) \quad \Delta = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 1+\lambda\psi_{11} & \lambda\psi_{12} & \lambda\psi_{13} & \lambda\psi_{14} & x_1 \\ \lambda\psi_{21} & 1+\lambda\psi_{22} & \lambda\psi_{23} & \lambda\psi_{24} & x_2 \\ \lambda\psi_{31} & \lambda\psi_{32} & 1+\lambda\psi_{33} & \lambda\psi_{34} & x_3 \\ \lambda\psi_{41} & \lambda\psi_{42} & \lambda\psi_{43} & 1+\lambda\psi_{44} & x_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & o \end{vmatrix} = o$$

oder in entwickelter Form

$$\Delta = \Sigma f_i \psi_i + \lambda\,(\Sigma f_i \psi_i \Sigma \psi_{k\,k} - \Sigma f_i \psi_{k\,k} \psi_k) + \lambda^2 D,$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \psi_{i\,k} & x_i \\ f_k & o \end{vmatrix},$$

zu setzen ist. Die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 derselben bestimmen die zu x gehörigen Puncte z_1, z_2 der Brennfläche.

Aus der Form Δ geht zunächst hervor: Der Punct x ist selbst ein Punct der Brennfläche, wenn $\Sigma f_i \psi_i = o$, d. h. wenn der Punct y in der Tangentenebene von f liegt. Umgekehrt ist y ein Punct der Brennfläche, wenn $D = o$, d. h. wenn die Tangentialebene der von den Puncten y gebildeten Fläche Φ, welche mit f in eindeutiger Beziehung steht, durch den Punct x geht. Denn die Gleichung dieser Tangentialebene entsteht, wenn man in dem Ausdrucke D den aus den x_i gebildeten Rand durch die laufenden Coordinaten der Ebene ersetzt. Nun beweist man leicht den Satz:

Sind zwei Flächen f und Φ auf einander (ein oder mehrdeutig) so bezogen, dass jedem Puncte x von f überhaupt ein Punct y von Φ entspricht, so wird die Brennfläche des

Strahlensystemes (xy) die Fläche f (Φ) längs derjenigen Curve berühren, für deren Puncte die Tangentenebene von f (Φ) durch den zugehörigen Punct y (x) auf Φ (f) geht. — Denn wenn die Tangentenebene T von f im Puncte x durch y geht, so schneidet sie auf Φ einen zu y benachbarten Punct aus, der mit dem entsprechenden Puncte in T einen unendlich nahen Strahl des Systems bestimmt, welcher (xy) in einem Puncte z schneidet. Die durch beide Strahlen gelegte Ebene ist Tangentenebene der Brennfläche im Puncte x, welcher eben den anderen auf (xy) gelegenen Brennpunct bildet. Insbesondere hat man also:

Die Brennfläche berührt die Fläche f längs der Curve $\Sigma f_i \psi_i = 0$, $f = 0$.

Verbindet man 6) mit den beiden Gleichungen

$$\alpha_z = 0, \quad \beta_z = 0,$$

so wird

$$9) \quad \lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y},$$

$$\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y = 0.$$

Wird der aus 9) folgende Werth von λ in 8) eingesetzt, so wird Δ von der Ordnung $3s + n - 1$. Man erhält demnach als Ordnung der Brennfläche, d. h. als Zahl der Puncte, welche dieselbe mit der willkürlichen Geraden $\alpha_z = 0$, $\beta_z = 0$, gemein hat,

$$N = n(s + 1)(3s + n - 1) - 2ns,$$

da offenbar die ns Puncte, in denen

$$f = 0, \quad \alpha_x = 0, \quad \alpha_y = 0,$$

doppelt zählend zu entfernen sind.

Ein beliebiger ebener Schnitt der Brennfläche ist definirt durch die Gleichungen 8) und 9). Dieselben bestimmen bei gegebenen Werthen der α_i eine Curve auf f, welche in eindeutiger Beziehung zu jener ebenen Schnittcurve steht und welche die Puncte $\alpha_x = 0$, $\alpha_y = 0$, $f = 0$ zu Doppelpuncten hat. Mithin ist das Geschlecht π des ebenen Schnittes der Brennfläche bestimmt durch die Gleichung

$$2\pi - 2 = n(3s + n - 1)(3s + 2n - 5) - 2ns.$$

Zur vollständigen Discussion des ebenen Schnittes, resp. des Tangentenkegels der Brennfläche ist jetzt nur noch eine weitere characteristische Zahl, der Rang R der Fläche zu bestimmen. Hierzu führen die folgenden Betrachtungen.

Wenn Δ verschwindet, so gibt es Werthe der ζ_i, ξ_i, welche den Gleichungen

$$10) \qquad \begin{aligned} &\zeta_k + \lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i + \zeta f_k = 0, \; k = 1, 2, 3, 4 \\ &\Sigma \zeta_i x_i = 0, \\ &\Sigma \zeta_i y_i = 0, \end{aligned}$$

$$11) \qquad \begin{aligned} &\xi_k + \lambda \Sigma \psi_{ki} \xi_i + \xi x_k = 0, \; k = 1, 2, 3, 4 \\ &\Sigma \xi_i f_i = 0, \\ &\Sigma \psi_{ki} \xi_i f_k = 0, \end{aligned}$$

genügen. Die Verbindungslinie der den beiden Wurzeln λ_1, λ_2 zugehörigen Puncte ζ_i bildet nach 10) ein zu dem Strahlensysteme x y in Bezug auf X conjugirtes, dessen Brennfläche eben von jenen Puncten gebildet wird; die Puncte ζ_i bilden daher die reciproke Fläche der Brennfläche. Auch analytisch ist dies leicht zu erkennen. Denn durch Differentiation der Gleichungen 10) entsteht

$$\begin{aligned} &d\zeta_k + \lambda \Sigma (\psi_{ikl} \zeta_i dx_l + \psi_{ik} d\zeta_i) + d\lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \\ &\quad + d\zeta f_k + \zeta \Sigma f_{kl} dx_l = 0, \end{aligned}$$

multiplicirt man diese 4 Gleichungen mit den x_k und addirt, so entsteht

$$\Sigma (x_k + \lambda y_k) d\zeta_k = 0,$$

woraus hervorgeht, dass die Tangentenebene der von den Puncten ζ gebildeten Fläche die Polarebene des Punctes z ist.

Bezeichnet man ferner die zu λ_1 λ_2 gehörigen Werthe der ζ_i, ξ_i durch obere entsprechende Indices, so ist nach 10), 11)

$$\begin{aligned} \Sigma \zeta_k^1 \xi_k^2 + \lambda_1 \Sigma \psi_{ik} \zeta_i^1 \xi_k^2 &= 0, \\ \Sigma \zeta_k^1 \xi_k^2 + \lambda_2 \Sigma \psi_{ki} \xi_i^2 \zeta_k^1 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. es wird

$$12) \qquad \begin{aligned} &\Sigma \zeta_k^1 \xi_k^2 = 0, \; \Sigma \psi_{ik} \zeta_i^1 \xi_k^2 = 0, \\ &\Sigma \zeta_k^2 \xi_k^1 = 0, \; \Sigma \psi_{ik} \zeta_i^2 \xi_k^1 = 0. \end{aligned}$$

Differentiirt man die Gleichungen 6), so entsteht allgemein für die Fortschreitungsrichtung d z auf der Brennfläche

$$\varrho\, dz_i + z_i d\varrho = dx_i + \lambda \Sigma \psi_{ik} dx_k + y_i d\lambda,$$

woraus durch Multiplication mit den ζ_i und Addition nach 10) wird

$$\Sigma \zeta_i dz_i = 0.$$

Die Gleichung der Tangentenebene der Brennfläche im Puncte z_i ist also, wie auch aus der reciproken Beziehung hervorgeht,

$$13) \qquad \Sigma \zeta_i X_i = 0.$$

Die Bedingung, dass dieselbe durch einen willkürlichen Punct a gehe, ist also

$$14) \qquad \Sigma \zeta_i a_i = 0.$$

Setzt man ferner

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y},$$

so erhält man die Anzahl der Kanten des Tangentenkegels der Brennfläche mit der Spitze a, welche sich auf die Schnittpuncte seiner Berührungscurve mit der willkürlichen Ebene $\alpha_z = 0$ stützen, d. h. die Zahl R. Die Gleichung 14) aber hat die Form

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 + \lambda \psi_{ik} a_i \\ f_k \qquad 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man nun für λ den angegebenen Werth, so liefern die drei Gleichungen

$$f = 0, \ \Delta = 0, \ \Delta' = 0$$

$n(3s + n - 1)^2 - 6ns$ Lösungen. Aber von diesen sind diejenigen als unwesentlich zu entfernen, für die die sämmtlichen ζ_i, d. h. die nach der letzten Verticalreihe von Δ' genommenen Unterdeterminanten verschwinden. Die Anzahl derselben beträgt, wie eine einfache und auf bekannte Methoden zurückführbare Abzählung lehrt, deren Ausführung hier übergangen werden mag,

$$n[8s^2 + 2n(n-1)] - 6sn.$$

Somit ergibt sich:

Der Rang der Brennfläche, d. h. die Ordnung ihres Tangentenkegels oder die Classe ihrer ebenen Schnittcurve ist gleich

$$R = n[s^2 + 4s(n-1) + (n-1)^2].$$

Die gefundenen Zahlen characterisiren vollständig die Singularitäten des Tangentenkegels und des ebenen Schnittes. So erhält man z. B.: die Anzahl der Wendungskanten des Tangentenkegels

$$w = sn(8s + 7n - 16) + n(n+1)(n-4),$$

die Zahl seiner Rückkehrkanten

$$\varrho = 4sn(2s + 4n - 7) + 4n(n-1)(n-2),$$

die Zahl der Spitzen der ebenen Schnittcurve

$$r = sn(14s + 7n - 16) + n(n-1)(n-2),$$

die Zahl der Wendungspuncte derselben

$$i = 4sn(2s + 4n - 7) + 4n(n-1)(n-2);$$

Die Zahl der Rückkehrkanten des Tangentenkegels ist also gleich der Zahl der Inflexionen auf der ebenen Schnittcurve der Brennfläche.

Sind insbesondere die ψ_i Functionen $n-1$. Ordnung, so erhält man demnach die folgenden characteristischen Zahlen, die namentlich auch für die projective Centrafläche erster Art gelten

$$\begin{aligned}
N &= 2n(n-1)(2n-1),\\
M &= 2n(n^2-n-1),\\
R &= 6n(n-1)^2,\\
2p-2 &= 4n(n-1)(5n-8) - 2n(n^2-n+1),\\
2\pi-2 &= 2n(n-1)(10n-17),\\
w &= 2n(n-2)(4n-5),\\
i = \varrho &= 4n(n-1)(7n-11),\\
r &= 2n(n-1)(11n-16),\\
\sigma &= 6n(n-1)(5n-8);
\end{aligned}$$

die letzte Zahl giebt die Ordnung der parabolischen Curve auf der Centrafläche; r ist die Ordnung der Rückkehrcurve derselben.

Diese letzteren Zahlen habe ich bereits im XVI. Bande der Mathematischen Annalen, allerdings auf einem viel weitläufigeren Wege, hergeleitet. Sie gelten auch für die Centrafläche zweiter Art, bei welcher an Stelle der Functionen ψ_i lineare Functionen der f_i zu setzen sind (vgl. § IX). Erst ganz neuerdings habe ich bemerkt, dass Herr Bäcklund mit Hülfe synthetischer Methoden den ebenen Schnitt und Tangentenkegel der Centrafläche zweiter Art bereits früher untersucht hatte. (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-academiens handlingar, Stockholm 1872, 1873); die von demselben gefundenen Zahlwerthe geben eine erwünschte Bestätigung der obigen ganz allgemeinen Analyse.

§ II.

Rückkehr und parabolische Curve auf den in § I behandelten Flächen.

Zu einer genaueren Untersuchung der auf der Brennfläche befindlichen singulären Curven (Rückkehrcurve, parabolische Curve, Doppelcurve etc.) reichen die vorhergehenden Betrachtungen nicht aus. Auf eine vollständige Behandlung dieser Fragen mit Hülfe algebraischer Methoden, namentlich soweit sie die Doppelcurve betreffen, wird man wohl verzichten müssen; einem Theile derselben lässt sich aber auf dem folgenden Wege näher treten.

Ein Punct der Rückkehrcurve entsteht, wenn drei unendlich benachbarte Strahlen des Systems sich in einem Puncte schneiden; Spitzen der Rückkehrcurve entsprechen dem Fall, wo vier solche Strahlen durch einen Punct gehen. Die erstere Configuration lässt sich auf folgende Art analytisch characterisiren. Die Gleichungen I, 11) ordnen jedem Puncte der Fläche f zwei Puncte ξ_i zu. Dieselben geben die Richtungen dx an, nach denen man auf f fortschreiten muss, um zu dem Fusspuncte eines unendlich nahen Strahles zu gelangen, welcher (x y) im correspondirenden Puncte $z = x + \lambda y$ der Brennfläche trifft. Denn die Gleichung

$$\Sigma f_i \, dx_i = 0$$

und die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ dx_i \\ \Sigma \psi_{ik} dx_k \end{vmatrix} = 0,$$

welche aussagt, dass α, y, $x + dx$, $y + dy$, sich in einer Ebene befinden, sind erfüllt, wenn man setzt

$$1) \qquad dx_i = \alpha \xi_i + \beta x_i.$$

Nimmt man anstatt der Gleichungen I, 6) die der Form nach allgemeineren

$$2) \qquad \varrho z_i = \nu x_i + \lambda f_i,$$

so wird an Stelle von I, 7) treten

$$3) \qquad \frac{d\varrho}{\varrho}(\nu x_i + \lambda f_i) = \nu dx_i + x_i d\nu + \lambda dy_i + y_i d\lambda.$$

Man erhält nun aus 1) und I, 11)

$$dy_i = \Sigma \psi_{ik} dx_k = \alpha \Sigma \xi_k \psi_{ik} + \beta s \psi_i$$
$$= \beta s \psi_i - \alpha (\xi_i + \xi f_i).$$

Trägt man diese Werthe in 3) ein, so entstehen durch Vergleichung der Coefficienten von x_i und y_i auf beiden Seiten die folgenden Relationen

$$\frac{d\varrho}{\varrho} \nu = \nu \beta + d\nu - \xi \alpha,$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} \lambda = \lambda s \beta + d\lambda,$$

oder

$$4) \qquad d\lambda = \lambda \beta (1 - s) + \frac{\lambda}{\nu}(d\nu - \xi \alpha).$$

Die Bedingungen dafür, dass ein weiterer unendlich benachbarter Strahl durch denselben Punct 2) der Brennfläche geht, erhält man, wenn man die Gleichungen 3) unter Annahme eines constanten z_i von neuem differentiirt, in der Form

$$5) \qquad \frac{d^2\varrho}{\varrho}(\nu x_i + \lambda y_i) = \nu d^2 x_i + x_i d^2 \nu + 2 d\nu dx_i + 2 d\lambda \Sigma \psi_{ik} dx_k$$
$$+ \lambda \Sigma \psi_{ikl} dx_k dx_l + y_i d^2 \lambda + \lambda \Sigma \psi_{ik} d^2 x_k;$$

multiplicirt man wieder mit dem ζ_i und addirt, so entsteht aus den Gleichungen 5), da nach I, 10)

$$\nu \Sigma \zeta_i d^2 x_i + \lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i d^2 x_k = - \nu \zeta \Sigma f_i d^2 x_i,$$

wird, und

$$\Sigma f_i d^2 x_i + \Sigma f_{ik} dx_i dx_k = 0,$$

ist,

$$6) \quad \nu \zeta \Sigma f_{ik} dx_i dx_k + 2 d\nu \Sigma \zeta_i dx_i + 2 d\lambda \Sigma \zeta_i \psi_{ik} dx_k + \lambda \Sigma \psi_{ikl} \zeta_i dx_k dx_l = 0.$$

In diese Relation sind noch die Verhältnisse der dx_i aus 1) einzuführen. Man erhält durch einfache Rechnungen

$$\Sigma(\nu \zeta f_{ik} + \lambda \psi_{ikl} \zeta_i) dx_k dx_l = \alpha^2 (\zeta \nu \Sigma f_{lk} \xi_l \xi_k + \lambda \Sigma \psi_{ikl} \xi_i \xi_l \xi_k) + 2 \alpha \lambda \beta (s - 1) \Sigma \zeta_k \xi_l \psi_{kl},$$

$$\Sigma \psi_{ik} dx_k \zeta_i = \alpha \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik},$$

$$\Sigma \zeta_i dx_i = \alpha \Sigma \zeta_i \xi_i.$$

Da aber nach I, 9)

$$\nu \Sigma \zeta_i \xi_i + \lambda \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \xi_k = 0,$$

so folgt aus 6)

$$\alpha^2 (\zeta \nu \Sigma f_{ik} \xi_l \xi_k + \lambda \Sigma \psi_{ikl} \zeta_i \xi_l \xi_k) + 2 \alpha \beta (s - 1) \lambda \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik} - 2 \frac{d\nu}{\nu} \lambda \alpha \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \xi_k + 2 d\lambda \alpha \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik} = 0.$$

Trägt man endlich den Werth 4) von $d\lambda$ ein, so entsteht

$$F = \zeta \nu \Sigma f_{ik} \xi_i \xi_k + \lambda \nu \Sigma \psi_{ikl} \zeta_i \xi_l \xi_k - 2 \lambda \xi \Sigma \psi_{ik} \zeta_i \xi_k = 0,$$

als Bedingung für diejenigen Puncte auf der Fläche f, für welche einer der beiden auf dem zugehörigen Strahle befindlichen Brennpuncte der Rückkehrcurve der Brennfläche angehört.

Man kann diese Bedingung noch auf einem ganz anderen Wege erhalten; doch mag jetzt wieder $\nu = 1$ gesetzt werden. Bezeichnet man nämlich die Unterdeterminanten in der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\lambda\psi_{11} & \lambda\psi_{21} & \lambda\psi_{31} & \lambda\psi_{41} & f_1 \\ \lambda\psi_{12} & 1+\lambda\psi_{22} & \lambda\psi_{32} & \lambda\psi_{42} & f_2 \\ \lambda\psi_{13} & \lambda\psi_{23} & 1+\lambda\psi_{33} & \lambda\psi_{43} & f_3 \\ \lambda\psi_{14} & \lambda\psi_{24} & \lambda\psi_{34} & 1+\lambda\psi_{44} & f_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & o \end{vmatrix} = o,$$

durch Δ_{ik}; i, k = 1, 2, 3, 4, 5, so erkennt man, dass die Proportionen bestehen

$$\begin{aligned}
&\zeta_1\xi_1 : \zeta_2\xi_1 : \zeta_3\xi_1 : \zeta_4\xi_1 : \zeta\xi_1 = \Delta_{11} : \Delta_{21} : \Delta_{31} : \Delta_{41} : \Delta_{51}, \\
&\zeta_1\xi_2 : \zeta_2\xi_2 : \zeta_3\xi_2 : \zeta_4\xi_2 : \zeta\xi_2 = \Delta_{12} : \Delta_{22} : \Delta_{32} : \Delta_{42} : \Delta_{52}, \\
&\zeta_1\xi_3 : \zeta_2\xi_3 : \zeta_3\xi_3 : \zeta_4\xi_3 : \zeta\xi_3 = \Delta_{13} : \Delta_{23} : \Delta_{33} : \Delta_{43} : \Delta_{53}, \\
&\zeta_1\xi_4 : \zeta_2\xi_4 : \zeta_3\xi_4 : \zeta_4\xi_4 : \zeta\xi_4 = \Delta_{14} : \Delta_{24} : \Delta_{34} : \Delta_{44} : \Delta_{54}, \\
&\zeta_1\xi : \zeta_2\xi : \zeta_3\xi : \zeta_4\xi : \xi\xi = \Delta_{15} : \Delta_{25} : \Delta_{35} : \Delta_{45} : \Delta_{55};
\end{aligned}$$

man kann also, wenn der Symmetrie halber ζ und ξ durch ζ_5 und ξ_5 bezeichnet werden, allgemein

$$\zeta_i\xi_k = \mu\Delta_{ik},$$

setzen. Differentiirt man nun die Gleichungen I, 6) zweimal, so entsteht

$$\begin{aligned}
&7) \quad d\varrho z_i + \varrho\, dz_i = dx_i + \lambda\, dy_i + d\lambda y_i; \\
&\quad d^2\varrho z_i + 2\, d\varrho\, dz_i + \varrho\, d^2 z_i = d^2 x_i + 2\, d\lambda\, dy_i + \lambda\, d^2 y_i + d^2\lambda y_i.
\end{aligned}$$

Nimmt man in diesen Gleichungen $d^2 z_i \equiv dz_i$, so entspricht die Richtung, nach welcher man alsdann auf f fortzuschreiten hat, einer Haupttangente der Brennfläche. Multiplicirt man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen 7) mit ζ_i, i = 1, 2, 3, 4 und addirt, so entsteht nach I, 10)

$$\Sigma\zeta_i d^2 x_i + 2\, d\lambda\, \Sigma\zeta_i dy_i + \lambda\Sigma\zeta_i d^2 y_i = o;$$

oder, wenn man

$$dy_i = \Sigma\psi_{ik} dx_k,$$

$$d^2 y_i = \Sigma\psi_{ikl} dx_k dx_l + \Sigma\psi_{ik} d^2 x_k,$$

setzt:

$$\Sigma\zeta_i d^2 x_i + \lambda\Sigma\psi_{ik}\zeta_i d^2 x_k + \lambda\Sigma\psi_{ikl}\zeta_i dx_k dx_l + 2\, d\lambda\Sigma\zeta_i\psi_{ik} dx_k = o,$$

oder nach I, 10)

$$8) \quad \zeta\Sigma f_{ik} dx_i dx_k + \lambda\Sigma\psi_{ikl}\zeta_i dx_k dx_l + 2\, d\lambda\Sigma\zeta_i\psi_{ik} dx_k = o.$$

Differentiirt man nun auch die Gleichung $\Delta = 0$, so ergiebt sich unter Benutzung der zuvor aufgeführten Unterdeterminanten Δ_{ik}

$$\Sigma(d\lambda\psi_{ik} + \lambda\psi_{ikt}dx_t)\Delta_{ik} + \Sigma\Delta_{i5}dx_i + \Sigma f_{ik}dx_k\Delta_{5i} = 0,$$

oder

9) $$d\lambda\Sigma\zeta_i\xi_k\psi_{ik} + \lambda\Sigma\psi_{ikt}\zeta_i\xi_k dx_t + \zeta\Sigma dx_i\zeta_i + \zeta\Sigma f_{ik}\xi_i dx_k = 0.$$

Verbindet man mit den Gleichungen 8) und 9) noch die beiden

$$\Sigma p_i dx_i = 0, \quad \Sigma f_i dx_i = 0,$$

wo die p_i willkürliche Coefficienten bedeuten, so erhält man die beiden Richtungen, welche den Haupttangenten der Brennfläche auf der Fläche f entsprechen, ausgedrückt durch eine zwischen den dx, $d\lambda$ bestehende quadratische Relation. Die Bedingung, unter der diese Richtungen coincidiren, liefert Puncte, welche entweder der parabolischen oder der Rückkehrcurve auf der Brennfläche entsprechen. Beide Curven zugleich sind also characterisirt durch das Verschwinden der 8 reihigen Determinante, in welcher die Indices i, k in den ersten vier Horizontal- und Verticalreihen gleich 1, 2, 3, 4 zu setzen sind:

$$\begin{vmatrix} \zeta f_{ik} + \lambda\Sigma\psi_{tik}\zeta_t, & \Sigma\zeta_s\psi_{sk}, & \lambda\Sigma\psi_{tmk}\zeta_t\xi_m + \zeta\Sigma f_{tk}\xi_t + \xi\zeta_k, & f_k, & p_k, \\ \Sigma\zeta_s\psi_{si}, & 0 & \Sigma\psi_{st}\zeta_s\xi_t & 0 & 0 \\ \lambda\Sigma\psi_{tmk}\zeta_t\xi_m + \zeta\Sigma f_{ti}\xi_t + \xi\zeta_i, & \Sigma\psi_{st}\zeta_s\xi_t & 0 & 0 & 0 \\ f_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante lässt sich durch folgende Transformationen in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine F ist, während der andere, welcher durch G bezeichnet werden soll, sich auf die Puncte der parabolischen Curve bezieht. Multiplicirt man nämlich die ersten vier Reihen mit den ξ_i und subtrahiert von der sechsten, so treten an Stelle der in dieser befindlichen Elemente die folgenden

$$\begin{matrix} \xi\zeta_1 \\ \xi\zeta_2 \\ \xi\zeta_3 \\ \xi\zeta_4 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\xi\zeta_1, \xi\zeta_2, \xi\zeta_3, \xi\zeta_4, 0, -\lambda\Sigma\psi_{tmi}\zeta_t\xi_m\xi_i - \zeta\Sigma f_{kt}\xi_k\xi_t - 2\xi\Sigma\zeta_i\xi_i, 0, -\Sigma\xi_i p_i$$

$$\begin{matrix} 0 \\ -\Sigma\xi_i p_i. \end{matrix}$$

Multiplicirt man ferner die fünfte Reihe mit $(s-1)\lambda$ und subtrahiert wieder die Summe der ersten vier mit den x_i multiplicirten von derselben, so werden alle Terme in dieser Reihe bis auf einen gleich Null, und es kann demnach der Factor $(\Sigma p_i x_i)^2$ abgesondert werden. Endlich addire man noch einmal die mit den x_i multiplicirten vier ersten Reihen zur nunmehrigen fünften Reihe. Den Gleichungen

$$\Sigma(\zeta f_{ik} + \lambda \psi_{tik} \zeta_t) x_i = (n-1)\zeta f_k + \lambda(s-1)\Sigma \psi_{tk} \zeta_t$$
$$= (n-s)\zeta f_k - (s-1)\zeta_k,$$

zufolge lässt sich dann bewirken, dass in dieser Reihe alle Terme bis auf den einen

$$\lambda \Sigma \psi_{tmi} \zeta_t \xi_m \xi_i + \zeta \Sigma f_{ti} \xi_t \xi_i + 2\xi \Sigma \zeta_i \xi_i,$$

gleich Null werden, womit die ganze Determinante in diesen Factor und den folgenden

$$10) \qquad G = \begin{vmatrix} \zeta f_{ik} + \lambda \Sigma \psi_{tki} \zeta_t & f_k \\ f_i & o \end{vmatrix},$$

zerfällt. Da endlich nach I, 10)

$$\Sigma \zeta_i \xi_i + \lambda \Sigma \zeta_i \psi_{ik} \xi_k = o,$$

so wird der Werth jenes ersten Factors

$$\lambda \Sigma \psi_{tmi} \zeta_t \xi_m \xi_i + \zeta \Sigma f_{ik} \xi_i \xi_k - 2\lambda \xi \Sigma \zeta_i \xi_k \psi_{ik},$$

welcher in der That mit dem oben durch F bezeichneten Ausdrucke identisch ist.

Die Bedingung für die parabolische Curve der Brennfläche ist also

$$G = o.$$

Entwickelt man G nach Potenzen von λ, so wird der Coefficient von λ^3

$$\begin{vmatrix} \Sigma \psi_{tki} \zeta_t & f_k \\ f_i & o \end{vmatrix};$$

bezeichnet man ferner die Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante, genommen nach den Elementen f_{ik}, durch H_{ik}, so wird der Coefficient von λ^2

$$-\left(\frac{s-1}{n-1}\right)^2 \zeta \Sigma \zeta_t \psi_{tk} \zeta_m \psi_{mi} H_{ik},$$

während die übrigen Coefficienten verschwinden, so dass die Bedingung $G = o$ durch folgende Gleichung repräsentirt ist

$$\lambda \begin{vmatrix} \Sigma \psi_{tki} \zeta_t & f_k \\ f_i & o \end{vmatrix} - \left(\frac{s-1}{n-1}\right)^2 \zeta \Sigma \zeta_t \psi_{tk} \zeta_m \psi_{mi} H_{ik} = o,$$

der auch noch mit Hilfe von I, 10) manche andere Formen gegeben werden können.

§ III.

Der Hauptschnitt der Fläche in Bezug auf das Strahlensystem.

Auf der Brennfläche liegen ausser den beiden Berührungscurven mit den Flächen f und Φ, der durch das Verschwinden der Discriminante von I, 4) characterisirten Curve vierpunctiger Berührung, etc. . . . noch andere Curven, deren Betrachtung von Interesse scheint. Nur eine derselben möge hier noch genauer betrachtet werden.

Die beiden Richtungen auf der Fläche f, welche zu den benachbarten sich schneidenden Strahlen des Systems gehören, sind bestimmt durch die Gleichung

$$o = \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ dx_i \\ \Sigma \psi_{ik} dx_k \end{vmatrix} = \Sigma A_{mn} dx_m dx_n,$$

wobei

$$2 A_{mn} = \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ \partial x_i \\ \hline \partial x_m \\ \psi_{in} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ \partial x_i \\ \hline \partial x_n \\ \psi_{im} \end{vmatrix},$$

und

$$A_{mn} = A_{nm},$$

ist. Die Fläche

$$1) \qquad \Sigma A_{mn} z_m z_n = o,$$

ist eine Kegelfläche K, welche durch den Punct y geht und deren Spitze sich in x befindet, wie aus den Gleichungen

$$2) \qquad \begin{aligned} \Sigma A_{mn} x_n &= 0, \\ \Sigma A_{mn} \psi_m \psi_n &= 0, \end{aligned}$$

hervorgeht. Die Coefficienten A_{mn} genügen überdies den Gleichungen

$$3) \qquad \begin{aligned} \Sigma A_{mn} \psi_m \psi_{nt} \psi_t = 0, \ \Sigma A_{mn} \psi_{mn} &= 0, \\ \Sigma A_{mn} \psi_{mt} \psi_t \psi_{nk} \psi_k &= \Theta, \end{aligned}$$

falls

$$4) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} x_i \\ \psi_i \\ \Sigma \psi_{it} \psi_t \\ \Sigma \psi_{in} \psi_{nk} \psi_k \end{vmatrix},$$

gesesetzt wird.

Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Determinante der ψ_{ik} nach den Elementen ψ_{ik} durch Ψ_{ik}, so ist

$$5) \qquad \Sigma A_{mn} \Psi_{mn} = 0,$$

und endlich wird

$$6) \qquad \Sigma A_{nn} = (\psi_{21} - \psi_{12})(x_3 \psi_4 - x_4 \psi_3) + (\psi_{13} - \psi_{31})(x_2 \psi_4 - x_4 \psi_2) + \ldots;$$

verschwindet also z. B., wenn $\psi_{ik} = \psi_{ki}$, d. h. wenn die ψ_i Differentialquotienten ein und derselben Function sind. Soll der Kegel K in ein Ebenenpaar zerfallen, so ist

$$2 A_{mn} = \alpha_m \beta_n + \alpha_n \beta_m.$$

Durch Anwendung der Gleichungen 2), 3) folgt unmittelbar

$$\begin{gathered} \alpha_x \beta_n + \alpha_n \beta_x = 0, \\ \Sigma \alpha_i \psi_i \Sigma \beta_k \psi_k = 0, \\ \Sigma \alpha_i \psi_i \Sigma \beta_n \psi_{nt} \psi_t + \Sigma \beta_i \psi_i \Sigma \alpha_n \psi_{nt} \psi_t = 0, \\ \Theta = \Sigma \alpha_n \psi_{nk} \psi_k \Sigma \beta_m \psi_{mk} \psi_k. \end{gathered}$$

Da nun die β_i den α_i nicht proportional sein können, so folgt

$$\begin{gathered} \alpha_x = 0, \ \beta_x = 0, \\ \Sigma \alpha_i \psi_i = 0, \\ \Sigma \alpha_n \psi_{nt} \psi_t = 0, \end{gathered}$$

welche Bedingungen auch $\Theta = 0$ nach sich ziehen. Die Bedingung Θ ist aber auch umgekehrt hinreichend, wenn der Kegel in ein Ebenenpaar zerfallen soll, und zwar lassen sich die Gleichungen dieser Ebenen dann immer, wie aus den eben angegebenen Relationen für die α_i folgt, rational, ohne Auflösung einer quadratischen Gleichung, angeben. Dies lässt sich auf folgendem Wege zeigen.

Wenn Θ verschwindet, so gibt es Werthe der α_i, welche den Gleichungen

$$7) \qquad \begin{aligned} &\Sigma \alpha_i x_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_i \psi_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_i \psi_{it} \psi_t = 0, \\ &\Sigma \alpha_i \psi_{in} \psi_{nk} \psi_k = 0, \end{aligned}$$

genügen. Die α_i sind also den Determinanten der Matrix

$$7\,a) \qquad \left\| \begin{matrix} x_i \\ \psi_i \\ \Sigma \psi_{it} \psi_t \end{matrix} \right\|,$$

gleich. Schreibt man aber an Stelle der letzten 3 Gleichungen 7)

$$\begin{aligned} &\Sigma \alpha_s \psi_{si} x_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_s \psi_{si} \psi_i = 0, \\ &\Sigma \alpha_s \psi_{si} \psi_{it} \psi_t = 0, \end{aligned}$$

so erkennt man, dass

$$8) \qquad \alpha_i = \lambda \Sigma \alpha_s \psi_{si},$$

wird. Demzufolge ist für beliebige Werthe der Coefficienten c_i

$$2 \Sigma A_{mn} \psi_m c_n = \Sigma c_i \alpha_i.$$

Ferner wird

$$2 \Sigma A_{mn} \psi_{np} \psi_p c_m = \left| \begin{matrix} x_i \\ \psi_i \\ c_i \\ \Sigma \psi_{in} \psi_{np} \psi_p \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} x_i \\ \psi_i \\ \Sigma \psi_{ip} \psi_p \\ \Sigma \psi_{im} c_m \end{matrix} \right|,$$

$$= \sigma \Sigma c_i \alpha_i + \Sigma c_m \psi_{im} \alpha_i,$$

wo σ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Dieser Werth geht aber nach 8) über in

$$(\sigma + \lambda) \Sigma c_i \alpha_i.$$

Mithin wird

$$\Sigma c_m A_{mn} \{\psi_{np} \psi_p - (\sigma + \lambda) \psi_n\} = 0,$$

aus welcher Beziehung hervorgeht, dass der Kegel K den Punct

$$u_i = \Sigma \psi_{ip} \psi_p - (\sigma + \lambda) \psi_i,$$

ebenfalls zur Spitze hat, und demgemäss in 2 Ebenen zerfallen muss. Demnach folgt:

Der Kegel K (1) zerfällt längs der Curve $2n[3s - 1]$ Ordnung $f = 0$, $\Theta = 0$ rational in die beiden Focalebenen der Brennfläche, welche zu seiner Spitze gehören.

Die Fläche Θ hat, wie eine einfache Betrachtung zeigt, die Curve von der Ordnung

$$(1 + 7s^2 - 2s)$$

für welche die Matrix 7a) verschwindet, zur Doppelcurve. Demnach besitzt die Curve $f = 0$, $\Theta = 0$, welche man als einen Hauptschnitt von f bezeichnen kann, im Ganzen

$$n(1 + 7s^2 - 2s)$$

Doppelpuncte.

Die Form Θ lässt sich noch auf eine andere Weise erhalten. Denn die Bedingungen 8) drücken aus, dass die Gleichung vierten Grades

$$\Omega = \left| 1 + \lambda \psi_{ik} \right| = 0,^{1})$$

erfüllt ist, d. h. dass sie mit der Gleichung zweiten Grades $\Delta = 0$, eine gemeinsame Wurzel hat, da auch $\Sigma \alpha_i x_i = \Sigma \alpha_i \psi_i = 0$ ist. Daraus folgt:

Die Form Θ ist ein Factor der Resultante R der Formen Δ und Ω.

Der andere Factor lässt sich leicht ebenfalls angeben. Setzt man nämlich

$$\Sigma \xi_i f_i = 0,$$
$$\Sigma \xi_k \psi_{ki} f_i = 0,$$
$$\Sigma \xi_k \psi_{kn} \psi_{ni} f_i = 0,$$
$$\Sigma \xi_s \psi_{sk} \psi_{kn} \psi_{ni} f_i = 0,$$

1) Nur die Elemente der Hauptdiagonale enthalten den Summanden 1.

so folgt

$$\xi_i + \mu \Sigma \xi_k \psi_{ki} = 0;$$

demnach ist auch die Form

$$\Theta' = \begin{vmatrix} f_i \\ \Sigma \psi_{ki} f_i \\ \Sigma \psi_{kn} \psi_{ni} f_i \\ \Sigma \psi_{sk} \psi_{kn} \psi_{ni} f_i \end{vmatrix},$$

ein Factor der Resultante R. In der That ist auch Θ' eine Form $6(s-1)+4(n-1)$ Ordnung, während R von der Ordnung $8(s-1)+4(s+n-1)$ ist, so dass die Summe der Ordnungen von Θ und Θ' gleich der von R ausfällt. Beachtet man ferner, dass die Resultante R von der Form

$$R = P^2 - Q^2 \Psi,$$

ist, wo Ψ die Discriminante von Δ bedeutet, so folgt aus der Gleichung

$$\Theta \Theta' \equiv P^2 - Q^2 \Psi,$$

Jede der beiden Curven $f = 0$, $\Theta \Theta' = 0$, berührt die auf f durch $\Psi = 0$ ausgeschnittene Curve ψ, welche einer Curve vierpunctiger Berührung Ψ auf der Brennfläche entspricht, in allen gemeinsamen Puncten. Die Curve ψ scheidet auf f diejenigen Puncte, dessen reelle Puncte der Brennfläche zugehören von solchen, denen nur imaginäre Puncte entsprechen.

§ IV.

Die projective Centrafläche erster Art.

Man kann die beiden in § 2) entwickelten Formen F und G zu einer weiteren Untersuchung der ihnen entsprechenden singulären Curven auf der Brennfläche verwenden. Doch sehe ich hiervon zunächst ab, da die Elimination der in ihnen mit ζ und ξ bezeichneten Grössen nicht auf einfache Bildungen führt. Für die projectiven Centraflächen, bei denen $\psi_i = f_i$ zu setzen ist, treten besondere Vereinfachungen ein; nur diese sollen hier erörtert werden, da die Verfolgung des allgemeinen Falles

ein geringeres Interesse zu bieten scheint. Setzt man, wie in § I, 8) für $\psi_i = f_i$

$$1) \qquad \frac{\Delta}{n-1} = -\begin{vmatrix} 1+\lambda f_{ik} & f_i \\ f_k & 0 \end{vmatrix} = A + B\lambda + C\lambda^2,^{1})$$

so wird nach der daselbst ausgeführten Entwickelung

$$2) \qquad \begin{aligned} A &= \Sigma f_i^2, \\ B &= \Sigma f_i^2 \Sigma f_{ii} - \Sigma f_i f_k f_{ik}, \\ (n-1)^2 C &= -XH, \end{aligned}$$

falls H die Hesse'sche Determinante von f bezeichnet. Für den Coefficienten B erhält man auch die folgende Darstellung

$$3) \qquad (n-1)^2 B = -X\Sigma H_{ii} + \Sigma x_i \alpha_k H_{ik},$$

wobei wieder H_{ik} die zu f_{ik} gehörige Unterdeterminante von H bezeichnet. Die letztere Gleichung folgt aus einer allgemeinen Identität, welche auch bei anderen Gelegenheiten mit Nutzen gebraucht werden kann (vgl. z. B. § X). Setzt man nämlich

$$4) \qquad \begin{aligned} \Omega &= \left| 1 + \lambda f_{ik} \right| \\ &= 1 + \lambda\Sigma f_{ii} + \lambda^2 \varepsilon + \lambda^3 \Sigma H_{ii} + \lambda^4 H, \end{aligned}$$

so lässt sich der Ausdruck Δ in doppelter Weise durch einfache Umformungen nach Potenzen von λ entwickeln. Man erhält so z. B.

---

1) Die Gleichung $\Delta = 0$ besitzt einen invarianten Character. Wählt man für X die Form

$$X = \Sigma a_{ik} x_i x_k,$$

so ist für ψ_i zu setzen

$$\psi_i = \Sigma f_s \alpha_{is}, \quad f_k = \Sigma \psi_i a_{ik},$$

wo die α_{is} die durch die Determinante δ von X dividirten Coefficienten der zugeordneten Form von X sind. An Stelle der Gleichung des Textes tritt dann die folgende

$$\frac{\Delta}{n-1} = -\begin{vmatrix} a_{ik}+\lambda f_i f_k & f_i \\ f_k & 0 \end{vmatrix} = A + B\lambda + C\lambda^2$$

wobei

$$\frac{A}{\delta} = \Sigma f_i f_k \alpha_{ik}$$

$$\frac{B}{\delta} = \Sigma f_i f_k \alpha_{ik} \Sigma f_{mn} \alpha_{mn} - \Sigma f_{ik} f_s f_t \alpha_{is} \alpha_{sk}$$

$$C = -\frac{HX}{(n-1)^2}$$

zu setzen ist.

$$\Delta = A + \lambda B + \lambda^2 (\Sigma (f_{sk} f_s)(f_{tk} f_t) + A \varepsilon - \Sigma f_{ii} \Sigma f_i f_k f_{ik}) + \frac{\lambda^3 n f H}{n-1}$$

und auf einem anderen Wege

$$\Delta = A + \frac{\lambda}{(n-1)^2} \left\{ n(n-1) f \varepsilon + \Sigma x_i x_k H_{ik} - X \Sigma H_{ii} \right\}$$
$$+ \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} \left\{ n(n-1) f \Sigma H_{ii} - X H \right\} + \lambda^3 \frac{n}{n-1} f H;$$

so dass allgemein die Identitäten bestehen

$$(n-1)^2 (A \Sigma f_{ii} - \Sigma f_i f_k f_{ik}) = n(n-1) f \varepsilon + \Sigma x_i x_k H_{ik} - X \Sigma H_{ii},$$
$$(n-1)^2 \{ \Sigma (f_{sk} f_s)(f_{tk} f_t) + A \varepsilon - \Sigma f_{ii} \Sigma f_{ik} f_i f_k \} = n(n-1) f \Sigma H_{ii} - X H,$$

aus denen für $f = o$ wieder die Gleichung 2) folgt.

Bezeichnet man die beiden Wurzeln von $\Delta = o$, wie früher, durch λ_1, λ_2, die zugehörigen Werthe der ζ_i (I, 10) in entsprechender Weise, so folgt

$$5) \qquad \Sigma \zeta_i^1 \zeta_i^2 = o,$$
$$\Sigma \zeta_i^1 \zeta_i^2 f_{ik} = o.$$

Eine Vergleichung der beiden Gleichungssysteme I, 10), 11) zeigt ferner, dass

$$6) \qquad \xi_i = - \zeta x_i - (n-1) \lambda \zeta_i \frac{\xi}{\zeta};$$

in der That erfüllen diese Werthe der ξ_i die Gleichungen

$$\xi_i + \lambda \Sigma \xi_k f_{ik} + \xi x_i = o, \quad \Sigma \xi_i f_i = o,$$

wenn die ζ_i den Gleichungen

$$7) \qquad \zeta_i + \lambda \Sigma \zeta_k f_{ik} + \zeta f_i = o, \quad \Sigma \zeta_i x_i = o, \quad \Sigma \zeta_i f_i = o$$

genügen. Die Gleichungen 5) liefern nunmehr das übrigens bekannte Resultat:

Die Richtungen der projectiven Krümmungslinien, welche durch den Punct x gehen, bilden das gemeinsame harmonische Strahlenpaar zu den Haupttangenten der Fläche f und den beiden Tangenten von X, welche von x in der Tangentenebene an X gehen. Die Richtungen der Krümmungs-

linien stehen daher im allgemeinen aufeinander senkrecht. Eine Ausnahme hievon tritt nur ein für die Curve ψ (§ 3), wo die Krümmungslinien Spitzen haben, und für die Curve $X = o$, $f = o$.

Für die Puncte der Curve $X = o$, $f = o$ fällt die Richtung der einen Krümmungslinie mit der Tangente dieser Curve zusammen, sie entspricht dem endlichen Wurzelwerthe λ. Die Curve $X = o$, $f = o$ ist also eine algebraische Krümmungslinie der Fläche; die Richtung der anderen Krümmungslinie hat zur Tangente die vierte harmonische Gerade zu jener und den beiden Haupttangenten der Fläche; sie gehört zu dem Werthe $\lambda = \infty$. — Für die Puncte der parabolischen Curve von f fällt die Richtung einer Krümmungslinie zusammen mit der der parabolischen Tangente, sie gehört zu der Wurzel $\lambda = \infty$; der andere ist wieder durch den vierten harmonischen Strahl zu diesem und den beiden an X gezogenen Tangenten bestimmt. — In den Puncten $H = o$, $X = o$, $f = o$ sind daher die Richtungen der Krümmungslinien durch die parabolische Tangente und die der Tangente der Curve $f = o$, $X = o$ gegeben.

Ist dagegen $A = o$, so ist der Wurzel $\lambda = o$ entsprechend $\zeta_i = f_i$ zu setzen; d. h. der betreffende Strahl des Systems, die projective Normale, liegt in der Tangentenebene und liefert die Richtung einer Krümmungslinie, während die andere Krümmungslinie bestimmt ist durch die Fortschreitungsrichtung dx_i, welche der Gleichung

$$\Sigma f_{ik} f_i dx_k = o,$$

genügt, d. h. sie fällt mit der Tangente an die Curve $f = o$, $A = o$ zusammen. Diese letztere ist also eine zweite algebraische Krümmungslinie der Fläche f. In den Puncten $H = o$, $A = o$, $f = o$ endlich besteht das System der Krümmungslinientangenten aus der parabolischen Tangente, welche zugleich Tangente der algebraischen Krümmungslinie ist, und der Richtung des Strahles $(x_i f_i)$.

Die Centrafläche berührt, wie aus § 1 folgt, die Fläche f längs der algebraischen Krümmungslinie $2n(n-1)$. Ordnung $f = o$, $A = o$. Sie berührt die reciproke Fläche von f längs der Curve $2n(n-1)$. Ordnung, welche der algebraischen Krümmungslinie $2n$. Ordnung $X = o$, $f = o$ entspricht,

und die gemeinschaftlichen Tangentenebenen berühren zugleich die Fläche X in den Puncten dieser letzteren Curve. Endlich entspricht der parabolischen Curve $H = 0$, $f = 0$ eine Rückkehrcurve $4n(n-1)(n-4)$. Ordnung auf der reciproken Fläche; die Centrafläche enthält auch diese Curve, ohne die Rückkehrtangentenebene zu berühren.

In den Puncten der Curve ψ, welche bestimmt ist durch

$$8) \qquad f = 0, \quad \Psi = B^2 - 4AC = 0,$$

fallen die Richtungen der Krümmungslinien zusammen. Diese Curve $n(6n-8)$. Ordnung zerlegt f in zwei Gebiete; in dem einen sind die Richtungen der Krümmungslinien reell, in dem anderen imaginär; längs derselben haben, wie schon bemerkt, die Krümmungslinien Spitzen; die projective Normale berührt die Centrafläche vierpunctig. Das Verschwinden der Discriminante von Δ drückt aber bekanntlich aus, dass die betreffenden Werthe von ζ_i den beiden Bedingungen

$$\Sigma \zeta_i^2 = 0,$$
$$\Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} = 0,$$

genügen. Die Curve ψ ist daher auch der Ort der Puncte auf f, deren eine Haupttangente die Fläche X berührt.

Auf ψ wird es noch eine endliche Zahl von Puncten geben, in denen beide Haupttangenten von f gleichzeitig X berühren. Diese Puncte, die Kreispuncte von f, sind daher Doppelpuncte von ψ und dadurch bestimmt, dass für Werthe der y_i, welche der Gleichung

$$\Sigma y_i f_i = 0$$

genügen, die beiden Formen

$$\Sigma f_{ik} y_i y_k$$

und

$$X \Sigma y_i^2 - (\Sigma x_i y_i)^2$$

bis auf einen Factor ϱ identisch werden.

Für die Kreispuncte bestehen daher die Relationen

$$\varrho (X [ik] - x_i x_k) = f_{ik} + \alpha_i f_k + \alpha_k f_i,$$
$$i, k = 1, 2, 3, 4;$$

wobei $[i\,k]$ an Werth Null für $i \lesseqgtr k$ hat, für $i = k$ aber gleich o zu setzen ist. Da alsdann

$$\Sigma f_{i\,k}\,dx_k = \varrho\,(X\,dx_i - x_i\,\Sigma x_k\,dx_k) - f_i\,\Sigma \alpha_k\,dx_k,$$

wird, so sind die Gleichungen II, 3) für jedes dx_i erfüllt, welches der Gleichung $\Sigma f_i\,dx_i = o$ genügt, falls

$$\nu + \lambda\,\varrho\,X = o,$$

genommen wird. Die Kreispuncte geben also zu Hauptpuncten des Systems der Normalen Veranlassung; jede benachbarte Normale begegnet der Normale des Kreispunctes in demselben Puncte der Centrafläche, der ersichtlich ein Doppelpunct derselben wird. Zu einem Kreispuncte gehören unendlich viele auf einer Geraden gelegenen Puncte ζ_i der Reciprokalfläche der Centrafläche; man erhält daraus unmittelbar den folgenden Satz:

Jedem Kreispuncte entspricht auf der Reciprokalfläche der Centrafläche eine gerade Linie mit constanter Tangentialebene.

Die Anzahl der Kreispuncte selbst würde man mit Hülfe der obigen Bedingungen wohl nicht leicht ermitteln können. Sie lässt sich mittelst des von Herrn Schubert zuerst allgemein axiomatisch formulierten „Principes der Erhaltung der Anzahl“ leicht gewinnen. Degenerirt nämlich X in einen Kegelschnitt, so gehen die Puncte, in denen beide Haupttangenten von f dieselbe berührten, über in diejenigen, für welche jene Geraden gleichzeitig den Grenzkegelschnitt treffen, d. h. in die eigentlichen Kreispuncte von f, und diejenigen Puncte, in denen der Grenzkegelschnitt selbst die Fläche f trifft. Demnach beträgt die Anzahl der projectiven Kreispuncte

$$K = n\,[10\,n^2 - 28\,n + 24].$$

Eine analytische Bestimmung dieser Zahl kann man auf folgendem Wege erhalten. Die in § III behandelte Kegelfläche

$$K = \Sigma A_{m\,n}\,z_m\,z_n = o,$$

welche zu jedem Puncte der Fläche f gehört, hat für den vorliegenden

Fall die bemerkenswerthen invarianten und einer einfachen geometrischen Deutung fähigen Eigenschaften

$$\Sigma A_{ii} = 0,$$
$$\Sigma A_{ik} H_{ik} = 0,$$
$$\Sigma A_{ik} f_{ik} = 0,$$
$$\Sigma A_{ik} f_i f_k = 0.$$

Zerfällt K in das Product zweier Ebenen $\alpha_z \beta_z$, so ist demnach

$$8) \qquad \Sigma \alpha_i \beta_i = 0,$$

$$\text{und } \alpha_z = \begin{vmatrix} z_i \\ x_i \\ f_i \\ \Sigma f_{ik} f_k \end{vmatrix}.$$

Dies Zerfallen tritt aber längs des durch $\Theta = 0$, $f = 0$ bestimmten Hauptschnittes $(6n - 8)n$. Ordnung mit $n(7n^2 - 16n + 10)$ Doppelpuncten ein. Da nun für jeden Kreispunct von f der Kegel K insbesondere in die Tangentialebene von f und die Ebene α_z zerfällt, so folgt:

Der Hauptschnitt der Fläche f enthält die sämmtlichen Kreispuncte derselben.

Die Anzahl der Kreispuncte K ist demnach doppeltzählend unter der Zahl der Schnittpuncte der drei Flächen

$$\Psi = 0, \ \Theta = 0, \ f = 0$$

enthalten. In den übrigen Schnittpuncten, welche Ψ und Θ mit f gemein haben, wird die Doppelkante des zerfallenden Kegels K sich in der Tangentenebene von f befinden, weil sämmtlichen Puncten von $\Psi = 0$, $f = 0$ zusammenfallende Focalebenen der Brennfläche zugehören. Verlangt man daher, dass

$$\alpha_i = \beta_i + \sigma f_i$$

sei, wie dies für die ebengenannten Puncte stattfinden muss, so erhält man aus 8) die Bedingung

$$\Sigma \alpha_i^2 = 0$$

oder

$$P = X(AF - E^2) - (n-1)^2 A^3 = 0,$$

wenn für einen Augenblick

$$\Sigma (f_{ik} f_k)(f_{is} f_s) = F,$$
$$\Sigma f_i f_k f_{ik} = E,$$

gesetzt wird. Die Fläche P von der $6(n-1)$. Ordnung schneidet die Curve $f = o$, $\Theta = o$ in

$$12(n-1)(3n-4)n,$$

Puncten, sie hat, wie man unmittelbar sieht, die auf f liegenden Doppelpuncte von Θ gleichfalls zu Doppelpuncten. Entfernt man diese, wie es sein muss, vierfach von der eben gefundenen Zahl, so erhält man als Zahl der Puncte, in denen ψ und Θ auf f ausser den Kreispuncten sich begegnen

$$n[12(n-1)(3n-4) - 4(7n^2 - 16n + 10)] = y.$$

Aber alle diese Puncte sind doppelt zu rechnen, weil in ihnen der Hauptschnitt die Curve ψ berührt. Es geht dies aus der zu Ende des § III gemachten Bemerkung hervor, nach der jene Resultate die Form

$$R = \Theta\,\Theta'$$

hat. In dem Falle $\psi_{ik} = f_{ik}$ aber findet man überdies durch Multiplication der Determinante Θ mit der Hesse'schen Form H unmittelbar

$$\Theta' = H\,\Theta.$$

Demnach ist

$$R = P^2 - \Psi G^2 = \Theta^2 H,$$

d. h. es ist die Form Θ die Quadratwurzel aus der durch H dividirten Resultante R der Formen Δ und Ω.

Sonach wird

$$2K = n(6n-8)^2 - 2y = n(20n^2 - 56n + 48),$$

und zugleich hat man den Satz:

Der Hauptschnitt der Fläche f geht durch die Kreispuncte derselben und berührt die Ortscurve der Spitzen der Krümmungslinien in allen übrigen

$$4n(2n-1)(n-2)$$

Puncten, wo er dieselbe trifft.

Eine andere Bestimmung der Anzahl der Kreispuncte wird sich im folgenden § ergeben.

§ V.

Die Rückkehrcurve der Centrafläche.

In § IV ist gezeigt worden, dass

$$\xi_i = \xi x_i + \lambda (n-1) \zeta_i \frac{\xi}{\zeta},$$

zu setzen ist. Werden diese Werthe in die Form F (§ II) eingeführt, so ergiebt sich, falls der unwesentliche Factor $(n-1)^2 \lambda^2 \frac{\xi^2}{\zeta^2}$ fortgelassen wird, nach einigen einfachen Reductionen

$$1) \qquad F = 3 \zeta \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} + \lambda \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt} = 0.$$

Setzt man hier

$$\zeta_i = \eta_i + \sigma x_i,$$

und wählt für σ den Werth

$$\sigma = -\frac{\zeta}{\lambda (n-2)},$$

so tritt an Stelle von F die einfache Form

$$2) \qquad F = \Sigma \eta_i \eta_k \eta_t f_{ikt} = 0,$$

und zugleich wird

$$3) \qquad \xi_i \equiv \eta_i + \frac{1}{n-2} \zeta_i,$$

$$x_i \equiv \eta_i - \zeta_i,$$

Die Puncte ξ, η, ζ sind durch folgende Construction bestimmt. Zu jedem Puncte x der Fläche f gehört ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung

$$\Sigma y_i^2 + \lambda \Sigma y_i y_k f_{ik} = 0,$$

gebildet von der Fläche X und der Polarfläche P_2 von f. In demselben befinden sich, den beiden Wurzeln λ_1, λ_2 von Δ entsprechend, zwei Flächen, welche die Tangentenebene von f berühren; die Berührungspuncte sind die beiden Puncte ζ_i. Der Punct ξ_i liegt auf der Geraden $(x \zeta)$, zugleich aber auf der Polarebene des Punctes f_i in Bezug auf P_2, da

$$\Sigma \xi_k f_i f_{ik} = 0.$$

Construirt man nun auf der Geraden $(x\zeta)$ den Punct η so, dass das Doppelverhältniss

$$(x\ \zeta\ \xi\ \eta)$$

den constanten Werth

$$\frac{n-1}{n-2}$$

hat, so wird x zu einem Puncte der Rückkehrcurve der Centrafläche gehören, wenn η auf der dritten Polarfläche 2) von x liegt.

Für die Fläche dritter Ordnung ergiebt sich daraus die einfache Beziehung:

Die Rückkehrcurve der Centrafläche der Fläche dritter Ordnung ist dadurch characterisirt, dass der Punct η der Fläche dritter Ordnung selbst angehört, und die Puncte ζ, η liegen nach 3) harmonisch zu ξ und x.

Zur weiteren Behandlung der Form F ist es erforderlich, dieselbe von den ζ_i zu befreien, deren Producte den Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1+\lambda f_{ik} & f_i \\ f_i & o \end{vmatrix} = -\frac{\Delta}{(n-1)\lambda},$$

proportional sind.

Zu diesem Zwecke setze ich

$$-\left\{\sum_1^5 (\alpha_i \zeta_i)\right\}^2 = \begin{vmatrix} 1+\lambda f_{ik} & f_i & \alpha_i \\ f_k & o & \alpha_5 \\ \alpha_k & \alpha_5 & o \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha_5^2 \Omega - 2\alpha_5 \binom{f}{\alpha} + \binom{f\alpha}{f\alpha},$$

wobei zur Abkürzung für die ein- oder zweimal geränderte Determinante Ω die eingeklammerten Ausdrücke gesetzt sind, und zugleich die Grösse ζ durch ζ_5 der Symmetrie halber bezeichnet worden ist. Man erhält dann, wenn

$$\binom{f\alpha}{f\alpha} = L + M\lambda + N\lambda^2,$$

gesetzt wird, durch ein analoges Verfahren wie früher,

$$L = A \Sigma \alpha_i^2 - (\Sigma \alpha_i f_i)^2,$$
$$(n-1)^2 N = -H \alpha_x^2,$$
$$(n-1)^2 M = -X \Sigma \alpha_i \alpha_k H_{ik} - \alpha_x^2 \Sigma H_{ii} + 2 \alpha_x \Sigma \alpha_i x_k H_{ik}.$$

Mithin wird

$$4) \qquad \zeta_i \zeta_k = A [ik] - f_i f_k$$
$$+ \frac{\lambda}{(n-1)^2} \left[x_i \Sigma x_m H_{km} + x_k \Sigma x_m H_{im} - x_i x_k \Sigma H_{ii} - X H_{ik} \right] - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} H x_i x_k.$$

Vermöge dieser Formel kann man die Quadrate und Producte der ζ_i in F entfernen. Um die alsdann noch linear vorkommenden ζ_i und ζ in einer symmetrischen Weise zu eliminiren, sollen in der Form

$$F' = F \sum_1^4 a_i \zeta_i,$$

welche nur Verbindungen der ζ zu zweien enthält, dieselben nach 4) eingesetzt werden. Dadurch erhält freilich F' den unwesentlichen Factor $\Sigma a_i \zeta_i$, in dem die a_i völlig willkürliche Coefficienten bedeuten mögen. Derselbe stellt gleich Null gesetzt, diejenigen Puncte auf f dar, für welche einer der Puncte ζ in einer willkürlichen Ebene liegt, oder anders ausgedrückt, für die eine der Focalebenen der Centrafläche durch einen willkürlichen Punct a_i geht. Diese Curve ist daher die in § I betrachtete, welche eindeutig auf die Berührungscurve des Tangentenkegels der Centrafläche mit der Spitze a_i bezogen ist; ihre Gleichung ist gegeben durch

$$6) \qquad \Pi = \begin{vmatrix} f = 0, \\ x_i \\ a_i \\ f_i \\ A \Sigma a_k f_{ik} - \Sigma a_s f_s \Sigma f_k f_{ik} \end{vmatrix} = 0,$$

ihre Ordnung ist $4n(n-1)$; sie hat die Fusspuncte der $n(n^2 - n + 1)$ von a_i auf f gefällten Normalen zu Doppelpuncten.

Diese Curve lässt sich auch doppelt zählend durch das System der Gleichungen

$$f = 0,$$
$$(\Sigma a_i \zeta_i)^2 = 0,$$

ausdrücken. Man erhält aber aus 4)

$$7) \qquad (\Sigma a_i \zeta_i)^2 = A \Sigma a_i^2 - (\Sigma a_i f_i)^2$$

$$+ \frac{\lambda}{(n-1)^2}\left[2\, a_x \Sigma a_i x_k H_{ik} - a_x^2 \Sigma H_{ii} - X \Sigma a_i a_k H_{ik}\right] - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} H a_x^2.$$

Die Gleichung 7) kann man benutzen, um den Rang der Centrafläche auf's Neue zu bestimmen. Jedem Puncte der Curve Π entspricht ein durch die Wurzel λ von $\Delta = 0$ bestimmter Punct z der Centrafläche. Soll derselbe auf der willkürlichen Ebene $\alpha_z = 0$ liegen, so ist zu setzen

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_f}.$$

Trägt man diesen Werth in 7) und in Δ ein, so ergeben sich zwei Formen $4(n-1)$. Ordnung, also im Ganzen

$$16\, n (n-1)^2$$

Lösungen. Von diesen sind aber vierfach zählend die des Systems

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_f = \Sigma \alpha_i f_i = 0, \quad f = 0,$$

und einfach die von

$$\Sigma \alpha_i f_i = 0, \quad f = 0, \quad H = 0,$$

zu entfernen. Demnach ist die Ordnung der Berührungscurve des Tangentenkegels der Centrafläche

$$\tfrac{1}{2}\{16\, n (n-1)^2 - 4\, n (n-1) - 4\, n (n-1)(n-2)\} = 6\, n (n-1)^2,$$

wie oben gefunden wurde.

Die Curve Π geht durch alle Kreispuncte der Fläche f einfach hindurch, weil jedem eine lineare Reihe von Puncten ζ entspricht, aus welcher immer je einer in einer willkürlichen Ebene $a\zeta = 0$ liegt. Diese Bemerkung führt zu einer sehr einfachen Bestimmung der Anzahl der Kreispuncte von f, wie zunächst gezeigt werden soll.

Irgend zwei Curven Π und Π', welche den willkürlichen Puncten a und b entsprechen, schneiden sich in $16\, n (n-1)^2$ Puncten. Unter diesen befinden sich die K Kreispuncte von f, ferner die $2\, n (n^2 - n - 1)$ Puncte, welche die ihnen auf der Centrafläche entsprechenden Curven π und π' gemein haben (Classe der Centrafläche). Endlich werden Π und Π' auch dann einen Punct x gemein haben, wenn von den beiden Focal-

ebenen der Centrafläche, die zu x gehören, die eine durch a, die andere durch b geht. Diese Configuration wird ausgedrückt durch die folgenden Gleichungen, in denen ζ_i^1 und ζ_i^2 die beiden Puncte der Reciprokalfläche der Centrafläche bezeichnen:

$$8) \quad \Sigma a_i \zeta_i^1 = 0, \ \Sigma x_i \zeta_i^1 = 0, \ \Sigma f_i \zeta_i^1 = 0,$$

$$9) \quad \Sigma \zeta_i^1 \zeta_i^2 = 0, \ \Sigma b_i \zeta_i^2 = 0, \ \Sigma x_i \zeta_i^2 = 0, \ \Sigma f_i \zeta_i^2 = 0.$$

Aus den Gleichungen 8) ergeben sich die Verhältnisse der ζ_i^1; aus den Gleichungen 9) folgt

$$\begin{vmatrix} \zeta_i^1 \\ x_i \\ b_i \\ f_i \end{vmatrix} = 0.$$

Trägt man in diese letztere Determinante die Verhältnisse der ζ_i^1 ein, so erhält man die Bedingung

$$10) \quad A (X \Sigma a_i b_i - a_x b_x) - X \Sigma a_i f_i \Sigma b_i f_i = 0,$$

welche von der 2 n Ordnung ist. Die Gleichungen $f = 0$, sowie 6) und 10) bestimmen also

$$8 n^2 (n - 1)$$

Puncte, von denen aber abzuziehen sind diejenigen, welche den Doppelpuncten von Π entsprechen (es sind dies einfache Puncte von 10)) und die des Systemes

$$X = 0, \ a_x = 0, \ f = 0,$$

sowie des Systemes

$$\Sigma a_i f_i = 0, \ f = 0, \ A = 0,$$

welche ebenfalls die Gleichungen befriedigen. Mithin wird die gesuchte Anzahl

$$8 n^2 (n - 1) - 2 n (n^2 - n + 1) - 2 (n - 1)^2 n - 2 n = 2 n (n + 1) (2 n - 3)$$

Hieraus ergibt sich die Anzahl der Kreispuncte

$$K = 16 n (n - 1)^2 - 2 n (n^2 - n + 1) - 2 n (n + 1) (2 n - 3)$$
$$= 2 n (5 n^2 - 14 n + 12).$$

Nebenbei sei noch bemerkt:

Es giebt $2n(n+1)(2n-3)$ Normalen der Fläche, für welche eine der beiden Focalebenen der Centrafläche (Hauptkrümmungsebenen von f) durch einen, die andere durch einen zweiten willkürlichen Punct geht.

Ich wende mich nun zur weiteren Entwickelung der Form F'. Man erhält zunächst

$$-\binom{f}{a} = M + N\lambda + \frac{T}{n-1}\lambda^2 + \frac{a_x}{n-1} H\lambda^3,$$

falls zur Abkürzung

$$\begin{aligned} M &= \Sigma a_i f_i, \\ N &= M \Sigma f_{ii} - \Sigma a_i f_k f_{ik}, \\ T &= a_x \Sigma H_{ii} - \Sigma a_m x_n H_{mn}, \end{aligned} \qquad 11)$$

gesetzt wird. Demnach ergiebt sich

$$11\,a) \qquad \zeta \Sigma a_i \zeta_i = M + N\lambda + \frac{T}{(n-1)}\lambda^2 + \frac{a_x}{n-1} H\lambda^3.$$

Ferner wird

$$\Sigma f_{ik} \zeta_i \zeta_k = B - 2\lambda \frac{HX}{(n-1)^2},$$

nämlich gleich dem Differentialquotienten von Δ nach λ, was übrigens auch durch Anwendung der Ausdrücke 4) bestätigt werden kann. Endlich erhält man durch wiederholte Anwendung der Gleichungen 4)

$$11\,b) \qquad \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t \zeta_m f_{ikt} a_m = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3,$$

wo

$$d = 2\frac{n-2}{(n-1)^4} H^2 X a_x,$$

$$c = \frac{n-2}{(n-1)^2} H B a_x + \frac{X}{(n-1)^4}(4(n-2)HT - U),$$

falls noch zur Abkürzung

$$12) \qquad -U = X \Sigma a_m f_{ikt} H_{tm} H_{ik} - a_x \Sigma H_{tp} H_{ik} f_{ikt} x_p,$$

gesetzt wird.

Aus der Form $F' = F \Sigma a_i \zeta_i$ lässt sich daher vermöge der Bedingung $\Delta = 0$ die vierte Potenz von λ entfernen, und man erhält so

$$13) \qquad F' = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3,$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha &= 3BM, \\ \delta &= pBa_x H + qHX + rX, \end{aligned}$$

ist; p ist ein numerischer Coefficient, dessen Werth für das Folgende gleichgültig ist.

Ich benutze die Form F' zunächst zu einer directen Bestimmung der Ordnung der Rückkehrcurve. Setzt man, wie früher

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_f},$$

so wird F' vom Grade $7n-8$. Subtrahiert man von der Anzahl der Lösungen des Systems

$$F' = 0,\ \Delta = 0,\ f = 0,$$

noch die Ordnung der Curve π, d. h. den Rang der Centrafläche, und die 6 fach genommenen Lösungen von

$$f = 0,\ \alpha_x = 0,\ \Sigma \alpha_i f_i = 0,$$

so erhält man

$$4n(n-1)(7n-8) - 6n(n-1) - 6n(n-1)^2 = 2n(n-1)(11n-16),$$

wie früher gefunden wurde.

Eliminirt man andererseits aus den Gleichungen

$$F' = 0,\ \Delta = 0,$$

den Parameter λ, so erhält man nach Beseitigung der Curve Π eine Gleichung, welche auf f eine eindeutig auf die Rückkehrcurve R bezogene Curve ϱ ausschneidet. Sie enthält die Fusspuncte derjenigen Normalen, auf denen einer der beiden Krümmungsmittelpuncte zugleich Punct der Rückkehrcurve der Centrafläche ist, und mag als das Bild von R bezeichnet werden. Die fragliche Resultante hat die Form

$$14) \qquad S = \begin{vmatrix} 3B & M & \beta & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 3B & M & \beta & \gamma & \delta \\ A & B & C & 0 & 0 & \\ 0 & A & B & C & 0 & \\ 0 & 0 & A & B & C & \end{vmatrix} = 0;$$

da sie vom Grade $20n-28$ ist und zugleich den unwesentlichen Factor Π enthalten muss, so ergiebt sich:

Das Bild der Rückkehrcurve ist eine Curve von der Ordnung

$$8n(2n-3)$$

welche vollständiger Schnitt von f mit einer Fläche 8(2n—3). Ordnung ist.

Mit Hülfe der Formen F und S ist es möglich, das Verhalten der Rückkehrcurve zu den anderen auf der Centrafläche liegenden Curven zu discutiren.

Zunächst mögen einige allgemeine Bemerkungen angeführt werden. Einer beliebigen Curve c auf der Fläche f entspricht eine Curve C auf der Centrafläche; jedem Puncte von c entsprechen zwei Puncte von C; jedem Puncte von C im allgemeinen ein Punct von c. Die beiden Puncte von C, welche zu einem Puncte von c gehören, fallen zusammen, so oft c der Curve ψ auf f begegnet, welche durch die Discriminante $\Psi = 0$ von Δ auf f ausgeschnitten wird. Bezeichnet man die Zahl dieser Puncte durch y, so besteht zwischen den Geschlechtern P und p der Curven C und c die Beziehung

$$-y = 4(p-1) - 2(P-1).$$

Einer Spitze oder einem Doppelpuncte von c werden im allgemeinen wieder zwei derartige Singularitäten bei C entsprechen; auch können aus gewissen Punctpaaren von c Doppelpuncte auf C hervorgehen. Insbesondere wird C eine Spitze erhalten, wenn c in einem Puncte von ϱ diejenige Krümmungslinie berührt, für welche der Krümmungsmittelpunct auf der Centrafläche zugleich ein Punct ihrer Rückkehrcurve R ist.[1]) In jedem anderen Puncte den c mit ϱ gemeinsam hat, muss dagegen eine Berührung von C mit der Rückkehrcurve R eintreten. Einer Curve c, welche der vollständige Schnitt von f mit einer Fläche m. Ordnung ist, entspricht also auf der Centrafläche eine Curve C von der Ordnung $4mn(n-1)$, ohne Spitzen, vom Geschlechte

$$1 + 2p - 2 + (3n-4)mn,$$

wobei

$$2p - 2 = mn(m+n-4),$$

welche die Rückkehrcurve in $8mn(2n-3)$ Puncten berührt. —

---

1) Man vergleiche die Betrachtungen in Herrn Zeuthen's Arbeit, Sur deux surfaces, dont les points etc. ., Math. Annalen Bd. IV, S. 22 ff.

Da einem Kreispuncte von f eine lineare Reihe von Puncten ζ_i angehört, so ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung von F, welches die ζ im dritten Grade enthält:

Die den Kreispuncten entsprechenden Doppelpuncte der Centrafläche sind dreifache Puncte der Curve R, die Kreispuncte selbst sind dreifache Puncte ihres Bildes ϱ.[1])

Bringt man die soeben angeführten Betrachtungen über das Verhalten von Curven c und C zur Rückkehrcurve auf die Zweige dieses letzteren selbst zur Anwendung, welche durch einen der Doppelpuncte der Centrafläche gehen, so schliesst man weiter:

Durch jeden der $n(10n^2 - 28n + 24)$ Doppelpuncte gehen drei Zweige der Rückkehrcurve, deren gemeinsame Tangente die Normale des zugehörigen Kreispunctes ist.

Ich gehe nach diesen Bemerkungen zur weiteren Discussion der auf f und der Centrafläche liegenden Curven über.

Erstens. Verhalten der Curve vierpunctiger Berührung Ψ zur Rückkehrcurve R, sowie der entsprechenden Curven ψ und ϱ.

Jedem Puncte von ψ, bestimmt durch die Gleichungen

$$f = 0, \quad \Psi = (n-1)^2 B^2 + 4 H A X = 0,$$

entspricht ein Punct von Ψ auf der Centrafläche. Die Normalen in benachbarten Puncten von ψ schneiden sich nur dann, wenn ψ zugleich die Richtung einer Krümmungslinie von f hat. Dann aber berührt die Curve Ψ auf der Centrafläche die betreffende Normale. Spitzen können daher auf Ψ nicht auftreten, da zu dem Auftreten dieser Singularität eben noch nicht genügt, dass zwei benachbarte Normalen sich schneiden. Dagegen treten Spitzen bei der Rückkehrcurve R im allgemeinen auf, wenn die Curve ϱ eine Krümmungslinie von f berührt. Eine Ausnahme machen hierbei nur diejenigen Puncte von ϱ, welche dann zugleich noch Puncte von ψ sind; eine nähere Untersuchung zeigt, dass wenn in diesem Falle die Richtung von ϱ mit einer Krümmungslinie zusammenfällt, hierdurch nur bedingt wird, dass R die betreffende Normale berührt.

---

1) Die Tangentenrichtungen von ϱ im Kreispuncte sind die der drei durch diesen Punct gehenden Krümmungslinien von f.

Zu den Puncten, in denen ψ die Richtung einer Krümmungslinie berührt, (die man leicht auch vollständig untersuchen kann) gehören insbesondere die Puncte

$$f = 0,\ A = 0,\ B = 0;\ f = 0,\ X = 0,\ B = 0;$$

welche mit den Buchstaben P_1, P_2, bezeichnet werden sollen. In den Puncten P_1 sind die beiden Wurzeln λ gleich Null; die Richtung der Normale f_i ist hier zugleich Richtung der Krümmungslinie; die Curven ψ und Ψ gehen beide durch den Punct P_1 und haben zur gemeinsamen Tangente die genannte Normale. Da die Form S (14) von der Gestalt

$$15) \qquad S = B^2 Z + A Y,$$

ist, so berührt auch ϱ dieselbe Richtung, und gleiches wird mit der Rückkehrcurve R der Fall sein.

In den Puncten P_1 haben demnach die vier Curven Ψ, ψ, R, ϱ, zur gemeinsamen Tangente die Richtung f_i der algebraischen Krümmungslinie $f = 0$, $A = 0$.

Etwas ähnliches findet statt in den Puncten P_2. Hier sind beide Werthe von λ unendlich; der betreffende Punct z_i von Ψ gegeben durch

$$z_i = \lambda f_i + x_i \nu,\ \nu = 0.$$

Mithin wird

$$dz_i = d\lambda f_i + \lambda \Sigma f_{ik}\, dx_k + x_i\, d\nu,$$

und man bestätigt leicht, dass Ψ wieder die Normale in z_i berührt. Denn die Curve ψ berührt die Krümmungslinie, deren Richtung dx_i gegeben ist durch

$$\Sigma x_i\, dx_i = 0,\ \Sigma f_i\, dx_i = 0.$$

Da aber wegen $X = 0$, $B = 0$ auch

$$\Sigma x_i x_k H_{ik} = 0,$$

ist es gestattet zu setzen

$$dx_i = \alpha \Sigma x_k H_{ik},$$

so dass

$$dz_i = d\lambda f_i + x_i (d\nu + \alpha \lambda H),$$

wird, woraus die angegebene Eigenschaft folgt. Auch hier wird

$$16) \qquad S = XY' + B^2 Z',$$

d. h. die Curve ϱ berührt ψ etc. . Somit hat man:

In den Puncten P_2 berühren sich die Curven ψ, ϱ, in den entsprechenden Krümmungscentren die Curven Ψ und R.

Wenn endlich Ψ verschwindet, ohne dass λ gleich o oder ∞ ist, so reducirt sich F auf die Form

$$\Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt} = o.$$

Das heisst:

Ein Punct von Ψ gehört auch der Curve R an, wenn die Haupttangente von f, welche X berührt, zugleich vierpunctige Tangente dieser Fläche ist.

Nun bilden die vierpunctigen Tangenten von f, wie bekannt, eine Regelfläche von der Ordnung [1])

$$2n(n-3)(3n-2)$$

auf welcher, wie man leicht zeigen kann,[2]) $4n(n-3)(3n-2)$ Erzeugende liegen, die eine Fläche zweiten Grades X berühren. Im Schnitte der Curven ϱ und ψ sind aber diese Puncte P_3 doppelt zu zählen, da die Form F auch durch

$$3\zeta\sqrt{\Psi} + \lambda \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt}$$

dargestellt werden kann, so dass auch hier die Curve ϱ die ψ berührt.

Ausser den doppelt zählenden Puncten P_1, P_2, P_3 und den Kreispuncten K haben die Curven ϱ und ψ keine gemeinsamen Puncte. Denn die Zahl der letzteren beträgt

$$8(2n-3)(6n-8)n$$

und dies ist in der That gleich

$$8n(n-3)(3n-2) + 4n(n-1)(3n-4) + 4n(3n-4) + 6n(10n^2-28n+24),$$

oder gleich

$$2(P_1 + P_2 + P_3 + 3K)$$

---

1) Vgl. Salmon-Fiedler A. Geometrie. S. 635.

2) Vgl. z. B. meine Arbeit in den Mathemat. Annalen, Bd. XXIII, S. 399.

Somit folgt:

Die Curven ψ und ϱ berühren sich in allen gemeinsamen Puncten, die Kreispuncte ausgenommen, in denen ψ einen doppelten, ϱ einen dreifachen Punct hat.

In den entsprechenden Puncten berühren sich die Curven R und Ψ vierpunctig; in den Doppelpuncten der Centrafläche endlich haben die beiden Zweige von Ψ mit den drei Zweigen von R eine gemeinsame Tangente.

Zweitens. Verhalten der Curve ϱ und der parabolischen Curve h von f. Die beiden Curven schneiden sich in $32n(n-2)(2n-3)$ Puncten, welche sich in folgender Weise vertheilen. Wenn $H = 0$ ist, so ist entweder $\lambda = \infty$ oder $\lambda = -\frac{A}{B}$. Im ersten Falle muss wieder, da F verschwinden soll

$$\Sigma y_i y_k y_t f_{ikt} = 0,$$

sein, wobei y die Richtung der parabolischen Tangente von f bedeutet. Es führt das auf die $2(n-2)(11n-24)$ Puncte, in denen die parabolische Tangente von f zugleich vierpunctige Tangente ist. Im anderen Falle wird F' von der Ordnung $13n-17$, falls $H = 0$ gesetzt und der zuvor angegebene Werth von λ eingetragen wird. Von den so entstehenden $4n(n-2)(13n-17)$ Puncten sind aber diejenigen zu entfernen, welche demselben Werthe von λ in dem Schnittpunctsysteme $H = 0$, $\Pi = 0$ entsprechen. Die Zahl derselben beträgt, wie man leicht durch Betrachtung von 7) findet, $2n(n-2)(5n-6)$. — Endlich gehören zu dem Schnittpunctsysteme von h und ϱ noch die Puncte $f = 0$, $H = 0$, $X = 0$, wie die Betrachtung von S (14) unmittelbar lehrt. In der That ist nun

$$32n(n-2)(2n-3) = 2n(n-2)[11n-24+26n-34-5n+6+4].$$

In den $2n(n-2)(11n-24)$ „Asymptotenpuncten" von f berührt[1]) nun bekanntlich h gleichzeitig die parabolische Tangente, d. h. die Richtung einer Krümmungslinie, für welche das Krümmungs-

1) Vgl. Salmon-Fiedler. An. Geometrie, Theil II, S. 632; die Bezeichnung dieser Puncte als Asymptotenpuncte ist ursprünglich nur bei der Fläche dritter Ordnung üblich.

centrum einen Punct der Rückkehrcurve der Centrafläche bildet. Auch in den Puncten $X = o$, $f = o$, $H = o$ giebt die Richtung der parabolischen Tangente Veranlassung zum Rückkehrpunct der Centrafläche, aber die Curve h berührt diese Richtung nicht. Somit folgt:

Die Curve H auf der Centrafläche, welche der parabolischen Curve h auf f entspricht, begegnet der Rückkehrcurve R in $2n(n-2)(11n-24)$ Puncten mit Spitzen und berührt sie in $8n(n-2)$ weiteren Puncten, sie ist daher von der Ordnung $4n(n-1)(n-2)$, vom Geschlechte $2n(n-2)(5n-12)+1$ und vom Range $2n(n-2)(3n-4)$.[1])

Dass die Asymptotenpuncte von f in Bezug auf jede Fläche zweiten Grades einen Punct von R bedingen, erklärt sich leicht aus dem Umstande, dass in ihnen drei consecutive Tangentenebenen von f zusammenfallen, deren gemeinsamer Pol den Punct von R bildet. Nicht so unmittelbar ersichtlich scheint es, dass auch die Puncte $f = o$, $X = o$, $H = o$ sich ähnlich verhalten; es soll dies durch eine directe Untersuchung bestätigt werden.

Wählt man einen solchen Punct zur Ecke $x_1 = x_2 = x_3 = o$, seine Tangentenebene zur Seite $x_1 = o$, seine parabolische Tangente zur Kante $x_1 = x_2 = o$ des Coordinatentetraeders, so kann man die Gleichung der Fläche zweiten Grades in der Form

$$a x_1^2 + b x_2^2 + 2 x_3 x_4 = o$$

annehmen; die Kante $x_1 = o$, $x_3 = o$ ist Tangente der anderen Krümmungslinie. Die Gleichung der Fläche f ist

$$f = x_4^{n-1} x_1 + x_4^{n-2}(x_2^2 + x_1 c_x) + x_4^{n-3}\varphi + x_4^{n-4}\psi + \ldots;$$

die Coordinaten des Poles y einer Tangentenebene sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1 &= a y_1, \\ f_2 &= b y_2, \\ f_3 &= y_4, \\ f_4 &= y_3; \end{aligned}$$

1) Diese Zahlen gibt auch Salmon, An. Geometrie, Theil II, S. 648.

und der Ecke $x_1 = x_2 = x_3$ entspricht das zur parabolischen Tangente gehörige Krümmungscentrum $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Sollen durch diesen Punct überhaupt Strahlen des Systems gehen, so ist zu setzen

$$P_1 = b\,x_2\,f_4 - x_3\,f_2 = 0,$$
$$P_2 = b\,x_2\,f_3 - x_4\,f_2 = 0,$$
$$P_3 = \quad x_3\,f_3 - x_4\,f_4 = 0,$$

oder für $x_4 = 1$

$$P_1 = b\,x_2\,[x_2^2 + c_x\,x_1 + 2\,\varphi + 3\,\psi\,..] + x_3\,[2\,x_2 + x_1\,c_2 + \varphi_2 + \psi_2\,...] = 0,$$
$$P_2 = b\,x_2\,[x_1\,c_3 + \varphi_3 + \psi_3 + ...] \quad - \quad [2\,x_2 + x_1\,c_2 + \varphi_2 + \psi_2\,...] = 0,$$
$$P_3 = \quad x_3\,[x_1\,c_3 + \varphi_3 + \psi_3 + ...] \quad + \quad [x_2^2 + c_x\,x_1 + 2\,\varphi + 3\,\psi\,..] \quad = 0.$$

Die Fläche P_1 schneidet f in einer Curve mit Doppelpunct, dessen Tangentenrichtungen $x_1 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = 0$ wird. Setzt man für den letzteren Zweig der Schnittcurve die Entwickelung

$$x_1 = p_1\,x_3^3 + p_2\,x_3^4 + \ldots,$$
$$x_2 = q_1\,x_3^2 + q_2\,x_3^3 + \ldots,$$

voraus, so wird $p_1 + \varphi_{333} = 0$, $2\,q_1 + 3\,\varphi_{332} = 0$, wo φ_{333}, φ_{332} die Coefficienten von x_3^3, $x_3^2\,x_2$ in der Form φ bedeuten. Dieselbe Entwickelung ergiebt sich aber auch für die Schnittcurve von P_2 und f, während die Schnittcurve von P_3 und f zur Spitzentangente die parabolische Tangente hat. Es gehen mithin durch die Ecke $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ drei unendlich nahe Normalen, wie zu zeigen war.

Drittens. Die $16\,n(2\,n - 3)$ Schnittpuncte von ϱ mit der algebraischen Krümmungslinie $X = 0$, $f = 0$, vertheilen sich in folgender Weise. Die Puncte $H = 0$, $X = 0$, $f = 0$, sind wie vorhin gezeigt, Puncte von ϱ, aber die der Krümmungslinie von f auf der Centrafläche entsprechende „geodätische" Linie geht hier nicht durch einen Punct der Rückkehrcurve. Ferner gehören zu diesen Puncten nach 16) doppeltzählend die Puncte $X = 0$, $B = 0$; die geodätische Curve berührt hier die Rückkehrcurve R vierpunctig. Endlich hat man den Fall $\lambda = -\frac{A}{B}$ zu berücksichtigen. Für denselben wird F′ nach Entfernung des Factors B von der Ordnung $10\,n - 13$, so dass $n\,(20\,n - 26)$ Puncte dieser Art vorhanden sind. Aber der Ausdruck $\Sigma(a_i\,\zeta_i)$ (7), welcher in

F' als Factor enthalten ist, liefert $n(8n-10)$ Puncte, welche zu entfernen sind. In der That wird nun

$$16n(2n-3) = 8n(n-2) + 2n(6n-8) + n(12n-16).$$

Somit folgt

Die der algebraischen Krümmungslinie $X = o$, $f = o$ entsprechende geodätische Curve auf der Centrafläche berührt die Rückkehrcurve R in den $n(6n-8)$ Puncten, wo R und Ψ sich berühren, und ausserdem noch in $4n(3n-4)$ weiteren Puncten. In Uebereinstimmung damit steht es, dass diese Curve von der Ordnung $6n(n-1)$, vom Range $2n(7n-8)$, vom Geschlechte $n(n-2)+1$ ist und keine Spitzen enthält.

Viertens. Die Schnittpuncte von ϱ mit der algebraischen Krümmungslinie $f = o$, $A = o$ bestehen aus den $2n(n-1)(3n-4)$ doppeltzählenden Puncten $B = o$, $A = o$, $f = o$ und aus $2n(n-1)(13n-18)$ weiteren; nur die ersteren sind solche, in denen die entsprechende Curve auf der Centrafläche, welche hier mit der Curve $f = o$, $A = o$ selbst zusammenfällt, die Rückkehrcurve berührt.

Fünftens. Bestimmung der Classe der Rückkehrtangentenebenen der Centrafläche.

Soll die Tangentenebene der Centrafläche in einem Puncte ihrer Rückkehrcurve durch einen Punct a gehen, so hat man mit der Gleichung

$$\Sigma \zeta_i a_i = o$$

oder $\Pi = o$ die Gleichung $F = o$ zu verbinden, in der λ durch den Werth

$$\lambda = -\frac{\Sigma a_i \zeta_k f_{ik}}{\Sigma a_i f_i},$$

ersetzt ist, so dass

$$17) \qquad F = 3 \Sigma a_i \zeta_k f_{ik} \Sigma f_i f_k f_{ik} - \Sigma a_i f_i \Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{ikt} = o,$$

wird; die Verhältnisse der ζ_i sind dabei aus den Unterdeterminanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ a_i \\ f_i \end{matrix} \right\|$$

zu entnehmen. So erhält man, den Gleichungen

$$f = o,\ \Pi = o,\ F = o,$$

entsprechend $4\,n\,(n-1)\,(5\,n-4)$ Lösungen; von diesen sind die den doppelten resp. dreifachen Puncten von Π und F entsprechenden $6\,n\,(n^2-n+1)$ zu entfernen. Ferner sind die $2\,n\,(n-1)^2$ Puncte zu entfernen, für die

$$f = o,\ \Sigma a_i f_i,\ \Sigma a_i \zeta_k f_{ik} = o,$$

wird. Endlich werden für die $2\,n$ Puncte, in denen

$$f = o,\ X = o,\ a_x = o,$$

die ζ_i den x_i proportional. Es verschwindet dann (6) auch Π; von dem Ausdrucke F aber lässt sich zeigen, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \mu f_i,$$

wird. Entfernt man demnach diese Puncte doppelt zählend, so ergiebt sich als Classe der Rückkehrtangentenebenen[1])

$$\sigma = 4\,n\,(n-1)\,(5\,n-4) - 6\,n\,(n^2-n+1) - 2\,n\,(n-1)^2 - 4\,n$$
$$= 2\,n\,(n-2)\,(6\,n-1).$$

In der That wird für $\zeta_i = x_i$, wenn verschwindende Terme fortgelassen werden, aus 17)

$$\frac{\partial F}{\partial x_m} = 6\,\Sigma a_i \zeta_k f_{ik}\,\Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m}\zeta_k f_{ik} + 3\,\Sigma a_i \zeta_k f_{ik}\,\Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ikm}$$
$$- 3\,\Sigma a_i f_i\,\Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m}\zeta_k \zeta_t f_{ikt} - \Sigma a_i f_i\,\Sigma \zeta_i \zeta_k \zeta_t f_{iktm}$$
$$= \Sigma a_i f_i \left\{ 3\,n\,(n-1)\,\Sigma f_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} - (n-1)\,(n-2)\,(n+6)\,f_m \right\}.$$

Aus der Gleichung

$$\Sigma \zeta_i f_i = o,$$

aber folgt

---

1) Für $n = 2$ wird diese Zahl gleich Null; vgl. § VIII.

$$\Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} f_i + \Sigma \zeta_i f_{i\,m} = 0,$$

oder für $\zeta_i = x_i$

$$\Sigma \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_m} f_i = -(n-1) f_m;$$

womit gezeigt ist, dass die Fläche 17) in den $2n$ Puncten $X = 0$, $f = 0$, $a_x = 0$ die Fläche f berührt.

Sechstens. Das Geschlecht der Rückkehrcurve R. Die Curve ϱ kann, da sie eindeutig auf R bezogen ist, dazu dienen das Geschlecht von R und damit eine weitere für die Theorie der Centrafläche wichtige Zahl zu bestimmen.

Man sieht unmittelbar, dass die Spitzen von R, deren Entstehung früher besprochen wurde, bei der Abbildung ϱ sich auflösen. Demnach entsprechen nur den singulären Puncten von R in den Doppelpuncten der Centrafläche wieder singuläre, nämlich dreifache Puncte von ϱ, deren Tangentenrichtungen nicht zusammenfallen. Andererseits wird ϱ eine gewisse Zahl von Doppelpuncten enthalten, denen auf R keine solchen entsprechen, nämlich an allen Stellen, wo beide auf einer Normalen befindlichen Puncte der Centrafläche der Rückkehrcurve angehören. Spitzen sind auf ϱ nicht vorhanden; sie könnten nur dadurch entstehen, dass jene beiden Puncte zusammenfallen; die Puncte von R, wo ein Zusammenfallen überhaupt stattfindet, sind oben untersucht und geben zu Spitzen noch nicht Veranlassung.

Die Zahl der Doppelpuncte von ϱ lässt sich nun aber, wie folgt, bestimmen. Man betrachte die Gleichungen

$$\Delta = 0, \quad F = 0.$$

Sind dieselben für beide Wurzeln von Δ gleichzeitig erfüllt, so sind beide Puncte der Centrafläche Puncte von R. Die Bedingungen aber, unter denen zwei Gleichungen ein Paar gemeinsamer Wurzeln haben, sind bekannt. Sind nämlich in den beiden Gleichungen

$$a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots = 0,$$
$$a_0' t^{m'} + a_1' t^{m'-1} + \ldots = 0,$$

die a_0, a_0' von den Graden μ, μ', die a_k, a_k' von den Geraden $\mu + k\alpha$,

$\mu' + k\alpha$ in den Coordinaten x_i, so wird nach Salmon[1]) für eine Curve Σ von der Ordnung

$$18)\quad W = \tfrac{1}{2} m (m-1) \mu'^2 + \tfrac{1}{2} m' (m'-1) \mu^2 + (m'-1)(m-1) \mu \mu' + \tfrac{1}{2} m (m-1)(2m'-1) \mu' \alpha + \tfrac{1}{2} m' (m'-1)(2m-1) \mu \alpha + \tfrac{1}{2} m m' (m'-1)(m-1) \alpha^2,$$

ein paar gemeinsamer Wurzeln auftreten. Legt man nun die Gleichung

$$\Delta = 0,$$

und die Gleichung dritten Grades

$$F' = 0,$$

zu Grunde, so entsprechen die Durchschnittspuncte der Curve Σ mit f:

Erstens, dem beregten Falle selbst, wo beide Puncte zu R gehören, d. h. den Doppelpuncten von ϱ;

Zweitens, dem Falle, wo ein Doppelpunct der Curve Π stattfindet. Denn man überzeugt sich leicht, dass die Form F' in diesem Falle den Factor Δ besitzt. In einem Doppelpuncte von Π ist nämlich

$$a_i = \varrho x_i + \sigma f_i,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\zeta \Sigma a_m \zeta_m = \sigma \Delta - \frac{\lambda \varrho}{n-1} \Delta,$$

$$\zeta_t \Sigma \zeta_m a_m \equiv x_t \varrho \Delta,$$

woraus das Gesagte hervorgeht.

Drittens entstehen Doppelpuncte, wenn die Curven Π und ϱ sich so durchsetzen, dass der eine Punct der Centrafläche zu R, der andere zu der Π entsprechenden Curve gehört. Nun schneidet Π die Curve ϱ in $32n(2n-3)(n-1)$ Puncten. Von diesen sind aber diejenigen zu entfernen, für welche das zu Π gehörige Krümmungscentrum Rückkehrpunct der Centrafläche wird. Da Π die Curve ist, für welche die Tangentenebenen der Centrafläche in den entsprechenden Puncten durch den Punct a_i gehen, so ist die Zahl dieser abzurechnenden Puncte gleich der

1) Salmon-Fiedler An. Geometrie, Theil II, S. 594.

der Klasse der Rückkehrtangentenebenen. Entfernt man noch 3 fach zählend die Kreispuncte, so sind die übrigen

$$s = 32\,n(2\,n-3)(n-1) - 2\,n(n-2)(6\,n-1) - 3\,n(10\,n^2 - 28\,n + 24)$$

Durchschnittspuncte von der verlangten Beschaffenheit. Man erhält demnach

$$n\,w - 6\,n\,(n^2 - n + 1) - s$$

Puncte. Aber auch von diesen sind die Kreispuncte K noch zu entfernen. Denn in diesen erhalten alle Producte $\zeta_i\,\zeta_k$ den Factor $(\lambda - \lambda_0)$; demnach F' gleichzeitig mit Δ den Factor $(\lambda - \lambda_0)^2$. Diese Puncte sind also für die Curve Σ singulär; ich nehme an, dass sie zweifach von der obigen Zahl in Abzug zu bringen sind.

Demnach ist die Zahl der Doppelpuncte des vollständigen Schnittes ϱ gleich

$$\tau = n\,w - 6\,n\,(n^2 - n + 1) - s - 2\,K;^{1})$$

in der Formel 18) für w sind dabei die speciellen Werthe

$$m = 2,\ \mu = 4\,n - 6,$$
$$m' = 3,\ \mu' = 7\,n - 11,$$
$$\alpha = -(n-2)$$

zu benutzen. Endlich wird das Geschlecht von R

$$4\,n\,(2\,n-3)\,(17\,n-28) + 1 - 3\,K - \tau.$$

§ VI.

Ueber die projective Evolute einer algebraischen Curve.

Die Untersuchungen der vorigen § enthalten zugleich die Grundlage für eine wenigstens der Form nach neue Theorie der projectiven Evolute, (Quasi-Evolute nach Cayley), einer Curve n. Ordnung f, d. h. der Umhüllungscurve der Verbindungslinien ihrer Puncte x mit den Polen y ihrer Tangenten in Bezug auf einen Kegelschnitt; man kann auch hier zwei Arten von Evoluten unterscheiden, je nachdem der Kegelschnitt allgemein ist oder in ein Punctpaar degenerirt.

1) Für $n = 2$ wird $\tau = 12$; es sind dies die 12 „Scheitelpuncte" der Fläche zweiten Grades, für die in der That die angegebene Configuration eintritt.

Wird zur Untersuchung der Evolute erster Art der letztere in der Form

$$1) \qquad X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

vorausgesetzt, so erhält man als Punct der Evolute, welcher zu dem Puncte x_i auf f gehört,

$$2) \qquad z_i = x_i + \lambda f_i,$$

falls λ aus der linearen Gleichung

$$3) \qquad A - \lambda \frac{HX}{(n-1)^2} = 0; \; A = \Sigma f_i^2,$$

bestimmt wird. Jedem Puncte x_i von f ist so ein Punct f_i der reciproken Polare n (n — 1). Ordnung, ferner ein Punct z_i der Evolute, endlich ein Punct ζ_i der Reciprokalcurve der Evolute in Bezug auf X zugeordnet. Letzterer ist bestimmt durch die Gleichungen

$$4) \qquad \begin{aligned} \Sigma \zeta \, x_i &= 0, \\ \Sigma \zeta_i \, f_i &= 0, \end{aligned}$$

so dass die ζ_i aus der Matrix

$$5) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \right\|$$

zu entnehmen sind. Statt der Gleichungen 4) kann man analog den Gleichungen I 10), 11) auch die folgenden

$$6) \qquad \begin{aligned} &\zeta_i + \lambda \Sigma \zeta_k f_{ik} + \zeta f_i = 0; \; i, \; k = 1, \; 2, \; 3; \\ &\Sigma \zeta_i x_i = 0, \\ &\Sigma \zeta_i f_i = 0, \\ &\xi_i + \lambda \Sigma \xi_k f_{ik} + \xi x_i = 0, \\ &\Sigma \xi_i f_i = 0, \\ &\Sigma \xi_i f_k f_{ik} = 0, \end{aligned}$$

Zunächst hat man aus 2) und 3)

Die projective Evolute berührt die Curve f in den $2n(n-1)$ Puncten $A = 0$, $f = 0$; sie berührt die reciproke Polare in den $2n$ Puncten, welche zu $X = 0$, $f = 0$ gehören; sie geht endlich durch die $3n(n-2)$ Spitzen dieser Curve, welche den Wendungspuncten $H = 0$, $f = 0$ entsprechen.

Die Spitzen der Evolute sind auch hier bestimmt durch die Bedingung

$$7) \qquad F = 3\,\zeta\,\Sigma\zeta_i\,\zeta_k\,f_{ik} + \lambda\,\Sigma\zeta_i\,\zeta_k\,\zeta_t\,f_{ikt} = 0$$

welche ganz wie in § V weiter behandelt werden kann. Aus den Gleichungen 6) folgt zunächst

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\lambda\,f_{ik}\,f_i & \\ f_k & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche Gleichung sich in den 3 Formen entwickeln lässt

$$8) \qquad \begin{aligned} X\,\Sigma H_{ii} - \Sigma x_i\,x_k\,H_{ik} + (n-1)^2\,\lambda\,X\,H &= 0,\\ A - \lambda\,(\Sigma f_i\,f_k\,f_{ik} - A\,\Sigma f_{ii}) &= 0,\\ (n-1)^2\,A - \lambda\,X\,H &= 0, \end{aligned}$$

so dass vermöge $f = 0$ die Identitäten bestehen

$$9) \quad (n-1)^2(\Sigma f_i\,f_k\,f_{ik} - A\,\Sigma f_{ii}) = X\,H, \quad X\,\Sigma H_{ii} - \Sigma x_i\,x_k\,H_{ik} = -(n-1)^2\,A.$$

Aus der Betrachtung der Form

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda\,f_{ik}\,f_i\,a_i & & \\ f_k & 0 & 0 \\ a_k & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

findet man ferner

$$10) \qquad \zeta_i\,\zeta_k \equiv A\,(i\,k) - f_i\,f_k - \lambda\,\frac{H\,x_i\,x_k}{(n-1)^2}$$

also

$$\Sigma\zeta_i^2 \equiv A,$$

$$\Sigma\zeta_i\,\zeta_k\,f_{ik} \equiv A\,\Sigma f_{ii} - \Sigma f_i\,f_k\,f_{ik} = -\frac{H\,X}{(n-1)^2},$$

$$\Sigma\zeta_i\,\zeta_k\,\zeta_t\,f_{ikt} \equiv A\,\Sigma f_{iit}\,\zeta_t - \Sigma f_i\,f_k\,f_{ikt}\,\zeta_t.$$

Setzt man endlich nach 6)

$$\lambda\,\Sigma\zeta_i\,f_k\,f_{ik} + \zeta\,A = 0,$$

so nimmt die Gleichung $F = 0$, wenn man die Verhältnisse der ζ_i aus 5) einsetzt, die Form an

$$3\,X\,H\begin{vmatrix} \Sigma f_k\,f_{ik} & \\ x_i & \\ f_i & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A\,\Sigma f_{kki} - \Sigma f_k\,f_t\,f_{ikt} & \\ x_i & \\ f_i & \end{vmatrix} = 0.$$

Da nach 9) die zweite Determinante durch X theilbar ist, so wird

$$\frac{F}{X} = o$$

eine Gleichung $6n - 9$. Ordnung, welche aus f die $3n(2n - 3)$ Puncte ausschneidet, die zu Spitzen der Evolute gehören.

Setzt man in 7)

$$\zeta_i = \eta_i + \sigma x_i; \quad \sigma = -\frac{\zeta}{(n-2)}\lambda,$$

so wird

$$F \equiv \Sigma \eta_i \eta_k \eta_t f_{ikt} = o.$$

Da ferner

$$\xi_i = \zeta_i + \zeta \frac{x_i}{(n-1)}\lambda; \quad x_i \equiv \eta_i - \zeta_i,$$

$$\eta_i = \zeta_i + \zeta \frac{x_i}{(n-2)}\lambda; \quad \xi_i \equiv \eta_i + \frac{1}{n-2}\zeta_i,$$

so wird auch hier das Doppelverhältniss der Puncte $(\eta\ \zeta\ x\ \xi)$ gleich $-(n-2)$. Berücksichtigt man noch die ganz so wie früher abzuleitende Construction der Puncte ζ_i, ξ_i, so ergiebt sich insbesondere für die Curven dritter Ordnung der folgende Satz:

Wird die Tangente der Curve dritter Ordnung f im Puncte x_i durch die Polare von f_i in Bezug auf den Kegelschnitt X in ζ_i, durch die Polare von f_i in Bezug auf den Polarkegelschnitt von x_i in ξ_i geschnitten, und ist der Tangentialpunct η_i von x_i der vierte harmonische Punct zu ζ_i und x_i, ξ_i, so ist die Gerade (x_i, f_i) Rückkehrtangente der projectiven Evolute erster Art.

Ganz ähnliche Verhältnisse finden für die Evolute zweiter Art [1]) statt; es erscheint überflüssig, hierauf weiter einzugehen.

§ VII.

Die parabolische Curve der Centrafläche.

Die in § II, 10 entwickelte Form G, welche vom dritten Grade in λ ist, reducirt sich für $\psi_i = f_i$, wenn die ersten 4 Reihen mit den x_i multiplicirt von der letzten in geeigneter Weise subtrahirt werden, auf

1) Für die eigentliche Evolute findet sich die Form F gebildet bei Salmon-Fiedler, Theorie der höheren ebenen Curven S. 113.

$$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 \frac{\lambda^2}{\zeta^2} \begin{vmatrix} \zeta f_{ik} + \lambda \Sigma \zeta_t f_{ikt} & \Sigma \zeta_s f_{is} \\ \Sigma \zeta_s f_{ks} & 0 \end{vmatrix}.$$

Man erhält hieraus leicht

1) $$G \equiv -\lambda H \Sigma \zeta_k \zeta_i \zeta_t f_{ikt} + \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} (H \zeta + \lambda \Sigma \zeta_t H_{ik} f_{ikt}).$$

Die Bedingung $G = 0$ lässt sich noch in einer anderen Form aufstellen, die bei manchen Betrachtungen bequemer ist. Eine parabolische Ebene der Centrafläche enthält drei unendlich benachbarte Normalen von f. Diese Configuration wird ausgedrückt durch die Gleichungen

2) $$\begin{aligned} d^2 x_i &= p x_i + q f_i + r dx_i, \\ d^2 y_i &= s x_i + t f_i + u dx_i. \end{aligned}$$

Setzt man in der zweiten Gleichung 2)

$$d^2 y_i = \Sigma f_{ikt} dx_t dx_k + \Sigma f_{ik} d^2 x_k,$$

und führt die Werthe der $d^2 x_k$ aus der ersten Gleichung 2) ein, so ergiebt sich durch Elimination der p, r, s, t, u die Bedingung

3) $$\begin{vmatrix} \Sigma f_{ikt} dx_t dx_k + q \Sigma f_k f_{ik} \\ x_i \\ f_i \\ dx_i \end{vmatrix} = 0.$$

Aus den Gleichungen 2) folgt noch

$$\Sigma f_i d^2 x_i = -\Sigma f_{ik} dx_i dx_k = q A,$$

womit q bestimmt ist. Führt man in 3) an Stelle der dx_i die Ausdrücke $\alpha x_i + \beta \zeta_i$ (vgl. § II, 1) ein, welche zur Wurzel λ von Δ gehören, so entsteht die Form

4) $$\begin{vmatrix} A \Sigma f_{ikt} \zeta_k \zeta_t - \Sigma f_{kt} \zeta_k \zeta_t \Sigma f_m f_{mi} \\ x_i \\ f_i \\ \zeta_i \end{vmatrix} = 0.$$

Da nach § IV, 5)

$$\begin{aligned} \Sigma \zeta_i' x_i &= 0, \\ \Sigma \zeta_i' f_i &= 0, \\ \Sigma \zeta_i' \zeta_i &= 0, \end{aligned}$$

falls man mit ζ_i' den der anderen Wurzel λ' von Δ zugehörigen Punct der Reciprokalfläche der Centrafläche bezeichnet, so kann die Bedingung 4) in der einfacheren Gestalt

$$5) \qquad \Gamma = A \Sigma \zeta_t' \zeta_k \zeta_i f_{ikt} - \Sigma f_{ik} \zeta_i \zeta_k \Sigma f_k f_{ik} \zeta_i' = 0$$

geschrieben werden. Die Uebereinstimmung der beiden Gleichungen $G = 0$, $\Gamma = 0$ erkennt man durch folgende Transformation.

Ersetzt man die Producte der $\zeta_i \zeta_k$ nach § V, 4) und setzt zugleich nach § V, 7)

$$\lambda' \Sigma f_k f_{ik} \zeta_i' + \zeta' A = 0,$$

sowie zur Abkürzung

$$A \Sigma f_{tii} - \Sigma f_i f_k f_{ikt} = p_t,$$

so wird

$$\frac{\lambda' \Gamma}{A} = \lambda' \Sigma p_t \zeta_t' - \frac{\lambda \lambda' X}{(n-1)^2} \Sigma H_{ik} f_{ikt} \zeta_t' + \zeta' \left(B - 2 \frac{HX\lambda}{(n-1)^2}\right),$$

falls

$$6) \qquad \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} = B - 2 \frac{HX\lambda}{(n-1)^2},$$

gesetzt wird. Da ferner

$$H \lambda \lambda' X = - A (n-1)^2,$$

$$A = - \left(B \lambda' - \lambda'^2 \frac{HX}{(n-1)^2}\right),$$

$$B - 2 \frac{HX\lambda'}{(n-1)^2} = - \left(B - 2 \frac{HX\lambda}{(n-1)^2}\right),$$

ist, so wird

$$\frac{\lambda' \Gamma}{A} = \lambda' \Sigma p_t \zeta_t' - \frac{1}{H} \left(B \lambda' - \lambda'^2 \frac{HX}{(n-1)^2}\right) \Sigma H_{ik} f_{ikt} \zeta_t - \zeta' \left(B - 2 \frac{HX\lambda'}{(n-1)^2}\right)$$

$$= \lambda' \left(\Sigma p_t \zeta_t' - \frac{\lambda' X}{(n-1)^2} \Sigma H_{ik} f_{ikt} \zeta_t'\right)$$

$$- \frac{1}{H} \left(\lambda' \Sigma H_{ik} f_{ikt} \zeta_t' + \zeta' H\right) \left(B - 2 \frac{\lambda' HX}{(n-1)^2}\right),$$

und dieser Ausdruck geht, wenn man wieder nach § V, 4) die Producte der $\zeta_i' \zeta_k'$ einführt, über in

$$\frac{\lambda' \Gamma}{A} = \lambda' \Sigma \zeta_i' \zeta_k' \zeta_t' f_{ikt} - \frac{1}{H} \Sigma \zeta_i' \zeta_k' f_{ik} (\lambda' \Sigma H_{ik} f_{ikt} \zeta_t' + \zeta' H).$$

Vertauscht man daher in G die Wurzel λ mit λ' und bezeichnet die so entstandene Form durch (G), so folgt die Identität

$$7) \qquad H\,\lambda'\,I' = -\,A\,(G),$$

womit die Uebereinstimmung beider Bedingungen $I' = 0$, $(G) = 0$ nachgewiesen ist. Jede derselben stellt also die Bedingung für das Auftreten parabolischer Ebenen nicht rein dar; die eine enthält, wie aus 7) hervorgeht, gewissermassen den Factor H, die andere den Factor A, und es scheint nicht möglich einfache Formen zu bilden, die von dieser Unvollkommenheit befreit sind.

Die Bedingung $I' = 0$ kann man, falls

$$\zeta_i' = \eta_i' + \sigma\, x_i;\ \sigma = -\frac{\zeta'}{(n-2)}\,\lambda',$$

gesetzt wird, in der Form

$$7\,a) \qquad \Sigma\,\eta_k'\,\zeta_k\,\zeta_i\,f_{ikt} = 0,$$

schreiben. Setzt man noch

$$\zeta_i = \eta_i + \tau\, x_i,$$

so geht dieselbe, wegen

$$\Sigma\,\eta_i'\,\eta_k\,f_{ik} = 0,\ \Sigma\,\eta_i'\,f_i = 0,$$

über in

$$8) \qquad \Sigma\,\eta_t'\,\eta_i\,\eta_k\,f_{ikt} = 0,$$

welche eine gewisse Analogie mit der Bedingung § V, 2) für die Rückkehrcurve zeigt; die Formen 7 a) und 8) sind überhaupt mehrfacher geometrischer Deutungen fähig. Für die Fläche dritter Ordnung $f = 0$ wird insbesondere aus 8)

$$\Sigma\,\eta_t'\,\frac{\partial f}{\partial \eta_t} = 0.$$

Das heisst:

Wenn die Tangentenebene der Fläche dritter Ordnung in demjenigen Puncte η, wo dieselbe von der Tangente der einen durch einen Punct x gehenden Krümmungslinie getroffen wird, den auf der Tangente der anderen Krümmungslinie liegenden Punct η' (vgl. dessen Construction § V) enthält, so ist

die durch die Normale in x und den Punct η bestimmte Ebene eine parabolische Ebene der Centrafläche.

Bei der Bildung der Form

$$9) \qquad G' = G \Sigma a_i \zeta_i = o,$$

sollen dieselben Bezeichnungen, wie früher, für die Ausdrücke T, U (§ V, 11), 12)) beibehalten werden. Man erhält:

$$\Sigma f_{ikt} \zeta_t \zeta_m H_{ik} a_m = V + \frac{\lambda}{(n-1)^2}(U - 4(n-2)TH) - 4\lambda^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 H^2 a_x,$$

falls

$$10) \qquad V = A \Sigma a_t H_{ik} f_{ikt} - \Sigma a_i f_i \Sigma f_t f_{ikt} H_{ik},$$

zur Abkürzung gesetzt wird. Somit wird nach § V, 11a), 11b)

$$G' = \left(B - 2\frac{\lambda HX}{(n-1)^2}\right)\left[H\left(M + N\lambda + T\frac{\lambda^2}{n-1} + a_x\frac{H\lambda^3}{n-1}\right)\right.$$
$$\left. + \lambda V + \frac{\lambda^2}{(n-1)^2}(U - 4(n-2)TH) - 4\lambda^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 H^2 a_x\right]$$
$$- H\left[2\lambda^4\frac{(n-2)}{(n-1)^4}H^2 a_x X + \lambda^3\left(\frac{n-2}{(n-1)^2}HBa_x + \frac{X}{(n-1)^4}(4(n-2)TH - U)\right)\right]$$
$$- \lambda^2 b H - \lambda a H,$$
$$= \lambda^4\varepsilon + \lambda^3\delta + \lambda^2\gamma + \lambda\beta + \alpha,$$

wobei

$$\varepsilon = 2\frac{(2n-5)}{(n-1)^4}H^3 X a_x,$$

$$\delta = -\frac{(4n-9)}{(n-1)^2}Ba_x H^2 - 2\frac{H^2 X}{(n-1)^3}T - \frac{XH}{(n-1)^4}(U - 4(n-2)TH),$$

$$\gamma = \frac{HBT}{n-1} - 2\frac{HXN}{(n-1)^2} + \frac{B}{(n-1)^2}(U - 4(n-2)TH) - 2\frac{HXV}{(n-1)^2} - bH,$$

$$\alpha = BMH,$$

ist. Führt man in G' die Gleichung $\Delta = o$ ein, so kann man, wie eine Vergleichung der Coefficienten δ und γ zeigt, G' in die Form

$$11) \qquad G' = \lambda^3 H^2(sBa_x + tTX) + \lambda^2 H\gamma' + \lambda\beta' + BMH = o,$$

bringen, in der s und t numerische Coefficienten bedeuten. Ich benutze

die Form G' zunächst, um die in § I bestimmte Ordnung der parabolischen Curve auf einem neuen Wege zu ermitteln. Setzt man

$$\lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_f}, \quad \alpha_f = \Sigma \alpha_i f_i,$$

so wird G' von der Ordnung $(11n - 16)$. Von den $4n(n-1)(11n-16)$ Lösungen der Gleichungen

$$G' = 0, \quad f = 0, \quad \Delta = 0,$$

sind aber sechsfach zählend die von

$$\alpha_f = 0, \quad f = 0, \quad \alpha_x = 0,$$

und doppeltzählend, wie aus der Form von G' hervorgeht, die von

$$H = 0, \quad f = 0, \quad \alpha_f = 0,$$

zu entfernen. Subtrahirt man endlich noch den Rang der Centrafläche, so wird

$$4n(n-1)(11n-16) - 6n(n-1) - 8n(n-1)n - 2 - 6n(n-1)^2$$
$$= 6n(n-1)(5n-8),$$

wie bereits in § I angegeben wurde.

Die eindeutige Abbildung s der parabolischen Curve S der Centrafläche auf die Fläche f ist bestimmt durch die Resultante der Formen G' und Δ,

$$12) \qquad W = \begin{vmatrix} BHM & \beta' & H\gamma' & H^2\alpha' & o \\ o & BHM & \beta' & H\gamma' & H^2\alpha' \\ A & B & HX' & o & o \\ o & A & B & HX' & o \\ o & o & A & B & HX' \end{vmatrix}$$

in welcher

$$(n-1)^2 X' = -X,$$
$$\alpha' = sBa_x + tTX,$$

gesetzt ist. Entfernt man aus W den Factor H^2 und Π, so ergiebt sich:

Die parabolische Curve S der Centrafläche ist eindeutig bezogen auf eine Curve s von der Ordnung $8n(2n-3)$, welche der vollständige Schnitt von f mit einer Fläche von der

Ordnung $8(2n-3)$ ist. Beide Curven haben dreifache Puncte, welche den Kreispuncten von f entsprechen.

Eine weitere Betrachtung der Formen W, G′ zeigt: Die Curve s trifft die Curve ψ in $8n(6n-8)(2n-3)$ Puncten. Diese bestehen aus den sechsfach zählenden Kreispuncten, den doppeltzählenden Berührungspuncten vierpunctiger Tangenten von f, welche X berühren, und endlich aus den doppeltzählenden Puncten $A=0, B=0, f=0$; $X=0, B=0, f=0$.

Daher folgt:

Die Rückkehrcurve R und die parabolische Curve S der Centrafläche berühren sich in den genannten

$$4n(4n^2-13n+6),$$

auch der Curve Ψ angehörigen Puncten vierpunctig.[1])

Ich untersuche noch die Durchschnittspuncte von s mit der parabolischen Curve h von f. Aus der Form W findet man zunächst, dass die Puncte $A=0$, $H=0$, $f=0$ einfachzählend hierher gehören; in der That wird auch G Null, wenn $H=0$, $\lambda=0$. Zur Bestimmung der übrigen Schnittpuncte ist die Form I' geeigneter, da sie von dem Factor H befreit ist. Soll die Richtung der parabolischen Tangente y_i, welche durch die Gleichungen

$$13) \qquad \Sigma y_i f_{ik} = 0, \; k = 1, 2, 3, 4;$$

bestimmt ist, mit der Normale eine parabolische Ebene der Centrafläche bilden, so ist in I' $\zeta_i = y_i$ zu setzen, und man erhält aus 5)

$$14) \qquad \Sigma \zeta_i' H_{ik} f_{ikt} = \Sigma \zeta_i' \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0.$$

Dies liefert den folgenden Satz:

Die parabolische Tangente bildet mit der Normalen eine parabolische Ebene der Centrafläche, wenn die Richtung der anderen Krümmungslinie in diesem Puncte in die Tangente der parabolischen Curve fällt.

---

1) Es sind dies übrigens nicht die einzigen Puncte, welche jene Curven gemein haben; wie bekannt, findet in solchen im allgemeinen immer eine Berührung statt.

Es ist leicht, die Zahl dieser Puncte zu bestimmen. Denn aus den Gleichungen

$$\Sigma \zeta_i' x_i = 0, \ \Sigma \zeta_i' y_i = 0, \ \Sigma \zeta_i' f_i' = 0,$$

entsteht an Stelle von 14)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ x_i \\ f_i \\ y_i \end{vmatrix} = 0,$$

welche in den y_i lineare Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 13) eine Curve von der Ordnung

$$4 (n - 2) (5 n - 9) + 6 (n - 2)^2$$

liefert, welche f in den gesuchten

$$2 n (n - 2) (13 n - 24)$$

Puncten schneidet.

Soll dagegen die andere Krümmungslinienrichtung in einem parabolischen Puncte von f zu einer parabolischen Ebene der Centrafläche Veranlassung geben, so muss man zu der Gleichung 4) zurückkehren. Da jetzt

$$15) \qquad \Sigma \zeta_i x_i = 0, \ \Sigma \zeta_i y_i = 0, \ \Sigma \zeta_i f_i = 0,$$

so wird

$$\Sigma (\zeta_i)^2 \equiv \begin{vmatrix} x_i \\ f_i \\ y_i \\ \zeta_i \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die Determinante 4) mit dieser letzteren Determinante, so sondert sich dieselbe als Factor wieder aus, und man erhält nach Abtrennung des Factors A die Bedingung

$$\Sigma y_i x_i \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} + X \Sigma y_i \zeta_t \zeta_k f_{ikt} = 0.$$

Ersetzt man die ζ_i durch die ihnen entsprechenden Unterdeterminanten aus den Gleichungen 15), und die Producte $y_i y_k$ durch die Unterdeterminanten H_{ik}, so entsteht hieraus eine Gleichung von der Form

$$\Sigma y_i p_i = 0,$$

in welcher die p_i die x_i in der $6n-7$. Ordnung enthalten; man erhält also in Verbindung mit 13) eine Curve der Ordnung $4(n-2)(6n-7) + 6(n-2)^2$, welche f in den gesuchten

$$10\,n(n-2)(3n-4)$$

Puncten schneidet. In der That ist nun

$$32(n-2)n(2n-3) = 8n(n-1)(n-2) + 10n(n-2)(3n-4) + 2n(n-2)(13n-24)$$

so dass hiermit alle Schnittpuncte von s und h erschöpft sind.

Ich untersuche endlich die Klasse der parabolischen Ebenen der Centrafläche.

Soll die Tangentenebene in einem parabolischen Puncte durch den willkürlichen Punct a_i gehen, so hat man die Gleichungen

$$16) \qquad \begin{aligned} &\Sigma\zeta_i x_i = 0,\ \Sigma\zeta_i a_i = 0,\ \Sigma\zeta_i f_i = 0,\\ &\lambda\Sigma a_i f_{ik}\zeta_i + \zeta\Sigma a_i f_i = 0, \end{aligned}$$

mit $G = 0$ zu verbinden. Man hat also in

$$G \equiv -H\Sigma a_i f_i \Sigma\zeta_i\zeta_k\zeta_t f_{ikt} + \Sigma\zeta_i\zeta_k f_{ik}[H\Sigma\zeta_i f_{ik} a_i - \Sigma a_i f_i \Sigma\zeta_t H_{ik} f_{ikt}] = 0,$$

die Verhältnisse der ζ_i aus 16 zu substituiren. Dadurch wird G von der Ordnung $(9n-12)$ und man erhält aus den Gleichungen

$$G = 0,\ \Pi = 0,\ f = 0,$$

$$12n(n-1)(3n-4) - 6n(n^2-n+1) - 2n(n-1)^2 - 4n$$

Lösungen. Aber von diesen sind noch diejenigen zu entfernen, welche den Gleichungen

$$H = 0,\ \Sigma\zeta_i\zeta_k f_{ik} = 0,\ \Pi = 0,$$

gleichzeitig genügen. Die Zahl derselben lässt sich in folgender Weise bestimmen.

Multiplicirt man den Ausdruck $\Sigma\zeta_i\zeta_k f_{ik}$, welcher nach 16) die Form

$$P = -\begin{vmatrix} f_{ik} & f_i & x_i & a_i \\ f_k & 0 & 0 & 0 \\ x_k & 0 & 0 & 0 \\ a_k & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

annimmt, mit dem Quadrate der nicht verschwindenden Determinante,

$$\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ f_i \\ a_i \end{vmatrix},$$

in welcher die y_i durch die Gleichungen 13) bestimmt sind, so erhält P das Quadrat des Factors

$$\{\Sigma y_i x_i \Sigma a_i x_i - X \Sigma a_i y_i\}.$$

Denselben Factor weist aber auch die Form Π (§ V, 6) auf, wie man erkennt, wenn man Π mit derselben Determinante multiplicirt, welche letztere diesen Factor nicht besitzt, wie sich aus der Bildung ihres Quadrates ergiebt. Es verschwindet mithin P quadratisch, Π einfach, sobald dieser Factor verschwindet. Derselbe liefert mit den Gleichungen 13) eine Curve von der Ordnung

$$6(n-2)^2 + 8(n-2) = 2(n-2)(3n-2),$$

welche der Fläche f in den doppelt aus der obigen Zahl zu entfernenden Zahl von Puncten begegnet. Man erhält dann als Classe der parabolischen Ebenen

$$12n(n-1)(3n-4) - 6n(n^2 - n + 1) - 2n(n-1)^2 - 4n$$
$$- 4n(n-2)(3n-2) = 2n(n-2)(8n-5),$$

welche Zahl mit der in § I bestimmten übereinkommt. Trotzdem habe ich die soeben ausgeführte Betrachtung nicht übergehen wollen, da sie zugleich zur Bestätigung der im vorigen § ausgeführten Bestimmung der Classe der Rückkehrtangentialebenen der Centrafläche dient.

Endlich kann man auch die Anzahl der Doppelpuncte von s und damit das Geschlecht der parabolischen Curve S bestimmen. Ich gehe hierauf, sowie auf andere Fragen, nicht mehr ein, da die Darlegung lediglich in einer Wiederholung der analogen Betrachtungen des § V bestehen würde.

§ VIII.

Die Centrafläche der Fläche zweiten Grades.

Obwohl die projective Centrafläche der Flächen zweiten Grades schon ausführlich behandelt ist, wird es doch nicht unangemessen sein, diesen Fall in seinem Zusammenhange mit den allgemeinen Entwickelungen des letzten § zu besprechen, da dieselben auf ganz anderen Gesichtspuncten beruhen, wie z. B. die Untersuchungen von Clebsch über das Normalenproblem bei den Flächen zweiten Grades. Ueberdies finden bei den letzteren in Folge ihrer geradlinigen Erzeugung ganz besondere Verhältnisse statt.

Wird der Einfachheit halber f in der canonischen Form

$$1) \qquad f = \Sigma a_i x_i^2 = 0$$

vorausgesetzt, so reduciren sich nach V, 1) und VI, 1) die beiden Formen F und G gleichzeitig auf ein und dieselbe Form

$$F = G = \Omega \Sigma \zeta_i \zeta_k f_{ik} = 0.$$

Die parabolische Curve der Centrafläche fällt hier also mit ihrer Rückkehrcurve zusammen.[1]) Ueberdies zerfällt diese Curve 24. Ordnung in 12 getrennte Theile, die also Kegelschnitte sein müssen. Denn die Determinante Ω liefert gleich Null gesetzt vier Werthe von λ, welchen die vier in dem Büschel $X + \lambda f = 0$ enthaltenen Kegel zugehören; ein Theil des Bildes der Rückkehrcurve besteht also aus den Berührungscurven der von den Ecken des X und f gemeinsamen Polartetraeders an f gelegten Tangentenkegel (den vier Hauptschnitten von f); dem entsprechend besteht dieser Theil

---

1) Im allgemeinen wird die Hesse'sche Fläche eine Rückkehrcurve der Originalfläche zur vierfachen Curve haben, längs deren drei der Tangentialebenen mit der Rückkehrtangentenebene zusammenfallen, während die vierte von derselben verschieden ist. Die Rückkehrcurve zählt daher 11fach als uneigentliche parabolische Curve. Sie ist daher als parabolische Curve zu betrachten, wenn die Hesse'sche Fläche die gegebene Fläche 12- oder mehrfach zählend längs derselben durchsetzt. Insbesondere tritt dies immer ein, wenn die Rückkehrcurve vom Character der Rückkehrkante einer Developpabelen ist, wie dies zuerst von Herrn Rohn analytisch erörtert ist (Ueber das Verhalten der Hesse'schen Fläche in vielfachen Puncten etc. Mathematische Annalen XXIII, S. 106).

der Rückkehrcurve aus vier Kegelschnitten. Der andere, durch das Verschwinden der Discriminante von Δ characterisirte Theil des Bildes der Rückkehrcurve[1]) fällt gleichzeitig mit der Curve ψ zusammen, für welche die beiden Krümmungshalbmesser gleich werden, und besteht aus den 8 Erzeugenden von f, welche X berühren.

Die Gleichung $\Delta = 0$ wird nämlich

$$2) \qquad \Sigma \frac{a_i^2 x_i^2}{\lambda - a_i} = 0.$$

Ihre Discriminante ist die Resultante von 2) und

$$3) \qquad \Sigma \frac{a_i^2 x_i^2}{(\lambda - a_i)^2} = 0.$$

Nimmt man an Stelle der Gleichungen 1), 2), 3) die folgenden, welche sich durch einfache Combination derselben ergeben

$$4) \qquad \Sigma a_i x_i^2 = 0,$$

$$\Sigma \frac{a_i x_i^2}{\lambda - a_i} = 0,$$

$$\Sigma \frac{a_i x_i^2}{(\lambda - a_i)^2} = 0,$$

so erhält man als Bild des eben bezeichneten Theiles der Rückkehrcurve die 8 Geraden mit dem Parameter λ

$$\begin{aligned} &a_1 x_1^2 : a_2 x_2^2 : a_3 x_3^2 : a_4 x_4^2 = \\ &(\lambda - a_1)^2 (a_2 - a_3)(a_3 - a_4)(a_4 - a_2) \\ &: (\lambda - a_2)^2 (a_1 - a_3)(a_3 - a_4)(a_4 - a_1) \\ &: (\lambda - a_3)^2 (a_2 - a_1)(a_1 - a_4)(a_4 - a_2) \\ &: (\lambda - a_4)^2 (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1), \end{aligned}$$

welche zu je zweien sich in je einem der 16 in den Hauptschnitten

---

1) In den Arbeiten von Clebsch und Herrn Caspary über diesen Gegenstand werden diese 8 Kegelschnitte nur als osculierende der Fläche bezeichnet; bei Salmon-Fiedler, An. Geometrie Theil II, S. 342, findet sich die richtige Darstellung. Es ist nicht uninteressant zu vergleichen, wie der verschiedene Character der Rückkehrcurven erster und zweiter Art sich in der Betrachtung dieses § und in der analytischen Untersuchung von Clebsch darstellt.

liegenden Kreispuncten begegnen. Die Hauptschnitte sind überdies dadurch characterisirt, dass die Gleichung der Fläche

$$\Theta = \begin{vmatrix} x_i \\ a_i x_i \\ a_i^2 x_i \\ a_i^3 x_i \end{vmatrix} = 0$$

sich hier auf $x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = 0$ reducirt.

Bezeichnet man die 8 Rückkehrkegelschnitte, welche den Erzeugenden entsprechen als Rückkehrcurve erster Art, die 4 anderen als solche zweiter Art, so hat man noch:

Einem beliebigen ebenen Schnitte der Fläche zweiten Grades entspricht auf ihrer Centrafläche eine Curve 8. Ordnung vom Geschlechte 3, welche jede der Rückkehrcurven erster Art in einem, jede der Rückkehrcurven zweiter Art in zwei Puncten berührt. Einer Erzeugenden der Fläche entsprechen daher Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 1, jede derselben berührt vier der Rückkehrcurven erster Art, sowie die von der zweiten Art in je einem Puncte. Die Centrafläche kann demnach auf zwei verschiedene Arten durch solche Curven erzeugt werden, deren Umhüllungscurven ihre Rückkehrcurve bilden; doch ist hier nicht der Ort, um auf diese Erzeugung näher einzugehen.

§ IX.

Die projective Centrafläche zweiter Art.

Man kann die Centrafläche zweiter Art als einen Grenzfall der Centrafläche erster Art ansehen,[1]) und ich werde mich daher auf wenige Bemerkungen beschränken. Wird als „absolutes Gebilde“ der Kegelschnitt betrachtet, welcher durch die „absolute“ oder „unendlich ferne“ Ebene

$$1) \qquad a_x = 0,$$

aus der Fläche zweiten Grades $X = 0$ ausgeschnitten wird, so hat man

1) Wollte man dies auch in der analytischen Darstellung zum Ausdruck bringen, so wäre von einer Fläche n. Classe f auszugehen

unter der Normale der Fläche diejenige Gerade zu verstehen, welche den Fusspunct x mit dem in $a_x = o$ gelegenen Puncte

$$2) \qquad \psi_i = y_i = a_i \psi - C f_i,$$

verbindet, wo

$$3) \qquad \begin{aligned} \psi &= \Sigma a_i f_i, \\ C &= \Sigma a_i^2, \end{aligned}$$

gesetzt ist. C verschwindet nicht, falls nicht eine speciellere Massbestimmung vorausgesetzt ist, bei welcher der absolute Kegelschnitt in ein Linienpaar degenerirt, wovon hier abgesehen wird.

Da $$\psi_{ik} = a_i \Sigma a_s f_{sk} - C f_{ik},$$

so wird die Gleichung $\Delta = o$ nach § I die Form annehmen

$$4) \qquad \Delta = A C - \psi^2 + \lambda C B - \frac{\lambda^2 C^2}{(n-1)^2} a_x^2 H = o,$$

wo

$$5) \quad B = (\psi^2 - A C) \Sigma f_{ii} + A \Sigma a_i a_k f_{ik} - 2 \psi \Sigma f_i a_k f_{ik} + C \Sigma f_i f_k f_{ik},$$

und der zugehörige Punct der Centrafläche durch

$$6) \qquad z_i = x_i + \lambda \psi_i,$$

gegeben ist.

Die Bestimmung der Grössen ζ_i, ξ_i, (§ I, 10), 11)) kann man auf die einer Grösse y_i zurückführen, welche den Gleichungen

$$7) \qquad \begin{aligned} y_i - C \lambda \Sigma f_{ki} y_k + \sigma f_i + \tau a_i &= o, \\ \Sigma a_i y_i &= o, \\ \Sigma f_i y_i &= o, \\ \Sigma y_i x_i + \tau \Sigma a_i x_i &= o, \end{aligned}$$

genügt. Setzt man nämlich

$$8) \qquad \begin{aligned} \zeta_i &= y_i + \tau a_i, \\ \xi_i &= y_i - \frac{\sigma x_i}{(n-1) \lambda C}, \end{aligned}$$

so wird

$$\zeta_k + \lambda \Sigma \zeta_i \psi_{ik} + \sigma f_k = o;$$

also wird die früher mit ζ bezeichnete Grösse

$$\zeta = \sigma,$$

und ebenso ergiebt sich aus den vermöge 7), 8) bestehenden Gleichungen

$$\xi_k + \lambda \Sigma \xi_t \psi_{kt} + \frac{\sigma x_k}{(n-1) C \lambda} = 0,$$

$$\xi = \frac{\sigma}{(n-1) C \lambda}.$$

Die aus 7) zur Bestimmung von λ sich ergebende Determinantengleichung

$$9) \qquad \begin{vmatrix} 1 - \lambda C f_{ik} & f_i & a_i \\ f_k & 0 & 0 \\ a_k & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

liefert entwickelt wieder die Gleichung 4).

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen 7), 8) ist folgende. Die Puncte ζ bilden bekanntlich die reciproke Fläche der Centrafläche, während a_i der Pol der Ebene a_x in Bezug auf X ist. Die (in $a_x = 0$ gelegenen) Puncte y entstehen demnach durch Projection der Reciprokalfläche der Centrafläche auf die unendlich ferne Ebene vom Puncte a_i aus. Da der Pol a_i selbst ein $n(n-1)$ facher Punct jener letzteren Fläche ist, so entspricht also der Gleichung

$$\Sigma p_i y_i = 0,$$

ein ebener Schnitt dieser Reciproken, welcher einen $n(n-1)$ fachen Punct in a_i hat.

Vermöge y_i drückt sich nun die Bedingung § II für diejenigen Puncte auf f, welche zu Rückkehrpuncten der Centrafläche gehören, aus durch die Gleichung

$$10) \qquad F = -\lambda C \Sigma y_i y_k y_t f_{ikt} + 3 \sigma \Sigma y_i y_k f_{ik} = 0,$$

welche sich für

$$y_i = \eta_i + \frac{\sigma x_i}{(n-2) \lambda C},$$

reducirt auf

$$\Sigma \eta_i \eta_k \eta_t f_{ikt} = 0,$$

und ebenso ergiebt sich für die Bedingung der parabolischen Puncte aus § II

11) $$G = HC\lambda\Sigma y_i y_k y_t f_{ikt} + \Sigma y_i y_k f_{ik}(\sigma H - \lambda C \Sigma y_t H_{ik} f_{ikt}) = o,$$

so dass die mit F und G bezeichneten Formen sich ungeändert erhalten.

Der Schnitt der Centrafläche mit der Ebene $a_x = o$ besteht bekanntlich — was übrigens unmittelbar aus 6) folgt — aus einer Curve $n(n-1)$. Ordnung, welche gleichzeitig Rückkehr- und parabolische Curve derselben ist, und von der reciproken Curve von $f = o$, $a_x = o$ in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt (imaginärer Kreis) gebildet wird; die Coordinaten derselben sind

$$z_i = a_i \psi - f_i C \text{ für } a_x = o,\ f = o;$$

ferner aus einer Curve $3n(n-1)$. Ordnung

$$z_i = x_i + \lambda [a_i \psi - f_i C],$$

wo λ aus $\Delta = o$ für $a_x = o$ zu entnehmen ist, nämlich der projectiven Evolute des Schnittes von f mit $a_x = o$; endlich aus der Curve $4n(n-1)(n-2)$. Ordnung

$$y_i = a_i \psi - f_i C,\ f = o,\ H = o,$$

welche der parabolischen Curve auf f entspricht.[1])

Der übrige Theil der Rückkehrcurve ist also eine Curve der Ordnung

$$11n(n-1)(2n-3)$$

welche eindeutig bezogen ist auf eine Curve $n(16n-25)$. Ordnung, die selbst der vollständige Schnitt einer Fläche $16n-25$. Ordnung mit f ist. Und ebenso ist der übrige Theil der parabolischen Curve von der Ordnung $n(n-1)(30n-49)$; die eindeutige Abbildung desselben von derselben Ordnung wie die der Rückkehrcurve.

Ueberhaupt werden, wie man sieht, alle Resultate der früheren Untersuchungen mit Hülfe der eingeführten Coordinaten y sich auf den vorliegenden Fall übertragen lassen. Im Folgenden sollen nur noch einige Verhältnisse erörtert werden, welche für die Centraflächen zweiter Art charakteristisch sind.

---

1) Das gegenwärtige für die Singularitäten des unendlich fernen Schnittes der Centrafläche wichtige Verhalten dieser Curven ist durch den Satz in § VI ausgesprochen.

Bezeichnet man die Gleichung 4) durch

$$4\,a) \qquad \alpha + \beta\,\lambda + \gamma\,\lambda^2 = 0,$$

so wird die Discriminante

$$\Psi = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = 0$$

diejenigen Puncte auf f bestimmen, deren eine Haupttangente den absoluten Kegelschnitt schneidet. In den Kreispuncten, deren Zahl $n\,[10\,n^2 - 28\,n + 22]$ ist, finden daher Doppelpuncte der mit Ψ, ψ bezeichneten Curven statt. Es sind dies aber nicht die einzigen Doppelpuncte von ψ, wie man bisher angenommen zu haben scheint.[1]) Der in § X, 6) gegebene Werth des Coefficienten $BC = \beta$ zeigt, dass die Fläche $\Psi = 0$ in den $2n$ Puncten $x = 0$, $f = 0$, $a_x = 0$ ebenfalls Doppelpuncte besitzt, und dass zu diesen noch $3\,n\,(n-2)$ weitere hinzukommen, bestimmt durch die Gleichungen

$$a_x = 0, \quad f = 0, \quad \Sigma a_i a_k H_{ik} = 0,$$

d. h. durch diejenigen Puncte in der Curve $a_x = 0$, $f = 0$, für welche eine der Haupttangenten von f in die Ebene $a_x = 0$ fällt, d. h. die Wendepuncte derselben.

Das heisst:

Der Ort derjenigen Puncte, denen untereinander gleiche Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser zugehören, ist eine Curve der Ordnung $n(6\,n - 8)$, welche in den Kreispuncten, den Wendepuncten des unendlich fernen Schnittes und den Schnittpuncten desselben mit dem imaginären Kreise Doppelpuncte hat.

Die soeben erwähnten $2\,n$ Schnittpuncte des imaginären Kreises mit f, welche ich als secundäre Kreispuncte von f bezeichne, spielen in Rücksicht auf das Normalenproblem völlig die Rolle der eigentlichen Kreispuncte. Denn der Kegel K, welcher die Richtungen der beiden Krümmungslinien auf der Tangentenebene von f ausschneidet, wird

---

1) Herr Fiedler scheint zuerst die in die Kreispuncte fallenden Doppelpuncte von ψ bemerkt zu haben. Salmon-Fiedler. A. Geometrie Theil II, S. XXIX der Literatur-Nachrichten.

$$12) \quad \begin{vmatrix} x_i \\ a_i \psi - f_i C \\ z_i \\ a_i \Sigma a_s f_{sk} z_k - C \Sigma f_{ik} z_k \end{vmatrix} = o;$$

seine Gleichung geht für $a_x = o$, $X = o$, über in

$$\Sigma a_i z_i \Sigma z_i f_i = o.$$

Auch für die secundären Kreispuncte existiren also unendlich viele benachbarte Normalen, welche die Normale in demselben Doppelpuncte der Centrafläche schneiden. Dementsprechend giebt es eine lineare Reihe von Werthen ζ_i, welche hier von der Form $a_i + \varrho x_i$ ist. Jedem der $2n$ secundären Kreispuncte γ der Fläche entspricht auf der reciproken Centrafläche eine Gerade mit constanter Tangentialebene, welche durch γ und den $n(n-1)$ fachen Punct dieser Fläche geht.

In den $3n(n-2)$ Wendepuncten des unendlich fernen Schnittes findet eine solche Besonderheit nicht statt; die beiden Krümmungslinien fallen hier in die Richtung der Wendetangente.

Bildet man zur Untersuchung der Rückkehrcurve wie in § V die Form

$$F' = F \Sigma p_i y_i,$$

so ist zunächst die Form $\Sigma p_i y_i$ selbst zu untersuchen. Man erhält

$$13) \quad (\Sigma p_i y_i)^2 = \Sigma A_{ik} p_i p_k + \frac{\lambda C}{(n-1)^2} \{L p_x^2 + M a_x^2 - 2 a_x p_x N\},$$

wo

$$L = \Sigma a_i a_k H_{ik},$$
$$M = \Sigma p_i p_k H_{ik},$$
$$N = \Sigma a_i p_k H_{ik},$$

$$\Sigma A_{ik} p_i p_k = \begin{vmatrix} A & \psi & \Sigma p_i f_i \\ \psi & C & \Sigma p_i a_i \\ \Sigma p_i f_i & \Sigma p_i a_i & \Sigma p_i^2 \end{vmatrix},$$

gesetzt ist. Die Gleichung

$$\Sigma p_i y_i = o,$$

stellt, wie oben bemerkt, den ebenen Schnitt der Reciproken der Centrafläche vor, welcher durch den Pol a und den Schnitt der absoluten

Ebene mit der Ebene $p_x = o$ gelegt ist. Diese Curve ist eindeutig auf die aus den Puncten x gebildete Curve bezogen, die doppelt zählend aus der Elimination von λ aus 13) und $\Delta = o$ hervorgeht, d. h. auf eine Curve von der Ordnung $n(4n-5)$, welche selbst der vollständige Schnitt einer Fläche Π'' $4n-5$. Ordnung mit f ist, deren Gleichung die Form

$$14) \qquad \Pi'' = \begin{vmatrix} \varphi \Sigma f_{ik} p_k + \chi \Sigma f_{ki} a_k + \omega \Sigma f_{ki} f_k \\ p_i \\ a_i \\ f_i \end{vmatrix} = o,$$

hat, wenn man

$$\varphi = \psi^2 - A C,$$
$$\chi = A \Sigma a_i p_i - \psi \Sigma f_i p_i,$$
$$\omega = C \Sigma f_i p_i - \psi \Sigma a_i p_i,$$

gesetzt wird. Die Fläche Π'' geht durch die eigentlichen Kreispuncte von f; sie hat die Curve $(n-1)^2$ Ordnung, für welche die Unterdeterminanten der ersten Horizontalreihe von 14) sämmtlich verschwinden, zur Doppelcurve, wie eine nähere Untersuchung von 14) zeigt. Jene Curve ist also vom Geschlechte

$$15) \qquad p = \tfrac{1}{2} n(4n-5)(5n-9) + 1 - n(n-1)^2;$$

ihr entspricht eindeutig auf der Centrafläche eine Curve von der Ordnung $6n(n-1)^2 - n(n-1)$. Somit hat man:

Der von einem Puncte der absoluten Ebene an die Centrafläche gelegte Tangentenkegel ist im allgemeinen von der Ordnung $n(n-1)(6n-7)$ und vom Geschlechte p (15); seine Classe ist die der Centrafläche selbst.

Um die Form F (10) näher zu untersuchen, bilde man jetzt

$$F' = F \Sigma p_i y_i.$$

Man findet dann leicht aus 13) die Gleichungen

$$16) \qquad \begin{aligned} \Sigma A_{ik} f_{ik} &= -B, \\ \Sigma A_{tm} f_t &= o, \\ \Sigma A_{tm} a_t &= o, \\ \Sigma y_i y_k f_{ik} &= -\left(B - 2\frac{H \lambda C a_x^2}{(n-1)^2}\right). \end{aligned}$$

Ferner ergiebt sich

$$\sigma \Sigma p_i y_i = C \Sigma p_i f_i - \psi \Sigma a_i p_i + \frac{\lambda C}{n-1}(p_x U - a_x V - W) + \frac{\lambda^2 C^2}{(n-1)^2}(p_x L - a_x N),$$

wobei U, V, W Ausdrücke sind, deren Form für das folgende gleichgültig ist. Setzt man endlich

$$\begin{aligned} 3(C \Sigma p_i f_i - \psi \Sigma a_i p_i) &= r, \\ 3(p_x U - a_x V - W) &= s, \\ p_x L - a_x N &= t, \\ a_x^2 \Sigma f_{ikt} p_m (H_{ik} A_{tm} + H_{tm} A_{ik}) - a_x p_x \Sigma A_{ik} H_{ts} a_s f_{ikt} &= u, \\ \Sigma H_{ik} f_{ikt} (a_x H_{tm} p_m - p_x H_{ts} a_s) &= v, \\ \Sigma A_{ik} f_{ikt} A_{tm} p_m &= w, \\ \lambda C &= \mu, \end{aligned}$$

so wird mit Hülfe von 16)

$$F' = \left(r + \frac{\mu s}{n-1} + 3\frac{\mu^2 t}{n-1}\right)\left(B - 2\mu \frac{a_x^2 H}{(n-1)^2}\right) + \mu w + \frac{\mu^2}{(n-1)^2}(u - B(n-2)t) + \frac{\mu^3}{(n-1)^4}(4(n-2)Ht + a_x v)a_x^2$$

$$= \alpha' + \beta'\mu + \gamma'\mu^2 + \delta' a_x^2 \mu^3 = 0;$$

wo

$$\alpha' = rB,$$

$$(n-1)^2 \gamma' = u + (2n-1)tB - 2a_x^2 \frac{Hs}{n-1},$$

$$(n-1)^4 \delta' = a_x v - 2(n+1)Ht;$$

mittelst dieser Ausdrücke bestätigt man leicht, dass die Ordnung der nicht ebenen Rückkehrcurve gleich $11n(n-1)(2n-3)$ wird, wie oben angegeben wurde. Die Resultante R aus $F' = 0$ und $\Delta = \alpha + \mu B + \mu^2 a_x^2 \gamma = 0$, $(n-1)^2 \gamma = -H$ lässt sich von dem Factor a_x^2 befreien und liefert, wenn man noch den Factor Π'' entfernt, eine Form $16n-25$. Ordnung, welche das Bild der Rückkehrcurve auf f ausschneidet.

Auf dem unendlich fernen Schnitte $a_x = 0$, $f = 0$ von f müssen sich daher $n(16n-25)$ Puncte befinden, welche zu Puncten der Rückkehrcurve gehören. Diese lassen sich leicht an der Form von R nachweisen.

Setzt man nämlich $a_x = o$, so haben die übrig bleibenden Terme von R die Form

$$R = HX^2L^3R_1,$$

aus welcher aber der Factor L einmal entfernt werden muss, da derselbe für $a_x = o$ auch in Π'' enthalten ist, wie aus der in 13) gegebenen Form dieses Ausdruckes hervorgeht, wenn man berücksichtigt, dass nach § X, 6) für $a_x = o$

$$B = XL$$

wird. Jene Puncte bestehen also aus den $4n(n-2)$ parabolischen Puncten von f in der Ebene $a_x = o$,[1]) aus den doppeltzählenden secundären Kreispuncten, in denen das Bild der Rückkehrcurve selbst Doppelpuncte hat, aus den doppeltzählenden Wendepuncten von $f = o$, $a_x = o$, und endlich aus den $3n(2n-3)$ Puncten dieses Schnittes, welche Spitzen der Evolute bedingen. In der That ist dann auch

$$n(16n-25) = n\{4(n-2)+6n-9+4+6(n-2)\}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die $11n(n-1)(2n-3)$ Puncte der Rückkehrcurve, welche in den unendlich fernen Schnitt der Centrafläche fallen, nachweisen.

§ X.

Ueber eine Classe algebraischer Flächen, welche die projectiven Minimalflächen als speciellen Fall enthält.

Die beiden Wurzeln der Gleichung $\Delta = o$ sind im allgemeinen nicht rational getrennt.[2]) Die Centrafläche ist daher im allgemeinen ein einziges irreducibeles Gebilde. Einen besonderen Fall bilden diejenigen Flächen, für welche die Discriminante Ψ von Δ mit Hilfe von $f = o$ das Quadrat einer rationalen Function wird; die Centrafläche besteht dann aus zwei getrennten Theilen. Wenn jene Discriminante überall mit f

1) Das Auftreten dieser Puncte ist dem der Puncte $H = o$, $f = o$, $X = o$ bei der C. Fläche erster Art zu vergleichen. Vgl. § V.

2) Eine rationale Trennung der Wurzeln tritt ein für die beiden algebraischen Krümmungslinien, die parabolische Curve und den Hauptschnitt.

verschwindet, so fallen jene Theile zusammen. Es ist dies der Fall, wenn f eine Regelfläche ist, deren Erzeugende die Fläche X berühren (den absoluten Kegelschnitt schneiden); die Differentialgleichung dieser Flächen ist [1])

$$1) \qquad (n-1)^2 B^2 + 4 X H A = N f.$$

Für eine Fläche zweiten Grades, welche X längs eines Kegelschnittes berührt, d. h. eine projective Kugel, degenerirt die Centrafläche in einen einzigen Punct, den Pol der ebenen Berührungscurve.

Die Flächen, welche der zu 1) analogen Differentialgleichung

$$B^2 + k X H A = N f,$$

genügen, d. h. für die das Doppelverhältniss der Hauptkrümmungscentra zu dem Flächenpuncte und dem Pol seiner Tangentenebene in Bezug auf X constant ist, haben einige gemeinsame Eigenschaften, die ich im Folgenden darlegen werde.[2]) Solche Flächen mögen Flächen W heissen; ich betrachte zunächst die Flächen W erster Art.

Zu denselben gehören insbesondere die der Gleichung

$$B = N f$$

entsprechenden, d. h. die projectiven Minimalflächen erster Art, bei welchen jenes Doppelverhältniss in ein harmonisches übergeht.

Beachtet man die nach IV, 2), 3) vermöge $f = o$ bestehenden Identitäten

$$2) \qquad B = A \Sigma f_{ii} - \Sigma f_i f_k f_{ik},$$

$$(n-1)^2 B = \Sigma x_i x_k H_{ik} - X \Sigma H_{ii},$$

so folgt:

---

1) Sollen die Haupttangenten der einen Schaar von f, wie dies für $\Psi = o$ stattfinden muss, X berühren, so muss die Schmiegungsebene der betreffenden Haupttangentencurve auch Tangentenebene von X sein. Da nun die Schmiegungsebene einer Haupttangentencurve mit der Tangentenebene der Fläche zusammenfällt, so muss jede Tangentenebene von f zugleich eine solche von X sein. Die obige Bedingung kann daher nur so erfüllt werden, dass die Schmiegungsebene unbestimmt wird, d. h. dass jene Schaar aus geraden Linien besteht.

2) Noch allgemeiner könnte man Gleichungen von der Form

$$B = P X + N f$$

oder ähnlich gebildete untersuchen; die folgenden Resultate gelten zum Theil auch für diese.

Eine Fläche W erster Art — allgemeiner, eine Fläche bei der überhaupt B mit $f = o$, $X = o$ verschwindet — trifft die absolute Fläche (nach 2)) nur in denjenigen Puncten, wo

$$\Sigma x_i x_k H_{ik} = o.$$

Entweder sind nun alle H_{ik} gleich Null, d. h. der Punct ist ein Osculationspunct von W.[1]) Existirt eine ganze Curve solcher Puncte, so muss dieselbe, wie man leicht sieht, eben sein; sie kann dann als Schnitt von W und X nur in geraden Linien und Kegelschnitten bestehen, längs deren eine constante Tangentenebene osculiert. Schliesst man diesen Fall, sowie die Annahme singulärer Curven, aus, so ist der Punct

$$3) \qquad z_i = \Sigma x_i H_{ik}$$

ein völlig bestimmter, und die Gerade (z x) gleichzeitig Haupttangente von W und Tangente von X, wie aus den Gleichungen

$$4) \quad \begin{aligned} &\Sigma z_i f_{ik} = H x_k, \ \Sigma z_i z_k f_{ik} = H \Sigma x_i x_k H_{ik}, \\ &\Sigma z_i x_i = \Sigma H_{ik} x_i x_k, \\ &(n-1)\Sigma z_i f_i = H X, \\ &\Sigma z_i f_k f_{ik} = n f H, \end{aligned}$$

hervorgeht. Daraus folgt:

Der Schnitt einer Fläche W erster Art mit der absoluten Fläche ist gleichzeitig Krümmungslinie und Haupttangentencurve von W.

Diese Behauptung erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn z mit x zusammenfällt. Nun ist z völlig durch die Gleichungen 4) bestimmt, falls nicht alle Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_i \\ f_i \\ \Sigma f_{ik} f_k \end{Vmatrix}$$

verschwinden. Im allgemeinen kann daher z nur dann wieder auf X liegen, wenn die Determinante

---

1) Vgl. Rohn, a. a. O. S. 102.

$$\begin{vmatrix} (i\,k) & x_i & f_i & \Sigma f_s f_{si} \\ x_k & 0 & 0 & 0 \\ f_k & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma f_s f_{sk} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet; d. h., wenn $A^3 = 0$ ist. Ist aber dies der Fall, so haben die Gleichungen 4), da nach 2) auch

$$\Sigma f_i f_k f_{ik} = 0$$

sein muss, die lineare Reihe von Lösungen

$$z_i = x_i t + f_i,$$

und es wird überhaupt

$$\nu \Sigma f_k f_{ki} + \varrho x_i + \sigma f_i = 0.$$

Es ist also entweder $f_i \equiv x_i$; der Punct z fällt dann mit x zusammen, und die Fläche W berührt die Fläche X längs der betrachteten Schnittcurve, welche dann nicht Haupttangentencurve von W zu sein braucht.[1]) Oder es ist f_i von x_i wesentlich verschieden; die Gerade (z x) wird dann sowohl Haupttangente von W als auch Erzeugende von X. Somit folgt:

Wenn die Tangentenebenen von W längs der Puncte x ihrer Schnittcurve mit X die letztere Fläche in einem von x verschiedenen Puncte berühren, so besteht jene Schnittcurve aus lauter Erzeugenden von X.

Setzt man andererseits $A = 0$, so ist nach 2)

$$\Sigma f_i f_k f_{ik} = 0.$$

Das heisst

Für die Flächen W erster Art ist die Curve $f = 0$, $A = 0$ gleichzeitig Haupttangentencurve und Krümmungslinie.

Setzt man endlich $H = 0$, so bestehen die Gleichungen

$$\Sigma y_i f_{ik} = 0, \quad H_{ik} \equiv y_i y_k;$$

mithin wird aus 2)

$$X \Sigma y_i^2 - (\Sigma x_i y_i)^2 = 0,$$

oder:

---

1) Dies ist z. B. der Fall bei den oben genannten Regelflächen.

Die parabolischen Tangenten der Flächen W erster Art berühren sämmtlich die Fläche X; die Developpabele der parabolischen Ebenen ist gleichzeitig der X umschrieben; Ausnahmen können wieder eintreten, wenn die H_{ik} längs einer Osculationscurve verschwinden etc.

Für die projectiven Centraflächen zweiter Art erhält man aus der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \lambda C f_{ik} & f_i & a_i \\ f_k & o & o \\ a_k & o & o \end{vmatrix}$$

als Werth des Coefficienten B von λ C, wie bereits angegeben wurde,

$$5) \quad (\psi^2 - A C) \Sigma f_{ii} + C \Sigma f_i f_k f_{ik} + A \Sigma a_i a_k f_{ik} - 2 \psi \Sigma a_i f_k f_{ik}.$$

Addirt man dagegen die mit den x_i multiplicirten ersten vier Reihen zu der fünften, so entsteht

$$\lambda^2 C^2 (n-1)^2 \Delta = \begin{vmatrix} 1 - \lambda C f_{ik} & x^i & a_i \\ x_k & X & a_x \\ a_k & a_x & o \end{vmatrix};$$

mithin wird der Werth jenes Coefficienten auch durch den folgenden Ausdruck dargestellt

$$6) \quad \frac{1}{(n-1)^2} \left[a_x^2 \Sigma H_{ii} + X \Sigma a_i a_k H_{ik} - 2 a_x \Sigma a_i x_k H_{ik} \right].$$

Versteht man wieder unter einer Fläche W zweiter Art eine solche, bei der eine der obigen analoge Differentialgleichung besteht, so gehören zu denselben die projectiven Minimalflächen zweiter Art, sowie diejenigen Flächen, bei denen das Verhältniss der Hauptkrümmungshalbmesser constant ist.

Nun folgt aus 6), wenn B überhaupt mit $f = o$ und $a_x = o$ verschwindet:

$$X \Sigma a_i a_k H_{ik} = o,$$

das heisst, Eine Fläche W zweiter Art schneidet die unendlich ferne Ebene in einer Curve, die ausser dem absoluten Kegel-

schnitt nur aus einem Gebilde mit lauter Wendungspuncten, d. h. einer Anzahl von Geraden bestehen kann.[1])

Eine Ausnahme kann auch hier eintreten, wenn alle H_{ik} gleich Null werden, oder überhaupt höhere Singularitäten auf W entstehen.

Ist dagegen $H = o$, und verschwindet B mit $H = o$, $f = o$, so wird wegen $H_{ik} \equiv y_i y_k$ der Ausdruck 6) die Gleichung

$$a_x^2 \Sigma y_i^2 + X \Sigma y^2 - 2 a_x a_y \Sigma x_i y_i = o$$

liefern, mit anderen Worten:

Die parabolischen Tangenten der Flächen W zweiter Art schneiden sämmtlich den absoluten Kegelschnitt; die Developpabele der parabolischen Ebenen ist diesem Kegelschnitte umschrieben.[2])

Verschwindet endlich B mit $f = o$ und

$$E = \psi^2 - C A = o,$$

so wird nach 5)

$$A \Sigma a_i a_s f_{si} - 2 \psi \Sigma f_i a_k f_{ik} + C \Sigma f_i f_k f_{ik} = o.$$

Dies bedeutet aber, dass die Krümmungslinie, welche durch den Schnitt von $f = o$, $E = o$ dargestellt wird, zugleich Haupttangentencurve von f ist. Denn schreibt man die eben angegebene Gleichung vermöge $E = o$ in der Form

$$D = \psi^2 \Sigma a_i a_s f_{si} - 2 \psi C \Sigma f_i a_k f_{ik} + C^2 \Sigma f_i f_k f_{ik} = o$$

und setzt

$$z_i = a_i \psi - f_i C,$$

so wird

$$\Sigma z_i f_i = E = o,$$

$$\Sigma z_i z_k f_{ik} = D = o,$$

$$\Sigma z_i \frac{\partial E}{\partial x_i} = 2 D = o.$$

---

1) Diesen Satz gab für eine eigentliche Minimalfläche zuerst Herr Geiser Math. Annalen III, 530; dass für diese Flächen die oben erwähnten Ausnahmen nicht eintreten, sondern von ganz speciellen Fällen abgesehen, der Schnitt der Flächen mit der unendlich fernen Ebene nur aus geraden Linien besteht, zeigte zuerst Herr Lie, Math. Annalen XIV, S. 400 ff.

2) Vgl. Lie, a. a. O. Satz 69.

Für die Flächen W zweiter Art ist also die eigentliche algebraische Krümmungslinie zugleich eine Haupttangentencurve.[1])

Wie man sieht, gehören die Eigenschaften, welche Herr Geiser zuerst von den algebraischen Minimalflächen (im eigentlichen Sinne) bewiesen hat, einer allgemeineren Classe von Flächen an, sowie auch ein Theil der Sätze, welche Herr Lie über Minimalflächen entwickelt hat; vielleicht habe ich Gelegenheit, an einer anderen Stelle die Theorie der projectiven Minimalflächen im weiteren Sinne genauer zu verfolgen.

§ XI.

Betrachtung einiger besonderen Fälle.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen sollen endlich einige der Modificationen erörtert werden, welche in den characteristischen Zahlen der Centraflächen eintreten, wenn die Fläche f einen vielfachen Punct hat, oder die Fläche X, resp. die unendlich ferne Ebene berührt. Einige Andeutungen müssen hier indess genügen, da eine vollständigere Behandlung der hier in Betracht kommenden Fälle zu weit führen würde.

Wenn f einen Knotenpunct, den man sich etwa conisch denken möge, hat, — die Untersuchungen für höhere vielfache Puncte können in derselben Weise geführt werden, — so erniedrigt sich die Ordnung des Strahlensystems der Normalen um 2 Einheiten; die Classe bleibt ungeändert. Die Classe der Centrafläche erniedrigt sich um 2 Einheiten, ihre Ordnung um 6.[2]) Letzteres kann man direct aus der Betrachtung von Δ entnehmen, wenn man beachtet, dass die Hesse'sche Fläche H in jedem conischen Knoten von f dieselbe Singularität mit demselben osculirenden Kegel wie f hat. Setzt man zur Bestimmung der Ordnung

---

1) Vgl. Lie, a. a. O. Satz 68.

2) Diese Reductionen erfolgen im allgemeinen gemäss dem von Herrn Klein gegebenen Satze, Göttinger Nachrichten 1870; die weiter unten gegebenen Beispiele zeigen indess, dass derselbe bei der gewöhnlichen Auffassung nicht immer erhalten bleibt. Classe und Ordnung der Centrafläche sind übrigens für Flächen mit beliebigen Singularitäten bekannt; vgl. die Untersuchungen von Roberts und Sturm Math. Annalen VI.

in die Form

$$1) \quad \lambda = -\frac{\alpha_x}{\alpha_t}$$

$$\Delta = A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

ein, so fallen demnach 6 eigentliche Lösungen für den Schnitt einer beliebigen Geraden mit der Centrafläche in den Knoten von f. Dieser Punct selbst wird ein sechsfacher Punct der Centrafläche, wie man erkennt, wenn man den Schnitt derselben mit einer durch denselben gehenden Geraden betrachtet. Auf demselben Wege findet man leicht, dass das Geschlecht des Tangentenkegels der Centrafläche sich um 7, das Geschlecht ihrer ebenen Schnittcurve um 9, endlich der Rang der Centrafläche sich um 6 Einheiten erniedrigt.

Was den letzteren Punct betrifft, so hat man z. B. für die Centrafläche erster Art nach § V, 7) die Formen

$$\Delta = 0, \ [\Sigma(a_i \zeta_i)]^2 = 0, \ f = 0$$

für den durch 1) bestimmten Werth von λ zu untersuchen. Vermöge der in § X, 5), 6), entwickelten Identität erfährt dann die ebenso wie bei § V, 7) zu bestimmende Ordnung der der Curve Π auf der Centrafläche entsprechenden Curve eine Reduction um 6 Einheiten. Vermöge der Plücker'schen Gleichungen folgt dann weiter für die Rückkehrcurve der Centrafläche eine Reduction um 24, für die Classe ihrer parabolischen Ebenen eine Reduction um 12 Einheiten.

Für die Kegelflächen zweiten Grades gelten diese Betrachtungen nicht mehr. Ueberhaupt verschwindet für eine Developpabele Fläche H überall mit f, so dass die quadratische Gleichung $\Delta = 0$ sich auf eine lineare reducirt. Die Ordnung des Strahlensystems der Normalen wird für einen Kegel zweiten Grades gleich 4, die Classe bleibt ungeändert; die Ordnung der Centrafläche reducirt sich um 6 Einheiten, sie selbst wird ein Kegel sechster Ordnung, vierter Classe, dessen ebener Schnitt auf eine Curve 6. Ordnung mit vierfachem Punct abgebildet wird, d. h. vom Geschlechte Null ist; die Zahl seiner Rückkehrkanten ergiebt sich gleich 6; man sieht, wie diese Zahlen sich in Uebereinstimmung mit den von Clebsch[1]) durch directe Rechnung gefundenen Resultaten befinden; übrigens bedarf dieser Fall kaum einer besonderen Betrachtung.

---

1) Clebsch, Problem der Normalen, Crelle's Journal, Bd. 62, S. 101.

Wenn die Fläche f die Fläche zweiten Grades X in einem Puncte x^0 berührt, so treten folgende Modificationen für die Centrafläche erster Art ein. Die Differentialquotienten f_i werden für diesen Punct den x_i^0 proportional. Die Classe des Strahlensystemes erniedrigt sich nicht, die Ordnung dagegen um eine Einheit, entsprechend dem ausgezeichneten Puncte. Dazu gehört weiter eine Erniedrigung der Ordnung der Centrafläche um 2 Einheiten; ihre Classe bleibt ungeändert. Die aus 1) hervorgehende Form

$$P = \alpha_f^2 A - \alpha_f \alpha_x [\Sigma f_{ii} A - \Sigma f_i f_k f_{ik}] - \alpha_x^2 \frac{H X}{(n-1)^2} = 0$$

hat nämlich die Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial P}{\partial x_m} \equiv x_m^0,$$

wird, d. h. die Fläche P berührt f in dem Puncte x^0 und für diesen Doppelpunct sind zwei Lösungen des Systemes

$$f = 0, \; P = 0, \quad \alpha_x \beta_f - \alpha_f \beta_x = 0,$$

in Abzug zu bringen. Jener Punct selbst wird für die Centrafläche ein Doppelpunct, wie sich zeigt, wenn man

$$\alpha_x^0 = 0, \; \beta_x^0 = 0,$$

voraussetzt. Das Geschlecht des Tangentenkegels sowie seine Ordnung erfahren keine Aenderung; das Geschlecht des ebenen Schnittes der Centrafläche erniedrigt sich um eine Einheit, da wegen des eben bemerkten Verhaltens von P die Abbildung desselben in x^0 einen weiteren Doppelpunct erhält. Hierbei ist zunächst die Berührung von f mit X als eine gewöhnliche angenommen. Für die Centrafläche einer Fläche zweiten Grades ergeben sich nicht uninteressante Specialfälle, je nachdem dieselbe die absolute Fläche einfach, stationär, etc. . . . berührt.

Etwas anders stellen sich diese Verhältnisse bei der projectiven Centrafläche zweiter Art. Berührt f die Ebene $a_x = 0$ in einem Puncte x^0, so werden die Differentialquotienten f_i für denselben den a_i proportional. Untersucht man nun die Ordnung der Centrafläche vermöge der Gleichung § VII 4a), und der Gleichungen

$$\alpha_x + \lambda(\alpha_a \psi - C\alpha_f) = 0,$$
$$\beta_x + \lambda(\beta_a \psi - C\beta_f) = 0,$$

so zeigt sich, dass in dem Ausdrucke

$$Q = (\alpha_a \psi - C\alpha_f)^2 (AC - \psi^2)$$
$$- \alpha_x(\alpha_a \psi - C\alpha_f)[(\psi^2 - AC)\Sigma f_{ii} + A\Sigma a_i a_k f_{ik} - 2\psi\Sigma f_i a_k f_{ik} + C\Sigma f_i f_k f_{ik}]$$
$$- \alpha_x^2 C^2 \frac{a_x^2 H}{(n-1)^2} = 0,$$

die beiden ersten Terme noch mit ihren zweiten Differentialquotienten für $x = x^0$ verschwinden, also

$$\Sigma \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k \equiv a_y^2,$$

für $x = x^0$ wird, falls dieser Punct kein parabolischer Punct von f ist. Der Schnitt von Q mit f ist also eine Curve die in x^0 einen dreifachen Punct hat; die Ordnung der Centrafläche erniedrigt sich um drei Einheiten, während die Ordnung des Strahlensystems der Normalen sich um eine Einheit reducirt. Zugleich erkennt man, dass dieser Punct selbst ein dreifacher Punct der Centrafläche wird. Das Geschlecht des ebenen Schnittes erniedrigt sich um drei Einheiten, der Rang der Fläche bleibt ungeändert, die Ordnung der Rückkehrcurve vermindert sich um 12. Die Centrafläche eines Paraboloides ist daher von der 9. Ordnung, 4. Classe, 12. Ranges; ihre Rückkehrcurve besteht aus 6 Kegelschnitten, welche den beiden Hauptschnitten und den vier Erzeugenden entsprechen, die den absoluten Kegelschnitt treffen; die Doppelcurve wird von der 12. Ordnung, — in Uebereinstimmung mit der ausführlichen Untersuchung, welche Herr Caspary[1]) über die Centrafläche des elliptischen Paraboloides angestellt hat.

Ein besonderes Interesse verdient noch die Betrachtung des Schnittes der Fläche mit der absoluten Ebene. Derselbe besteht aus der dreifach zählenden reciproken Curve von $a_x = 0$, $f = 0$, der Evolute der-

1) Vgl. Caspary, Ueber die Krümmungsmittelpunctsfläche des ellipt. Paraboloides, Journal von Borchardt Bd. 81 S. 143. In diesem Falle ist der dreifache Punct der Fläche ein uniplanarer, wie aus der daselbst S. 164 gegebenen Gleichung der Fläche hervorgeht; man darf wohl annehmen, dass dies im allgemeinen Falle sich ebenso verhält.

selben, und einer Curve $4n(n-1)(n-2)$. Ordnung. Nun hat aber $a_x = o$, $f = o$ in x^0 einen Doppelpunct; eine einfache Betrachtung zeigt, dass die Ordnung der Evolute für jeden Doppelpunct sich um 6 Einheiten erniedrigt; d. h. es sondern sich je dreifach zählend zwei durch den Doppelpunct gehende Gerade aus der Evolute ab, nämlich die harmonisch conjugirten zu den Tangenten im Doppelpuncte in Bezug auf die von diesen an den absoluten Kegelschnitt gehenden Tangenten.[1]) Demnach wird die Centrafläche die Ebene a_x längs jener beiden Geraden osculieren, welche keine Rückkehrcurven derselben sind. Aber auch die Ordnung der reciproken Polare von $a_x = o$, $f = o$ reducirt sich um zwei Einheiten. Da nun die Coordinaten eines Punctes derselben

$$z_i = a_i \psi - f_i C,$$

für den Punct x^0 ganz unbestimmt werden, so tritt an Stelle dieses „Fundamentalpunctes" eine gerade Linie, nämlich die Polare von x^0 in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt. Und auch diese Gerade muss dreifach zählen, da die Erniedrigung der Ordnung der Centrafläche nur 3 Einheiten beträgt, ohne Rückkehrcurve derselben zu sein. Die Ebene $a_x = o$ osculiert demnach die Centrafläche längs des genannten Dreiseites von Geraden, bestehend aus der Polare des Berührungspunctes und dem bezeichneten durch diesen gehenden Geradenpaare.[2])

---

1) So ist z. B. die Evolute der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2,\ a^2 - b^2 = e^2$$

dargestellt durch die Gleichung

$$[x^2 a^2 + y^2 b^2 - c^2 e^4]^3 - 27 x^2 y^2 a^2 b^2 c^2 e^4 = o;$$

sie reducirt sich für $c = o$ auf

$$(x^2 a^2 + y^2 b^2)^3 = o.$$

Uebrigens kann man sich auch vermöge der Gleichung § VI, 3) sehr leicht davon überzeugen, dass für jeden Doppelpunct die Ordnung der Evolute sich um 6 Einheiten reducirt; der Doppelpunct selbst gehört dem übrigen Theil der Evolute im allgemeinen nicht an.

2) Man vergleiche das a. a. O. von Herrn Caspary behandelte Beispiel S. 165.

Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken,

die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind,

und die Additionstheoreme der zugehörigen

Thetafunktionen.

Von

A. von Braunmühl.

Einleitung.

Die folgende Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Der erste behandelt die Theorie der Systeme von Charakteristiken, deren Zahlen sich nach dem Modul 3 unterscheiden (Drittelcharakteristiken), und kann somit als eine Weiterführung der Arbeiten der Herren Noether[1]) und Frobenius[2]) gelten, insoferne dieselben eine vollständige Behandlung der Charakteristikensysteme für den Modul 2 (Halbercharakteristiken) gegeben haben.

Die sämtlichen Charakteristiken werden durch eine Operationsgruppe von 3^{2p} Additionen entstanden gedacht, und diese Gruppe gibt, verbunden mit der Gruppe der unimodularen linearen Transformationen eine Gesamtgruppe von Operationen, welche die sämtlichen Charakteristiken ungeändert lassen. Diese Gesamtgruppe besitzt dann, nach einer mir von Herrn F. Klein gemachten Mitteilung zwei isomorphe Untergruppen, denen sich ähnlich wie bei den Halbercharakteristiken eine doppelte Einteilung der Charakteristiken in eigentliche und Gruppen-Charakteristiken an die Seite stellt (§ 1 und 2).

Die Gruppe von 3^{2p} Additionen besitzt eine Reihe von Untergruppen vom Grade 3^{λ} (§ 3), welche sofort Charakteristikensysteme liefern, deren wichtigste bezüglich aus 3 und 3^{p} Charakteristiken bestehen (§ 5). Letztere

---

1) M. Noether: Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten. Mathematische Annalen, Bd. 16.

2) G. Frobenius: Ueber das Additionstheorem der Thetafunktionen mehrerer Variabeln. Journal für Mathematik, Bd. 89, und: Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken. Dasselbe, Bd. 96. Für den Fall $p = 1$ hat Herr A. Krazer im 22. Band der Mathematischen Annalen die Relationen der diesen Charakteristiken zugehörigen Thetafunktionen eingehend behandelt.

zerfallen in zwei getrennte Klassen von Systemen: solche, welche den sogenannten Goepel'schen Systemen bei Halbercharakteristiken völlig analog sind, und solche, wie sie für den einfachsten Fall $p = 2$ bereits von Clebsch und Jordan bei Gelegenheit des Dreiteilungsproblemes der hyperelliptischen Funktionen verwendet wurden (§ 6). An die Gruppe der linearen Transformationen schliessen sich Systeme von $2p + 2$ Charakteristiken an, welche ich analog der Bezeichnung bei Halbercharakteristiken Fundamentalsysteme nenne. Jeder der 3^{2p} gleichberechtigten Untergruppen linearer Transformationen gehört ein gewisser Complex solcher Fundamentalsysteme zu, deren Bildung und Anzahl in § 7 gegeben werden.

Der zweite Abschnitt behandelt die Verwendung der gefundenen Systeme zur Bildung zweier Additionstheoreme jener Thetafunktionen, deren Argumente sich durch Periodendrittel unterscheiden. Sowol die Goepel'schen Systeme (§ 9) als auch die Fundamentalsysteme (§ 12) liefern je eine umfassende Additionsformel. Die erstere der beiden habe ich bereits im Juni vorigen Jahres mitgeteilt.[1]) Aus diesen beiden Additionsformeln leite ich dann in den §§ 10 und 11, resp. 13 und 14 eine Reihe von speziellen Formeln und Thetarelationen ab, ohne jedoch bei der Fülle der sich darbietenden Beziehungen eine umfassende Theorie dieser Formeln geben zu wollen.

I. Abschnitt.

§ 1.

Bezeichnung der Charakteristiken. Fundamentalsätze.

Der Zahlencomplex

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_p \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \ldots & \alpha_p' \end{pmatrix}$$

bestehend aus $2p$ Zahlen heisst eine p-reihige Charakteristik oder eine Charakteristik vom Geschlechte p.

1) Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 1886. Vergl. übrigens die Anmerkung § 9.

Legt man den α nur die Werte des vollständigen Restsystemes mod. 3 bei, so repräsentirt die obige Form 3^{2p} verschiedene Charakteristiken.

Man kann die Charakteristiken in drei Arten unterscheiden, solche deren Zahlen der Congruenz

$$\alpha_1 \alpha_1' + \alpha_2 \alpha_2' + \ldots + \alpha_p \alpha_p' \equiv 0 \text{ mod. } 3,$$

genügen, solche, für welche der Wert dieser Congruenz $+1$ und endlich solche, für die er -1 ist. Von der ersten Gattung gibt es

$$S_p = 3^{p-1}(3^p + 2),$$

von den beiden anderen Gattungen je

$$R_p = R_p' = 3^{p-1}(3^p - 1).$$

Beweis. Für $p = 1$ ist der Satz richtig, denn die Charakteristiken erster Art sind:

$$\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{-1}{0}, \binom{0}{-1},$$

die zweiter und dritter Art bezüglich:

$$\binom{1}{1}, \binom{-1}{-1} \; ; \; \binom{-1}{1}, \binom{1}{-1}.$$

Wir nehmen also die Richtigkeit des Satzes für $p - 1$ an und zeigen, dass er dann auch für p gilt.

Es ist

$$S_{p-1} = 3^{p-2}(3^{p-1} + 2),$$

$$R_{p-1} + R_{p-1}' = 2 \cdot 3^{p-2}(3^{p-1} - 1).$$

Alle Charakteristiken zweiter Art erhält man, indem man die R_{p-1} $(p-1)$ reihigen Charakteristiken mit

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}, \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

die R_{p-1}' $(p-1)$ reihigen Charakteristiken dritter Art mit

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

und endlich die S_{p-1} $(p-1)$ reihigen Charakteristiken erster Art mit

$$(c) \ldots\ldots\ldots \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

zu p-reihigen Charakteristiken ergänzt. Somit muss

$$5\,R_{p-1} + 2\,R'_{p-1} + 2\,S_{p-1} = R_p$$

sein; desgleichen hat die Gleichung

$$5\,R'_{p-1} + 2\,R_{p-1} + 2\,S_{p-1} = R'_p$$

stattzufinden.

Endlich ergeben sich alle S_p p-reihigen Charakteristiken, wenn man alle S_{p-1} $(p-1)$ reihigen mit den unter (a), alle R_{p-1} $(p-1)$ reihigen mit den unter (b) und alle R'_{p-1} $(p-1)$ reihigen Charakteristiken mit den unter (c) aufgeführten Formen zu p-reihigen ergänzt, somit muss sein:

$$5\,S_{p-1} + 2\,R_{p-1} + 2\,R'_{p-1} = S_p.$$

Die Rechnung bestätigt diese 3 Identitäten.

Zwei Charakteristiken (α) und (β) heissen mod. 3 congruent, wenn

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 \equiv \beta_1,\ \alpha_2 \equiv \beta_2, \ldots \alpha_p \equiv \beta_p \\ \alpha_1' \equiv \beta_1',\ \alpha_2' \equiv \beta_2', \ldots \alpha_p' \equiv \beta_p' \end{matrix}\right\} \text{mod. } 3$$

ist.

Die Summe der Charakteristiken (α) und (β) ist:

$$(\alpha) + (\beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2, \ldots \alpha_p + \beta_p \\ \alpha_1' + \beta_1',\ \alpha_2' + \beta_2', \ldots \alpha_p' + \beta_p' \end{pmatrix}$$

und sei kurz mit $(\alpha\,\beta)$ bezeichnet.

Daraus folgt:

$$2\,(\alpha) \equiv (2\,\alpha) \equiv (\alpha^2) \equiv \begin{pmatrix} -\alpha_1, & -\alpha_2, \ldots -\alpha_p \\ -\alpha_1', & -\alpha_2', \ldots -\alpha_p' \end{pmatrix} \equiv -(\alpha) \quad \text{mod. } 3.$$

Darnach ist

$$(\alpha) - (\beta) = (\alpha\,\beta^2).$$

Hieraus folgt, dass sich die $3^{2p} - 1$ Charakteristiken, die ausser der Charakteristik (ó), deren sämtliche Elemente Null sind, existiren, in zwei Hälften teilen, deren einzelne Charakteristiken derart paarweise zusammengehören, dass die Glieder eines Paares sich nur durch das Zeichen unterscheiden, z. B.

$$(\alpha) \text{ und } (\alpha^2).$$

Fasst man zwei solche Charakteristiken in ein Zeichen zusammen, indem man schreibt:

$$[\alpha] = [\alpha^2],$$

so hat man einen speciellen Fall von dem, was Herr Noether eine Gruppencharakteristik nennt. Zeichnet man hingegen eine andere beliebige der 3^{2p} gleichberechtigten Charakteristiken, etwa (α) aus, so gruppiren sich in Bezug auf sie, wie Herr Noether in einer Anmerkung zu meiner Eingangs zitirten Note angab, die übrigen Charakteristiken zu Paaren.

Genügen nämlich drei Charakteristiken der Relation

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) = (\alpha\,\beta\,\gamma) \equiv 0 \mod 3,$$

so haben (β) und (γ) zu (α) dieselbe Beziehung. Für diese Beziehung führt Herr Noether das Zeichen ein

$$[\alpha - \beta] = [\alpha\,\beta^2],$$

das dann eine Gruppencharakteristik heisst. Dann ist

$$[\alpha\,\beta^2] = [\alpha\,\gamma^2],$$

und aus der obigen Relation folgt $(\gamma) = (\alpha^2\,\beta^2)$, so dass

$$[\alpha\,\beta^2] = [\beta\,\alpha^2]$$

wird. Setzt man hier $(\beta) = (0)$, so geht diese Bezeichnung, wie es sein muss, in die unsrige über.

Aus diesen Erläuterungen folgt, dass es

$$\frac{3^{2p} - 1}{2}$$

Gruppencharakteristiken gibt.

Im Gegensatze zu den Gruppencharakteristiken seien die übrigen eigentliche oder schlechthin Charakteristiken genannt.

Es werden diesen Bezeichnungen der Charakteristiken noch einige Abkürzungen angefügt, die wir im Folgenden beständig gebrauchen.

Es bedeute

(1.) $|\alpha| = \alpha_1\,\alpha_1' + \alpha_2\,\alpha_2' + \ldots + \alpha_p\,\alpha_p'$,

(2.) $\alpha|\beta = \alpha_1\,\beta_1' - \alpha_1'\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2' - \alpha_2'\,\beta_2 + \ldots + \alpha_p\,\beta_p' - \alpha_p'\,\beta_p$,

und es werde auch in diesen Symbolen statt $\alpha + \beta = \alpha\beta$ und für $\alpha - \beta$ $\alpha\beta^2$ gesetzt, dann erhält man folgende Relationen:

$$\begin{array}{ll} (3.)\ |\alpha| \equiv |\alpha^2| \equiv |-\alpha|; & (4.)\ \alpha|\alpha^2 \equiv \alpha^2|\alpha \equiv 0; \\ (5.)\ \alpha|\beta \equiv -\beta|\alpha \equiv \beta^2|\alpha; & (6.)\ \alpha^2|\beta \equiv \alpha|\beta^2. \end{array} \quad (\text{mod. } 3.)$$

Ein System von eigentlichen Charakteristiken mag unabhängig heissen, wenn nicht die Summe irgend einer Anzahl derselben mit Null nach dem Modul 3 congruent ist, und wesentlich unabhängig, wenn nicht die Summe von irgend 3 r derselben congruent mit Null mod. 3 ist; dann ergeben sich drei für das Folgende äusserst wichtige Sätze:

(I.) Die Combinationen (Summen von irgend einer Anzahl von Charakteristiken) von λ unabhängigen Charakteristiken sind 3^λ verschiedene Charakteristiken.

(II.) Die wesentlichen Combinationen (Summen von irgend einer mit 1 mod. 3 congruenten Anzahl) von λ wesentlich unabhängigen Charakteristiken liefern $3^{\lambda-1}$ Charakteristiken.

(III.) Es gibt unter den 3^{2p} Charakteristiken höchstens $2p$ unabhängige und $2p+1$ wesentlich unabhängige.

Die Richtigkeit dieser Sätze erkennt man unmittelbar; denn jede Combination der λ Charakteristiken

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ (\mu_3),\ \ldots\ (\mu_\lambda)$$

nimmt die Form $(\mu_1^m, \mu_2^n \ldots \mu_\lambda^e)$ an, wo m, n .... e die Zahlen 0, 1, 2 bedeuten. Die 3^λ Variationen mit Wiederholung derselben geben also die 3^λ Charakteristiken des Satzes (I). Unter ihnen befinden sich aber $3^{\lambda-1}$, welche von allen Combinationen gebildet sind, deren Anzahl gleich 3 r ist, während die übrigen zu gleichen Teilen aus den Combinationen der Anzahl $3r+1$ und $3r-1$ entstehen, was Satz (II) aussagt. (III) ist eine unmittelbare Folge aus (I) und (II).

§ 2.

Operationsgruppen.

Die 3^{2p} Charakteristiken können durch eine Operationsgruppe von 3^{2p} Additionen entstanden gedacht werden, indem die Summe je zweier

p-reihiger Charakteristiken wieder eine solche gibt. Die Charakteristik (o) vertritt dann die Identität.

Durch Anwendung der Operationen dieser Gruppe bleibt dann das System der 3^{2p} Charakteristiken ungeändert. Es bleibt aber auch ungeändert durch die Gruppe der unimodularen linearen Transformationen, d. h. der mod. 3 zur Identität congruenten Transformationen, deren Anzahl nach C. Jordan

$$A = (3^{2p} - 1)\, 3^{2p-1} (3^{2p-2} - 1)\, 3^{2p-3} \ldots . (3^2 - 1)\, 3$$

beträgt, denn bezeichnen (α) und (β) irgend zwei Charakteristiken des Systems, so sind die linearen Transformationen der erwähnten Gruppe jene, welche den Ausdruck

$$\alpha \,|\, \beta = \alpha_1 \beta_1' - \alpha_1' \beta_1 + \ldots . + \alpha_p \beta_p' - \alpha_p' \beta_p = \varepsilon$$

ungeändert lassen. Da die Substitutionen der letzteren Gruppe mit denen der ersteren vertauschbar sind, so kann man beide zu einer Gruppe[1]) von Operationen vereinigen, die das System der 3^{2p} Charakteristiken ungeändert lässt und vom Grade

$$3^{2p} (3^{2p} - 1)\, 3^{2p-1} (3^{2p-2} - 1) \ldots (3^2 - 1) \,.\, 3$$

ist. Die Untergruppen, aus welchen sich diese Gesamtgruppe constituirt, bilden den Ausgangspunkt für das Folgende.

Die Operationen der Additionsgruppe, oder was dasselbe ist, die 3^{2p} eigentlichen Charakteristiken können nach Satz (III) entweder aus $2p$ unabhängigen oder aus $2p + 1$ wesentlich unabhängigen derselben zusammengesetzt werden. Im ersten Falle kommt man zu folgen-

---

1) Diese Gesamtgruppe von Operationen besitzt nach der mir von Herrn F. Klein zugegangenen Mitteilung zwei isomorphe Untergruppen: die eine derselben lässt eine Charakteristik (α) ungeändert und vertauscht die übrigen untereinander, was der Einteilung der Charakteristiken in eine ausgezeichnete und $\frac{3^{2p}-1}{2}$ Gruppencharakteristiken entspricht, die andere ist die im Texte erwähnte Gruppe der linearen Transformationen, welche einen Complex von Fundamentalsystemen, wie sie in § 7 aufgestellt und behandelt sind, ungeändert lässt. Ihr entspricht also die Noethersche Bezeichnungsweise der eigentlichen Charakteristiken. Von jeder der erwähnten Untergruppen gibt es 3^{2p} gleichberechtigte Individuen, entsprechend der Möglichkeit eine der 3^{2p} Charakteristiken oder einen der 3^{2p} Complexe von Fundamentalsystemen auszuzeichnen.

der Darstellung der 3^{2p} Charakteristiken, wie bereits in der erwähnten Note angegeben wurde.

Sind

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ \ldots\ (\mu_p);\quad (\varrho_1),\ (\varrho_2),\ \ldots\ (\varrho_p)$$

die 2 p unabhängigen Charakteristiken, so ist die ganze Gruppe dargestellt durch die sämtlichen Combinationen derselben und zwar in der Form:

$$\begin{array}{l}
(1),(\mu_1),\ (\mu_2)\ \ldots(\mu_p),\ (\mu_1^2)\ \ldots(\mu_p^2),\ (\mu_1\mu_2)\ \ldots\ldots(\mu_1^2\mu_2^2..\mu_p^2),\\
(\varrho_1),(\varrho_1\mu_1),(\varrho_1\mu_2)\ldots(\varrho_1\mu_p),(\varrho_1\mu_1^2)\ldots(\varrho_1\mu_p^2),(\varrho_1\mu_1\mu_2)\ldots\ldots(\varrho_1\mu_1^2\mu_2^2..\mu_p^2),\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
(\varrho_1^2\varrho_2^2..\varrho_p^2)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad(\varrho_1^2\varrho_2^2..\varrho_p^2\mu_p^2)\ \cdot\ \ldots\ldots(\varrho_1^2\varrho_2^2..\varrho_p^2\cdot\mu_1^2\mu_2^2\ldots\mu_p^2),
\end{array}$$

die wir durch Einführung von $3^p - 1$ Indices symmetrischer folgendermassen schreiben können:

$$\begin{array}{llll}
(1), & (\mu_1), & (\mu_2)\ \ldots(\mu_p), & (\mu_{p+1})\ \ldots\ldots(\mu_{3^p-1}),\\
(\varrho_1), & (\varrho_1\mu_1), & (\varrho_1\mu_2)\ldots(\varrho_1\mu_p), & (\varrho_1\mu_{p+1})\ \ldots\ldots(\varrho_1\mu_{3^p-1}),\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
(\varrho_{3^p-1}), & (\varrho_{3^p-1}\mu_1) & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \ldots\ldots(\varrho_{3^p-1}\mu_{3^p-1}).
\end{array}$$

Hier ist $(\mu_0) = (\varrho_0) = (o) = (1)$ gesetzt.

In jeder Horizontallinie dieses quadratischen Schemas sind 3^p Charakteristiken enthalten. Die Charakteristiken der ersten Zeile bilden, wie ihre Construktion zeigt, eine Untergruppe 3^pten Grades, die übrigen Horizontalreihen dagegen enthalten Systeme von 3^p Charakteristiken, die aus jener Untergruppe hervorgehen, indem man zu ihren Operationen je eine der 3^p Combinationen der unabhängigen Charakteristiken $(\varrho_1),\ (\varrho_2)\ \ldots\ (\varrho_p)$ hinzufügt.

Bei dieser Darstellung, die zur Bildung des Additionstheorems der zugehörigen Thetafunktionen vorteilhaft ist, ist die eine Charakteristik (o) ausgezeichnet. Eine andere Darstellung ohne Auszeichnung von (o) erhält man, indem man nur die wesentlichen Combinationen von $2p + 1$ wesentlich unabhängigen Charakteristiken bildet; dann erscheint jede

Horizontalreihe, unabhängig definirt, als die Gesamtheit der wesentlichen Combinationen von $p+1$ wesentlich unabhängigen eigentlichen Charakteristiken. So ist z. B. für $p = 2$ die erste Horizontalreihe des neuen Schemas:

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (\alpha_1^2\,\alpha_2^2),\ (\alpha_1^2\,\alpha_3^2),\ (\alpha_2^2\,\alpha_3^2),\ (\alpha_1^2\,\alpha_2\,\alpha_3),\ (\alpha_1\,\alpha_2^2\,\alpha_3),\ (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3^2),$$

und man erhält alle Systeme desselben, indem man in unserem ersten Schema mit Hinzunahme einer weiteren Charakteristik (μ) jede Grösse $(\varkappa)$ durch diejenige Grösse $(\varkappa)$, $(\varkappa\,\mu)$ oder $(\varkappa\,\mu^2)$ ersetzt, welche eine wesentliche Combination ist.[1])

§ 3.

Untergruppen der Additionsgruppe.

Die Untergruppen der Additionsgruppe vom Grade 3^{2p} sind sämtlich vom Grade 3^λ, wo $\lambda = 1, 2, \ldots 2p-1$ ist, und die Anzahl der gleichberechtigten Untergruppen vom Grade 3^λ ist durch die Formel gegeben:

$$B = \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-1}-1)\ \ldots\ (3^{2p-\lambda+1}-1)}{(3^\lambda-1)\ (3^{\lambda-1}-1)\ \ldots\ (3-1)}.$$

Denn eine Untergruppe vom Grade 3^λ ist nach Satz (I) aus λ unabhängigen Charakteristiken gebildet; sind (μ_1), (μ_2), ... (μ_λ) diese Charakteristiken, so kann man (μ_1) auf $3^{2p}-1$ Arten wählen, da die Null auszuschliessen ist, dann bleiben zur Wahl von (μ_2) noch $3^{2p}-3$ Charakteristiken übrig, da (μ_1) und (μ_1^2) als von einander abhängig auszuschliessen sind. Zur Wahl von (μ_3) sind dann noch $3^{2p}-3^2$ übrig, da die 3^2 aus (μ_1) und (μ_2) gebildeten Combinationen als abhängige Charakteristiken ausgeschlossen werden müssen. Endlich bleiben nach der Wahl von $(\mu_{\lambda-1})$ noch $3^{2p}-3^{\lambda-1}$ unabhängige Charakteristiken übrig, die für (μ_λ) gewählt werden können. Die unabhängigen Charakteristiken (μ_1), (μ_2), $\ldots$ (μ_λ) lassen sich also auf

$$(3^{2p}-1)\ (3^{2p}-3)\ (3^{2p}-3^2)\ \ldots\ (3^{2p}-3^{\lambda-1})$$

1) Diese Bezeichnung rührt von Herrn Noether her; vergl. die Anmerkung desselben zu meiner o. c. Note.

Arten wählen; doch sind die hiedurch erhaltenen Gruppen nicht alle verschieden, denn unter den in einer Gruppe von 3^λ enthaltenen Charakteristiken kann (μ_1) selbst auf $3^\lambda - 1$, (μ_2) auf $3^\lambda - 3$ u. s. f. (μ_λ) auf $3^\lambda - 3^{\lambda-1}$ Arten gewählt werden ohne eine andere Gruppe zu liefern, somit ist die Zahl der verschiedenen Untergruppen nur

$$\frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p}-3)\ \ldots\ (3^{2p}-3^{\lambda-1})}{(3^\lambda-1)\ \ (3^\lambda-3)\ \ \ldots\ (3^\lambda-3^{\lambda-1})} = B.$$

Zu jeder Untergruppe vom Grade 3^λ gehören $3^{2p-\lambda}$ Systeme von je 3^λ Charakteristiken, da die Anzahl der Operationen der Gesamtgruppe 3^{2p}, die der Untergruppe 3^λ ist. Somit ist die Gesamtzahl aller Charakteristikensysteme von 3^λ Gliedern, die Gruppe mit eingerechnet:

$$C = 3^{2p-\lambda} \cdot \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-1}-1)\ \ldots\ (3^{2p-\lambda+1}-1)}{(3^\lambda-1)\ \ (3^{\lambda-1}-1)\ \ \ldots\ (3-1)}.$$

Dieselbe Formel hätten wir von der zweiten Bildungsweise der Charakteristiken ausgehend erhalten können. Zwischen den Charakteristiken einer Untergruppe vom Grade 3^λ existiren noch einige Sätze, die gleich hier angeführt werden mögen, da sie für das Folgende von Wichtigkeit sind.

§ 4.

Sätze über Beziehungen zwischen Charakteristiken.

(IV.) Genügen λ unabhängige Charakteristiken der Bedingung

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv 0 \pmod 3, \quad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots \lambda,$$

so erfüllen je 2 eigentliche Charakteristiken der aus jenen gebildeten Gruppe vom Grade 3^λ dieselbe Bedingung.

Denn irgend zwei Charakteristiken der Gruppe haben die Form:

$$(\mu_1^{\nu_1}\, \mu_2^{\nu_2} \cdots \mu_\lambda^{\nu_\lambda}) \quad \text{und} \quad (\mu_1^{\sigma_1}\, \mu_2^{\sigma_2} \cdots \mu_\lambda^{\sigma_\lambda}),$$

wo die ν und σ die Zahlen 0, 1, 2 bedeuten; es ist aber:

$$\mu_1^{\nu_1}\mu_2^{\nu_2}\ldots\mu_\lambda^{\nu_\lambda} \,|\, \mu_1^{\sigma_1}\mu_2^{\sigma_2}\ldots\mu_\lambda^{\sigma_\lambda} \equiv \mu_1^{\nu_1} \,|\, \mu_1^{\sigma_1} + \mu_1^{\nu_1} \,|\, \mu_2^{\sigma_2} + \ldots + \mu_\lambda^{\nu_\lambda} \,|\, \mu_\lambda^{\sigma_\lambda} \equiv 0 \pmod 3$$

(V.) Es gibt höchstens $\lambda = p$ unabhängige Charakteristiken, die der Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv 0 \pmod 3.$$

genügen.

Denn die λ linearen Congruenzen

$$\mu_1 \,|\, \mu \equiv 0,\ \mu_2 \,|\, \mu \equiv 0,\ \ldots\ \mu_\lambda \,|\, \mu \equiv 0 \pmod 3.$$

zwischen 2 p Unbekannten haben $3^{2p-\lambda}$ Lösungen. Nach Satz (IV) sind die 3^λ Combinationen von $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$ solche Lösungen, also existiren ausser den Charakteristiken der Gruppe vom Grade 3^λ noch $3^{2p-\lambda} - 3^\lambda = 3^\lambda (3^{2p-2\lambda} - 1)$ von $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$ unabhängige Lösungen, somit muss $\lambda \leqq p$ sein, damit diese Zahl positiv ist, und für $\lambda = p$ sind die Charakteristiken der Gruppe vom Grade 3^p die einzigen Lösungen der Congruenz.

(VI.) Ist (μ_α) irgend eine der 3^{2p} eigentlichen Charakteristiken, sind $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$ irgend λ unabhängige derselben, und bestehen die λ Congruenzen

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_1 \equiv \mu_\alpha \,|\, \mu_2 \equiv \ldots \equiv \mu_\alpha \,|\, \mu_\sigma \equiv 0,\ \lambda > \sigma \geqq 0,$$
$$\mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+1} \equiv \pm 1,\ \mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+2} \equiv \pm 1, \ldots \mu_\alpha \,|\, \mu_\lambda \equiv \pm 1,$$

so gibt es in der aus den λ unabhängigen Charakteristiken gebildeten Gruppe vom Grade 3^λ stets $3^{\lambda-1}$ Charakteristiken (μ_β), die mit (μ_α) zu der Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv \varepsilon \pmod 3$$

verbunden, ε den Wert Null und $2 \cdot 3^{\lambda-1}$, die ε den Wert ± 1 erteilen.

Denn $\mu_\alpha | \mu_\beta$ wird nur dann mit ± 1 congruent sein können, wenn (μ_β) von der Form ist:

$$(\mu_\beta) = (\varrho\, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1} \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \cdots \mu_\lambda^{\nu_\lambda}),$$

wo ϱ irgend eine Combinationsform der unabhängigen Charakteristiken $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\sigma)$ ist, da ja

$$\mu_\alpha \,|\, \varrho\, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1} \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda} \equiv \mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1} + \mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} + \ldots + \mu_\alpha \,|\, \mu_\lambda^{\nu_\lambda}$$

wird, und die Summanden rechts nach Voraussetzung allein congruent ± 1 sind. Die Combinationsform (ϱ) selbst stellt aber 3^σ verschiedene Charakteristiken vor, da sie aus den σ unabhängigen Charakteristiken $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\sigma)$ gebildet ist, somit kann die eine Combinationsform $(\mu_{\sigma+1}^{\nu_1} \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda})$ mit 3^σ Combinationsformen (ϱ) verbunden werden. Ferner kann die Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_{\sigma+1}^{\nu_1} \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda} \equiv \pm 1 \pmod 3$$

selbstverständlich nur dann eintreten, wenn

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda \equiv \pm 1 \pmod 3$$

ist; diese lineare Congruenz hat aber, da es $\lambda - \sigma$ Werte ν sind, $2 \cdot 3^{\lambda-\sigma-1}$ Lösungen, so dass die Combination $(\mu_{\sigma+1}^{\nu_1} \mu_{\sigma+2}^{\nu_2} \ldots \mu_\lambda^{\nu_\lambda})$ $2 \cdot 3^{\lambda-\sigma-1}$ Formen annehmen kann, mithin gibt es im Ganzen $2 \cdot 3^\sigma \cdot 3^{\lambda-\sigma-1} = 2 \cdot 3^{\lambda-1}$ Combinationsformen (μ_β), welche die Congruenz

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv \pm 1 \pmod 3$$

befriedigen. Da nun aber stets zwei dieser Charakteristiken einander entgegengesetzt gleich sind, so befriedigt die eine Hälfte die Congruenz $\varepsilon \equiv +1$ die andere Hälfte die Congruenz $\varepsilon \equiv -1$, während die übrigen $3^{\lambda-1}$ Charakteristiken die Congruenz $\varepsilon \equiv 0$ befriedigen müssen.

Wir haben nun in den folgenden Paragraphen die für uns wichtigsten Untergruppen vom Grade 3 und 3^p genauer zu untersuchen und die zugehörigen Systeme zu entwickeln.

§ 5.

Die Untergruppen dritten Grades.

Eine Untergruppe dritten Grades hat in unserer Bezeichnung die Gestalt:

$$(1), (\mu), (\mu^2).$$

Ihr gehören $3^{2p-1} - 1$ weitere Dreiersysteme von der Form

$$(\varrho), (\varrho\,\mu), (\varrho\,\mu^2)$$

zu, welche durch Hinzufügung von $2p-1$ verschiedenen Charakteristiken (ϱ) und ihren Combinationen (die selbst wieder eine Gruppe vom Grade 3^{2p-1} ausmachen) gebildet werden, und es gibt nach Formel C § 3

$$3^{2p-1} \cdot \frac{3^{2p}-1}{2}$$

solcher Dreiersysteme (die Gruppe mit eingerechnet), die man zu $\frac{3^{2p}-1}{2}$ Complexen zusammengehöriger Systeme vereinigt denken kann, so dass jeder Complex eine Gruppe und $3^{2p-1}-1$ Systeme umfasst. Jedem dieser Complexe kann dann als Zeichen eine der $\frac{3^{2p}-1}{2}$ (speziellen) Gruppencharakteristiken zugeordnet werden; so z. B. dem Complexe mit der Gruppe

$$(1),\ (\mu),\ (\mu^2)$$

die Charakteristik

$$[\mu],$$

dann ist der betreffende Complex durch die Angabe dieses Zeichens vollkommen bestimmt.

Die in jedem Complexe auftretenden Systeme können in Paare geteilt werden, so dass die Charakteristiken der Systeme eines Paares einander entgegengesetzt sind, z. B.

$$(\lambda),\ (\lambda\,\mu),\ (\lambda\,\mu^2) \text{ und } (\lambda^2),\ (\lambda^2\,\mu^2),\ (\lambda^2\,\mu),$$

wofür man kürzer das Tripel von Gruppencharakteristiken

$$[\lambda],\ [\lambda\,\mu],\ [\lambda\,\mu^2]$$

schreiben kann.

Solcher Tripel, die einer bestimmten Gruppencharakteristik $[\mu]$ zugeordnet sind, gibt es dann

$$\frac{3^{2p-1}-1}{2}.$$

Wir wollen jetzt die Beschaffenheit der in einem Complexe enthaltenen Dreiersysteme näher ins Auge fassen; es wird sich dann zeigen, dass die in einem Complexe enthaltenen Systeme stets zwei wesentlich verschiedene Klassen bilden; die Charakteristiken der Systeme der einen Klasse genügen zu zweien der Be-

dingung $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv o \pmod 3$, und diese Klasse enthält 3^{2p-2} Systeme. Die Charakteristiken der Systeme der 2. Klasse genügen zu zweien der Bedingung $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv \pm 1 \pmod 3$, und solcher Systeme gibt es $2 \cdot 3^{2p-2}$.

Wie oben erwähnt entstehen die Systeme eines Complexes $[\mu]$, indem man aus den 3^{2p} eigentlichen Charakteristiken $2p-1$ von einander und von (μ) unabhängige auswählt, die durch sie bedingte Gruppe vom Grade 3^{2p-1} bildet und jede Charakteristik (ϱ) derselben mit (μ) zu dem Systeme:

$$(\varrho),\ (\varrho\,\mu),\ (\varrho\,\mu^2)$$

oder

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ (\mu_3)$$

vereinigt. Die zwischen je 2 der Charakteristiken bestehenden Bedingungen

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv \varepsilon \pmod 3,\ \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, 3$$

hängen somit nur von der Congruenz:

$$\varrho | \mu \equiv \varepsilon_1 \pmod 3$$

ab. Ist $\varepsilon_1 \equiv o$, so genügen die Charakteristiken des Dreiersystems der Bedingung $\varepsilon \equiv o$, im Gegenfalle der Bedingung $\varepsilon \equiv \pm 1$. Sind nun die $2p-1$ unabhängigen Charakteristiken, aus denen die Gruppe vom Grade 3^{2p-1} gebildet ist,

$$(\varrho_1),\ (\varrho_2)\ \ldots\ (\varrho_{2p-1}),$$

so müssen diese mit (μ) entweder die Congruenz

(1) . . . . . $\mu | \varrho_1 \equiv \mu | \varrho_2 \equiv \ldots \equiv \mu | \varrho_{2p-1} \equiv o$

oder die Congruenzen:

$$(2)\ \ldots\ \left\{\begin{matrix}\mu | \varrho_1 \equiv \mu | \varrho_2 \equiv \ldots \equiv \mu | \varrho_\sigma \equiv o \\ \mu | \varrho_{\sigma+1} \equiv \pm 1,\ \mu | \varrho_{\sigma+2} \equiv \pm 1, \ldots \mu | \varrho_{2p-1} \equiv \pm 1\end{matrix}\right\} \sigma < 2p-1$$

erfüllen.

Die erste Congruenz ist nach Satz (V) sofort auszuschliessen, da es nur p unabhängige Charakteristiken gibt, die sie befriedigen. Wenn aber die $2p-1$ unabhängigen Charakteristiken (ϱ) den Bedingungen (2) genügen, so folgt aus Satz (VI), dass es in der aus ihnen gebildeten Gruppe

stets 3^{2p-2} Charakteristiken gibt, die mit (μ) der Bedingung $\varepsilon_1 \equiv 0$ genügen und $2 \cdot 3^{2p-2}$, die der Bedingung $\varepsilon_1 \equiv \pm 1$ entsprechen. Somit gibt es 3^{2p-2} Systeme, deren Charakteristiken zu zweien der Bedingung $\varepsilon \equiv 0$ und $2 \cdot 3^{2p-2}$ Systeme, deren Charakteristiken zu Paaren der Congruenz $\varepsilon \equiv \pm 1$ genügen.

Unter den Systemen der ersten Klasse befindet sich die Gruppe

$$(1),\ (\mu),\ (\mu^2) = [\mu],$$

während die $3^{2p-2} - 1$ übrigen Systeme $\frac{3^{2p-2}-1}{2}$ Tripel von Gruppencharakteristiken bilden, indem man sie paarweise zu einem solchen Tripel vereinigt.

Die Anzahl der Tripel, die auf dieselbe Weise aus den Systemen der 2. Klasse entspringen, ist:

$$3^{2p-2}.$$

Es sei noch bemerkt, dass dieses allgemeine Resultat im Falle $p = 2$ bereits von anderer Seite her bekannt ist, indem die hier auftretende Teilung der Tripel von Gruppencharakteristiken in 4 und 9 genau der Gruppirung der Lösungen des Dreiteilungsproblems der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlechte $p = 2$ entspricht, wie sie A. Clebsch in den Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Band 14, angibt.

§ 6.

Untergruppen vom Grade 3^p. Die Goepel'sche Gruppe.

Die Bildung einer Untergruppe vom Grade 3^p haben wir bereits in der ersten Zeile des Schemas auf pag. 334 kennen gelernt. Die Anzahl der gleichberechtigten Untergruppen 3^pten Grades ist nach Formel B. pag. 335

$$B' = \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-1}-1) \ldots (3^{p+1}-1)}{(3^p-1)\ (3^{p-1}-1) \ldots (3-1)}.$$

Zu jeder derselben gehören weitere $3^p - 1$ Systeme von 3^p Charakteristiken, die mit der Gruppe einen Complex bilden. (Einen solchen Complex stellt das erwähnte Schema vor.) Es gibt somit B' solcher Complexe.

Die Gruppen, von denen jede aus den Combinationen von p unabhängigen Charakteristiken $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_p)$ entsteht, scheiden sich in zwei wesentlich verschiedene Klassen, je nachdem

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 0 \pmod 3, \left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots p,$$

ist oder nicht.

Im ersten Falle genügen nach den Sätzen (IV.) und (V.) alle Charakteristiken der Gruppe der Bedingung:

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 0 \pmod 3.$$

Die zu dieser Klasse gehörigen Gruppen entsprechen vollständig jenen, die Herr Frobenius bei seinen Untersuchungen über Charakteristiken, deren Zahlen nach dem Modul 2 genommen sind, als Goepel'sche Gruppen bezeichnet, wir wollen daher auch für unsere Gruppen erster Klasse diese Benennung beibehalten.

Die Anzahl der Goepel'schen Gruppen findet man durch eine ähnliche Betrachtung, wie wir sie pag. 12 zur Aufstellung der Untergruppen vom Grade 3^λ angestellt haben, indem man nur beachtet, dass die zu wählenden Charakteristiken der einen linearen Congruenz $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 0$ genügen müssen. Man erhält so:

$$D = \frac{(3^{2p}-1)\ (3^{2p-2}-1)\ (3^{2p-4}-1) \ldots (3^2-1)}{(3^p-1)\ (3^{p-1}-1)\ (3^{p-2}-1) \ldots (3-1)}$$

oder

$$D = (3^p+1)\ (3^{p-1}+1) \ldots (3^2+1)\ (3+1).$$

Zu jeder Gruppe gehören dann noch 3^p-1 weitere Goepel'sche Systeme, die mit ihr einen Complex von 3^p Systemen bilden, also gibt es überhaupt, die Gruppe mitgerechnet,

$$E = 3^p (3^p+1)(3^{p-1}+1) \ldots (3^2+1)(3+1)$$

Goepel'sche Systeme.

Die Anzahl der Gruppen 2. Klasse ist dann

$$B' - D,$$

die der Systeme 2. Klasse

$$3^p (B' - D).$$

Im Falle $p = 2$ sind die fraglichen Systeme beider Klassen Neunersysteme, es gibt deren 1170, darunter befinden sich überhaupt 130 Gruppen und von diesen sind 40 Goepel'sche Gruppen und 90 Gruppen 2. Klasse, die je aus 2 unabhängigen Charakteristiken (μ_1), (μ) gebildet sind, welche der Bedingung $\mu_1 | \mu_2 \equiv \pm 1$ genügen. Diese $2 \cdot 45$ Neunersysteme sind identisch mit jenen, die Herr Jordan [1]) bei Behandlung des Dreiteilungsproblems aufstellt, indem er eine gewisse Untergruppe der Gruppe linearer Transformationen bildet, deren Operationen mit denen einer solchen Neunergruppe vertauschbar sind.

§ 7.

Fundamentalsysteme.

Die Untergruppe der linearen Transformationen, welche in unserer Gesamtgruppe enthalten ist, gibt zur Betrachtung einer Reihe anderer sehr wichtiger Systeme Anlass, die Fundamentalsysteme [2]) heissen mögen.

Genügen nämlich die Charakteristiken eines Systemes alle zu zweien der Congruenz

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1 \pmod 3, \quad \alpha < \beta, \quad \ldots\ldots \qquad (1.)$$

so geht jedes dieser Systeme durch eine lineare Transformation in ein anderes und zwar nur einmal über, so dass man ebensoviele Systeme als lineare Transformationen erhält, nämlich nach pag. 333.

$$A = (3^{2p} - 1)\, 3^{2p-1} (3^{2p-2} - 1) \ldots (3^2 - 1)\, 3\, [3]).$$

Um diese Systeme genauer zu untersuchen, schicken wir einige Sätze voraus.

(VII.) Genügen die Charakteristiken eines Systems alle

---

1) C. Jordan: Traité des substitutions pag. 367.

2) Vergleiche bezüglich dieser Bezeichnungsweise die schon citirte erste Abhandlung von Frobenius pag. 208; die im Texte folgenden Sätze entsprechen völlig den daselbst für den Modul 2 entwickelten.

3) Vergleiche die weiter unten durch andere Ableitung erzielte Bestätigung der Richtigkeit dieser Formel.

zu zweien der Congruenz $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1 \pmod 3$, $\alpha < \beta$, so sind sie, wenn ihre Anzahl gerade ist, voneinander unabhängig; ist aber ihre Anzahl ungerade, so sind sie entweder unabhängig oder die Combination einer mit 1 congruenten Anzahl derselben ist Null, und dann ist die um eins verminderte Anzahl von Charakteristiken unabhängig.

Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich wie folgt: Ist die Anzahl der Charakteristiken des Systems 2 r und bildet man aus irgend 3 s derselben eine Combination

$$(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s}),$$

wo natürlich auch mehrere (μ) einander gleich sein dürfen, so ist:

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s} | \mu_1 \equiv \mu_1 | \mu_1 + \mu_2 | \mu_1 + \dots + \mu_{3s} | \mu_1 \equiv (3s - 1) \pmod 3,$$

wie auch s gewählt ist, somit kann $(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s})$ nicht mit Null congruent sein, sonst wäre nach der Bedeutung des Symbols $\mu_\alpha | \mu_\beta$ die obige Congruenz Null. Auf dieselbe Weise folgt, dass

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s-1} | \mu_1 \equiv (3s - 2) \pmod 3$$

und

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{3s+1} | \mu_1 \mu_2 \equiv (3s - 1) \pmod 3$$

ist, somit kann auch keine Combination zu $3s - 1$ oder $3s + 1$ der $2r$ Charakteristiken, also auch nicht ihre Summe mit Null congruent sein, somit sind sie unabhängig.

Ist aber die Anzahl der Charakteristiken ungerade: $2r + 1$, und bildet man aus allen $2r + 1$ Charakteristiken die Combination

$$(\mu_1 \mu_2^2 \mu_3 \mu_4^2 \dots \mu_{2r}^2 \mu_{2r+1}),$$

so kann dieselbe mit Null congruent sein, ohne dass die Charakteristiken aufhören der Bedingungsgleichung

$$\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1 \pmod 3$$

zu genügen; denn aus der Annahme

$$(\mu_1 \mu_2^2 \mu_3 \mu_4^2 \dots \mu_{2r}^2 \mu_{2r+1}) \equiv 0$$

folgt

$$(\mu_{2r+1}) \equiv (\mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \dots \mu_{2r})$$

und hieraus

$$\mu_\varepsilon | \mu_{2r+1} \equiv 1.$$

Um dies einzusehen, unterscheide man zwei Fälle: $\varepsilon = 2\lambda$, $\varepsilon = 2\lambda + 1$.

Im ersten Falle ist:

$$\begin{aligned}\mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2r+1} &\equiv \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_1^2 + \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_2 + \ldots + \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2\lambda} + \ldots + \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2r} \\ &\equiv \mu_1 \,|\, \mu_{2\lambda} - \mu_2 \,|\, \mu_{2\lambda} + \ldots + \mu_{2\lambda-1} \,|\, \mu_{2\lambda} + \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2\lambda} - \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2\lambda+1} \\ &\qquad + \ldots + \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2r} \\ &\equiv 1, \text{ (mod. 3)},\end{aligned}$$

da vor Null ($\mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2\lambda} \equiv 0$) eine ungerade, nach Null eine gerade Anzahl wechselnder Zeichen liegt.

Im zweiten Falle ist:

$$\begin{aligned}\mu_{2\lambda+1} \,|\, \mu_{2r+1} &\equiv \mu_1 \,|\, \mu_{2\lambda+1} - \mu_2 \,|\, \mu_{2\lambda+1} + \ldots - \mu_{2\lambda} \,|\, \mu_{2\lambda+1} + \mu_{2\lambda+1} \,|\, \mu_{2\lambda+1} \\ &\qquad + \mu_{2\lambda+1} \,|\, \mu_{2\lambda+2} - \ldots + \mu_{2\lambda+1} \,|\, \mu_{2r} \\ &\equiv 1,\end{aligned}$$

da vor $\mu_{2\lambda+1} \,|\, \mu_{2\lambda+1} \equiv 0$ eine gerade, nach Null eine ungerade Anzahl von wechselnden Zeichen liegt.

Eine ungerade Anzahl von Charakteristiken braucht also nicht unabhängig zu sein, dagegen ist dann die um eine Charakteristik verminderte Anzahl, als eine gerade, wieder unabhängig.

Hat man also ein System von λ Charakteristiken (μ_1), $(\mu_2) \ldots (\mu_\lambda)$, die der Congruenz $\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv 1$, $\alpha < \beta$, genügen, (λ ungerade), so sind jedenfalls $\lambda - 1$ von ihnen unabhängig, und da es höchstens 2 p unabhängige gibt, so ist $\lambda - 1 \leqq 2\,\mathrm{p}$, also höchstens $\lambda = 2\,\mathrm{p} + 1$.

Fügt man einem solchen Systeme von $2\,\mathrm{p} + 1$ wesentlich unabhängigen Charakteristiken noch $(1) = (0)$ hinzu, so hat man ein spezielles Fundamentalsystem von $2\,\mathrm{p} + 2$ Charakteristiken.

Die nächste Frage ist nach der Bildung eines speziellen Fundamentalsystemes und der Ableitung allgemeinerer Systeme aus demselben.

Zur Beantwortung der ersten Frage beachte man, dass ausser Null die Charakteristik (μ_1) auf $3^{2\mathrm{p}} - 1$ Arten aus den überhaupt vorhandenen $3^{2\mathrm{p}}$ Charakteristiken gewählt werden kann; (μ_2) muss dann mit (μ_1) der Bedingung $\mu_1 \,|\, \mu_2 \equiv 1$ genügen und kann somit auf $3^{2\mathrm{p}-1}$ Arten gewählt werden, dann sind (μ_1) und (μ_2) nach Satz (VII.) unabhängig. Hierauf

ist (μ_3) so zu bestimmen, dass es den Congruenzen $\mu_1 | \mu_3 \equiv 1$, $\mu_2 | \mu_3 \equiv 1$ genügt. Diese Congruenzen haben 3^{2p-2} Lösungen, von denen aber die Lösung $(\mu_1^2 \mu_2)$ nach Satz (VII.) auszuschliessen ist (für $p > 1$), so dass demnach (μ_3) auf $3^{2p-2}-1$ Arten von (μ_1) und (μ_2) unabhängig gewählt werden kann; (μ_4) kann dann wieder auf 3^{2p-3} Arten unabhängig von den vorausgehenden Charakteristiken bestimmt werden, während bei der Wahl von (μ_5) wieder die Lösung $(\mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \mu_4)$ auszuschliessen ist (für $p > 2$). Somit ergibt sich ausser dem geschilderten Bildungsgesetz eines speziellen Fundamentalsystemes die Anzahl derselben in der Gestalt:

$$A = (3^{2p}-1)\, 3^{2p-1} (3^{2p-2}-1) \ldots (3^2-1) \cdot 3,$$

wie sie bereits § 2 angegeben wurde. Diese speziellen Fundamentalsysteme gehören alle der einen Charakteristik Null zu und bilden somit einen Complex von Systemen, der bei einer Untergruppe linearer Transformationen ungeändert bleibt.

Aus einem speziellen Fundamentalsystem erhält man dann sofort ein allgemeines, indem man eine der übrigen $3^{2p}-1$ Charakteristiken zu den einzelnen Charakteristiken des Systemes addirt. Dadurch geht der Complex spezieller Fundamentalsysteme in je einen neuen Complex allgemeinerer über, und man hat somit 3^{2p} Complexe, welche einzeln den 3^{2p} gleichberechtigten Untergruppen linearer Transformationen zugehören.

Wollte man die allgemeinen Fundamentalsysteme unabhängig von ihrer Bildung aus den die Charakteristik Null enthaltenden speziellen definiren, so müsste dies (analog den von Herrn Frobenius in der citirten Abhandlung für den Modul 2 aufgestellten Systemen) durch die Congruenz

$$(2) \qquad \ldots\ldots \quad \mu_\alpha | \mu_\beta + \mu_\beta | \mu_\gamma + \mu_\gamma | \mu_\alpha \equiv 1, \quad \alpha < \beta < \gamma, \pmod 3$$

geschehen, die für $\mu_\gamma = 0$ in die spezielle $\mu_\alpha | \mu_\beta \equiv 1$ übergeht. Dass die Charakteristiken unserer Fundamentalsysteme dieser Gleichung genügen, ergibt sich leicht. Denn ist ein spezielles Fundamentalsystem gegeben durch

$$(1), (\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_{2p+1}),$$

und (μ) irgend eine Charakteristik, so ist ein dem (μ) zugehöriges allgemeines Fundamentalsystem:

$$(\mu), (\mu\,\mu_1), (\mu\,\mu_2) \ldots (\mu\,\mu_{2p+1}).$$

Für irgend 3 dieser Charakteristiken erhält man dann gemäss Gleichung (1.)

$$\mu\,\mu_\alpha\,|\,\mu\,\mu_\beta + \mu\,\mu_\beta\,|\,\mu\,\mu_\gamma + \mu\,\mu_\gamma\,|\,\mu\,\mu_\alpha \equiv 1,$$

wie man sich durch Auflösung dieser Symbole in bekannter Weise leicht überzeugt.

Die Gesamtzahl aller überhaupt zu bildenden Fundamentalsysteme beträgt nach dem Vorhergehenden

$$A' = 3^{2p}(3^{2p}-1)\,3^{2p-1}(3^{2p-2}-1)\ldots(3^2-1)\,3;$$

darunter sind jedoch nur $\frac{A'}{2p+2}$ verschiedene, wenn man diejenigen Systeme als gleich auffasst, die sich nur durch die Stellung der einzelnen Charakteristiken von einander unterscheiden. Es sind nämlich dann immer jene $2p+2$ einander gleich, die durch cyklische Vertauschung der Charakteristiken (μ_1), (μ_2), $(\mu_3)\ldots(\mu_{2p+2})$ gewonnen werden, wie die Form der Gleichung (2) unmittelbar zeigt.

II. Abschnitt.

§ 8.

Bezeichnungen der Thetafunktionen.

Wir stellen hier vorerst die bekannten Bezeichnungen und Formeln über Thetafunktionen zusammen, die wir im Folgenden bedürfen.

Die Thetafunktion, die unsern Betrachtungen zugrunde liegt, ist definirt durch

$$\vartheta(o)(u) = \vartheta(o)(u_1, u_2, \ldots u_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{i\pi \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2i\pi \sum_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu u_\mu} \quad (1),$$

wo die Moduln $a_{\mu\mu'}$ der Bedingung:

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$$

genügen müssen, und der reelle Teil von $\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\, m_\mu\, m_{\mu'}$ eine wesentlich negative quadratische Form sein muss. Wir ordnen nun den 3^{2p} Charakteristiken (α), die Null mit eingeschlossen, die 3^{2p} möglichen Systeme von Periodendritteln zu, indem wir setzen:

$$\alpha = \frac{\alpha'_\mu}{3} + \frac{1}{3}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \alpha_{\mu'}\, a_{\mu\mu'},$$

so dass

(2)
$$\vartheta(\alpha)(u) = e^{\frac{i\pi}{9}\sum\sum a_{\mu\mu'}\alpha_\mu\alpha_{\mu'} + \frac{2}{3}i\pi\sum \alpha_\mu\left(u_\mu + \frac{\alpha_{\mu'}}{3}\right)}\,\vartheta(o)(u+\alpha),\ \left.\begin{matrix}\mu\\ \mu'\end{matrix}\right\} = 1,2..p$$

ist; die Summen im Exponenten erstrecken sich hier, wie im Folgenden, überall auf die Werte von 1 bis p.

Der Additionsgruppe der eigentlichen ϑ-Charakteristiken entspricht dann die Additionsgruppe der 3^{2p} Periodendrittel, welche die Thetafunktionen ineinander überführt.

Weiter ist

(3) $\vartheta(\alpha)(-u_1, -u_2, \ldots -u_p) = \vartheta(-\alpha)(u_1, u_2, \ldots u_p) = \vartheta(\alpha^2)(u_1, u_2, \ldots u_p)$,

also

(4) . . . . . $\vartheta(\alpha)(o) = \vartheta(\alpha^2)(o)$;

somit kann man die Thetafunktionen mit Auszeichnung einer, hier der $\vartheta(o)(u)$ auch zu $\frac{3^{2p}-1}{2}$ Paaren gruppiren, deren Charakteristiken sich nur durch das Zeichen unterscheiden (vergl. pag. 331).

Ferner sind noch folgende wichtige Formeln zu bemerken:

(5) . . . $\vartheta(\alpha)(u+3\beta)$

$$= e^{-i\pi\left\{\sum\sum a_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'} + 2\sum \beta_\mu u_\mu\right\} + \frac{2i\pi}{3}\sum(\alpha_\mu\beta_{\mu'} - \alpha_{\mu'}\beta_\mu)} \cdot \vartheta(\alpha)(u),$$

(6) . . . $\vartheta(\alpha)(u+\beta)$

$$= e^{\frac{-i\pi}{9}\sum\sum \alpha_{\mu\mu'}\beta_\mu\beta_{\mu'} - \frac{2i\pi}{3}\sum\beta_\mu\left(u_\mu + \frac{\alpha_{\mu'}}{3} + \frac{\beta_{\mu'}}{3}\right)} \cdot \vartheta(\alpha\beta)(u).$$

Sei ferner zur Abkürzung:

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

gesetzt; bildet man dann das Symbol $\tau^{\mu_\alpha|\zeta}$, so ist

$$\sum_{\zeta} \tau^{\mu_\alpha|\zeta} = 0 \text{ und } \sum_{\zeta} \tau^{0|\zeta} = 3^{2p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wenn sich die Summen auf sämtliche Charakteristiken (ζ) beziehen. Denn nach der Bedeutung des Symbols $\mu_\alpha|\zeta$ ist $0|\zeta = 0$ für jeden Wert von ζ, wodurch die Richtigkeit der 2. Gleichung folgt. Ferner befinden sich unter den 3^{2p} Charakteristiken (ζ) 3^{2p-1}, die $\mu_\alpha|\zeta \equiv 0$, 3^{2p-1}, die $\mu_\alpha|\zeta \equiv +1$ und 3^{2p-1} die $\mu_\alpha|\zeta \equiv -1$ machen; also ist

$$\sum_{\zeta} \tau^{\mu_\alpha|\zeta} \equiv 3^{2p-1}(1 + \tau + \tau^{-1}) \equiv 0 \pmod 3. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

§ 9.

I. Additionstheorem der Thetafunktionen.

Bildet man 3^p Thetaprodukte aus je drei Thetafunktionen mit derselben Charakteristik, so sind dieselben nach einem bekannten Satze voneinander unabhängig, und ein $3^p + 1$tes Produkt lässt sich durch dieselben linear darstellen.

Es ist also:

$$c \cdot \vartheta(\sigma)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha \vartheta(\sigma_\alpha)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3), \quad (1)$$

wobei die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1^{(1)} + v_2^{(1)} + v_3^{(1)} = b_1^{(1)} + b_2^{(1)} + b_3^{(1)} = w_1, \\ v_1^{(2)} + v_2^{(2)} + v_3^{(2)} = b_1^{(2)} + b_2^{(2)} + b_3^{(2)} = w_2, \\ \quad . \quad \quad . \quad \quad . \quad \quad . \quad \quad . \quad \quad . \quad \quad . \\ v_1^{(p)} + v_2^{(p)} + v_3^{(p)} = b_1^{(p)} + b_2^{(p)} + b_3^{(p)} = w_p, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und die w auch $= 0$ genommen werden können, was wir im Folgenden

zur Vereinfachung voraussetzen. Ferner wurde in der obigen Gleichung statt der p Argumente

$$u_1 - v_1^{(1)},\ u_2 - v_1^{(2)},\ \ldots\ u_p - v_1^{(p)} \text{ nur } u - v_1$$

und statt

$$\vartheta(\sigma)(u - v_1)\,\vartheta(\sigma)(u - v_2)\,\vartheta(\sigma)(u - v_3)$$

$\vartheta(\sigma)$ nur einmal geschrieben.

Führen wir nun in diese Gleichung statt der Indices (σ) die Charakteristiken eines Goepel'schen Systems

$$(\varrho_1),\ (\varrho_1\,\mu_1),\ (\varrho_1\,\mu_2)\ \ldots\ (\varrho_1\,\mu_{3^p-1})$$

ein, so kann man die Constanten c, c_α durch ein ähnliches Verfahren bestimmen, wie es von Herrn Frobenius a. a. O. angewendet wurde.

Es ist zunächst:

$$(3)\quad c\,\vartheta(\varrho_1)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} \vartheta(\varrho_1\,\mu_\alpha)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3).$$

Setzt man statt u: $\quad a + \mu_\beta,$

wo a irgend eine Constante ist, so ergibt sich mit Hilfe von Gleichung 6, § 8

$$(4)\quad c\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3) = \sum_{\alpha\ \ o}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha\,\tau^{2\Sigma\mu_\alpha'\mu_\beta}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\alpha\,\mu_\beta)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3),$$

die Summe $\Sigma\,\mu_\alpha'\,\mu_\beta$ im Exponenten ist hier, wie im Folgenden immer, wenn im Exponenten kein Summationsbuchstaben angegeben ist, über alle Zahlenwerte der betreffenden Charakteristik von 1 bis p auszudehnen. Multiplicirt man jetzt die Gleichung mit dem Faktor $\tau^{\mu_\beta|\zeta}$, wo (ζ) irgend eine der 3^{2p} Charakteristiken ist, lässt β alle Werte von o bis 3^p-1 durchlaufen und addirt die entstandenen 3^p Gleichungen, so bekommt man:

$$(5)\quad c\cdot\sum_{\beta=o}^{\beta=3^p-1} \tau^{\mu_\beta|\zeta}\,\tau^{|\mu_\beta|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3) = \sum_{\alpha=o}^{\alpha=3^p-1}\sum_{\beta=o}^{\beta=3^p-1} c_\alpha\,\tau^{\mu_\beta|\zeta}\cdot\tau^{|\mu_\beta|-\Sigma\mu_\alpha'\mu_\beta}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\alpha\,\mu_\beta)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3).$$

Um nun rechts die Indices α und β zu trennen, sei

$$(\mu_\beta) = (\mu_\alpha^2 \mu_\gamma) = (\mu_\gamma) - (\mu_\alpha)$$

gesetzt, dann stellt (μ_γ) ebenfalls alle Charakteristiken der Goepel'schen Gruppe dar, nur in anderer Reihenfolge als (μ_β), und wenn man beachtet, dass die Charakteristiken dieser Gruppe nach § 6 alle der Relation genügen:

$$\mu_\alpha \,|\, \mu_\beta \equiv 0 \pmod 3,$$

so ergibt sich durch eine leichte Zwischenrechnung statt der rechten Seite der Gleichung (5)

$$\sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha \tau^{2\,|\,\mu_\alpha\,|}\, \tau^{2\,|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\alpha^2\,|\,\zeta}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)$$

$$= \left(\sum_{\alpha=0}^{\alpha=3^p-1} c_\alpha \tau^{2\,|\,\mu_\alpha\,|}\, \tau^{\mu_\alpha^2\,|\,\zeta}\right) \cdot \sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3),$$

und hieraus, indem man noch $\alpha = \beta$ setzt und die so umgeformte Gleichung (5) nach der Coeffizientensumme auflöst:

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} c_\beta \tau^{2\,|\,\mu_\beta\,|}\, \tau^{\mu_\beta^2\,|\,\zeta}$$

$$= c \cdot \frac{\sum_\beta \tau^{|\,\mu_\beta\,|}\, \tau^{\mu_\beta\,|\,\zeta}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)}{\sum_\gamma \tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)} \quad . \quad . \quad (5)$$

Will man den Coeffizienten c_ε bestimmen, so multiplizirt man die Gleichung mit $\tau^{\mu_\varepsilon\,|\,\zeta}$, dann bekommt c_ε den Coeffizienten: $\tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|}\, \tau^{\mu_\varepsilon^2\,|\,\zeta}\, \tau^{\mu_\varepsilon\,|\,\zeta} = \tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|}$, und die Gleichung wird:

$$c_\varepsilon \tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|} + \sum_\beta \tau^{2\,|\,\mu_\varepsilon\,|}\, \tau^{\mu_\beta^2 \mu_\varepsilon\,|\,\zeta}\, c_\beta$$

$$= c\, \tau^{\mu_\varepsilon\,|\,\zeta} \cdot \frac{\sum_\beta \tau^{|\,\mu_\beta\,|}\, \tau^{\mu_\beta\,|\,\zeta}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)}{\sum_\gamma \tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\, \tau^{\mu_\gamma\,|\,\zeta}\, \vartheta(\varrho_1 \mu_\gamma)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)},$$

wo β noch alle Werte von o bis $3^p - 1$ mit Ausnahme von ε durchläuft. Lässt man nun (ζ) alle Charakteristiken durchlaufen und addirt die entstandenen 3^{2p} Gleichungen, so bekommt c_ε den Faktor 3^{2p}, während

$$\sum_{\zeta}\sum_{\beta}\tau^{2\,|\,\mu_\beta\,|\,\mu_\beta^{\mathfrak{s}}\,\mu_\varepsilon\,|\,\zeta}\,c_\beta=\sum_{\beta}\tau^{2\,|\,\mu_\beta\,|}\,c_\beta\left(\sum_{\zeta}\tau^{\mu_\beta^{\mathfrak{s}}\,\mu_\varepsilon\,|\,\zeta}\right)=0$$

ist nach Gleichung 8, § 8. Ausserdem werden auf der rechten Seite 3^p Glieder einander gleich. Denn denkt man sich die 3^{2p} Charakteristiken (ζ) etwa in ein Schema wie pag. 334 geordnet, so dass die an der Spitze stehende Gruppe der (μ) unsere Goepel'sche Gruppe ist, so erkennt man leicht, dass infolge der Gleichung $\tau^{\mu_\alpha\,|\,\mu_\beta}\equiv 1$ immer jene 3^p Glieder einander gleich werden, die durch Einführung der in der gleichen Horizontalreihe stehenden Charakteristiken erscheinen. Daraus folgt, dass man die Summation jetzt nur mehr auf die Gruppe der (ϱ) auszudehnen braucht. Somit hat man:

$$(6)\quad 3^p\cdot\frac{c_\varepsilon}{\tau^{|\,\mu_\varepsilon\,|}}=\sum_{0}^{3^p-1}{}_{\lambda}\,\tau^{\mu_\varepsilon\,|\,\varrho\lambda}\cdot\frac{\sum_{\beta}\tau^{|\,\mu_\beta\,|}\,\tau^{\mu_\beta\,|\,\varrho\lambda}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)\,(a-v_1)\,(a-v_2)\,(a-v_3)}{\sum_{\gamma}\tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\,\tau^{\mu_\gamma\,|\,\varrho\lambda}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\gamma)\,(a-b_1)\,(a-b_2)\,(a-b_3)}.$$

Führt man die so bestimmten Coeffizienten in Gleichung (3) ein, so kommt die Additionsformel:

$$(7)^1)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad 3^p\,\vartheta(\varrho_1)\,(u-v_1)\,(u-v_2)\,(u-v_3)$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{3^p-1}\left\{\frac{\sum_{\beta=0}^{3^p-1}\tau^{|\,\mu_\beta\,|}\,\tau^{\mu_\beta\,|\,\varrho\lambda}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)\,(a-v_1)\,(a-v_2)\,(a-v_3)}{\sum_{\gamma=0}^{3^p-1}\tau^{|\,\mu_\gamma\,|}\,\tau^{\mu_\gamma\,|\,\varrho\lambda}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\gamma)\,(a-b_1)\,(a-b_2)\,(a-b_3)}\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{\alpha=0}^{3^p-1}\tau^{|\,\mu_\alpha\,|}\,\tau^{\mu_\alpha\,|\,\varrho\lambda}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\alpha)\,(u-b_1)\,(u-b_2)\,(u-b_3)\right\}.$$

---

1) Gemäss dieser Gleichung möge die in meiner o. c. Note angegebene Schlussformel richtig gestellt werden, in welcher durch ein Versehen die im Neuner rechter Hand auftretende Summe nach links gesetzt wurde.

Eine zweite sehr wichtige Gleichung ergibt sich durch folgende Betrachtung. Da a ganz willkürlich gewählt wurde, so sind nach Gleichung (5) die Verhältnisse der Coeffizienten c_β von a unabhängig, und somit folgt:

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{\mu_\beta|\zeta\ \ |\mu_\beta|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)\,(a-v_1)\,(a-v_2)\,(a-v_3)$$

$$\cdot\sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \tau^{\mu_\gamma|\zeta\ \ |\mu_\gamma|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\gamma)\,(u-b_1)\,(u-b_2)\,(u-b_3)$$

$$=\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{\mu_\beta|\zeta\ \ |\mu_\beta|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)\,(u-v_1)\,(u-v_2)\,(u-v_3)$$

$$\cdot\sum_{\gamma=0}^{\gamma=3^p-1} \tau^{\mu_\gamma|\zeta\ \ |\mu_\gamma|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\gamma)\,(a-b_1)\,(a-b_2)\,(a-b_3).$$

Lassen wir wieder (ζ) alle Charakteristiken durchlaufen und addiren die entstandenen 3^{2p} Gleichungen, so verschwinden wieder alle Glieder ausser dem Gliede, für welches $(\mu_\beta\,\mu_\gamma) \equiv 0$, d. h. $(\mu_\gamma) = (\mu_\beta^2)$ ist. Also nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)\,(a-v_1)\,(a-v_2)\,(a-v_3)\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta^2)\,(u-b_1)\,(u-b_2)\,(u-b_3) = \\ \displaystyle\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta)\,(u-v_1)\,(u-v_2)\,(u-v_3)\,\vartheta(\varrho_1\,\mu_\beta^2)\,(a-b_1)\,(a-b_2)\,(a-b_3).\end{array}\right. \tag{8}$$

Die Gleichungen (7) und (8) lassen sich noch etwas verallgemeinern; indem man nämlich in (7) statt u: $u + \sigma - \varrho_1$ und statt v_1, v_2, v_3 bezüglich $v_1 - \varkappa$, $v_2 - \varkappa$, $v_3 - \varkappa$ schreibt, ((σ) und $(\varkappa)$ sind irgend welche Charakteristiken) erhält man:

$$3^p\,\vartheta(\sigma\varkappa)\,(u-v_1)\,(u-v_2)\,(u-v_3) =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=3^p-1} \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\,\varkappa'}\cdot\left\{\frac{\displaystyle\sum_\beta \tau^{|\mu_\beta|\ \mu_\beta|\varrho_\lambda}\,\tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\,\vartheta(\mu_\beta\,\varrho_1\,\varkappa)\,(a-v_1)\,(a-v_2)\,(a-v_3)}{\displaystyle\sum_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|\ \mu_\gamma|\varrho_\lambda}\,\vartheta(\mu_\gamma\,\varrho_1)\,(a-b_1)\,(a-b_2)\,(a-b_3)}\right.$$

$$\left.\cdot\sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|\ \mu_\alpha|\varrho_\lambda+2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\,\mu_\alpha'}\,\vartheta(\sigma\,\mu_\alpha)\,(u-b_1)\,(u-b_2)\,(u-b_3)\right\} \tag{9}$$

Setzt man in (γ_1) statt v_1, v_2, v_3 bezüglich $v_1+\varrho_1-\sigma$, $v_2+\varrho_1-\sigma$, $v_3+\varrho_1-\sigma$ und statt b_1, b_2, b_3, $b_1+\varrho_1-\sigma$, $b_2+\varrho_1-\sigma$, $b_3+\varrho_1-\sigma$, so kommt:

$$(10)\begin{cases}\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1}\tau^{2|\mu_\beta|}\vartheta(\sigma\,\mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\cdot\vartheta(\sigma\,\mu_\beta^2)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)\\ =\sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1}\tau^{2|\mu_\beta|}\vartheta(\sigma\,\mu_\beta^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)\cdot\vartheta(\sigma\,\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3)\end{cases}$$

Aus Formel (8) gewinnt man noch eine weitere allgemeine Formel, bei welcher rechts 3^{2p} Glieder auftreten. Man addirt zunächst zu u und den Constanten b die Charakteristik (ϱ_α), so kommt nach einigen Reduktionen:

$$\sum_\beta \tau^{2|\mu_\beta|}\tau^{\mu_\beta^2|\varrho_\alpha}\vartheta(\varrho_1\mu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\vartheta(\varrho_1\mu_\beta^2)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)=$$

$$\sum_\beta \tau^{2|\mu_\beta+\varrho_\alpha|}\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3)\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha^2\mu_\beta^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3).$$

Lässt man jetzt α alle Werte von Null bis 3^p-1 durchlaufen und addirt die so entstehenden Gleichungen, so fallen auf der linken Seite alle Glieder hinaus bis auf das für $\mu_\beta^2\equiv 0$ erscheinende Glied, welches den Faktor 3^p gewinnt, und man hat somit

$$3^p\vartheta(\varrho_1)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\vartheta(\varrho_1)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)=$$

$$\sum_{\alpha,\beta}\tau^{2|\mu_\beta+\varrho_\alpha|}\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha^2\mu_\beta^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3)\vartheta(\varrho_1\varrho_\alpha\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3).$$

Da nun α und β alle Werte von Null bis 3^p-1 durchlaufen, so stellt sowol $(\varrho_\alpha\,\mu_\beta)$ als auch $(\varrho_\alpha^2\,\mu_\beta^2)$ alle 3^{2p} Charakteristiken vor (vergl. das Schema pag. 334), und somit kann man $(\varrho_\alpha\,\mu_\beta)=(\lambda_\sigma)$ setzend schreiben:

$$(11)\ldots\quad 3^p\vartheta(\varrho_1)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3)\,\vartheta(\varrho_1)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)$$

$$=\sum_\sigma\tau^{2|\lambda_\sigma|}\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3)\,\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3).$$

Die Formeln (9), (10) und (11) können als Fundamentalformeln aufgefasst werden.

§ 10.

Spezielle Formeln.

Aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln lässt sich eine ganze Reihe spezieller Formeln gewinnen, indem man statt a, b_1, b_2, b_3, v_1, v_2, v_3 passende Werte einsetzt; hier mögen nur die einfachsten folgen. Setzt man in (9), (10) und (11) $a = o$, $b_1 = b_2 = b_3 = o$, so kommt:

$$3^p\,\vartheta(\sigma\varkappa)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3) =$$

$$\sum_{\lambda} \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \cdot \left\{ \frac{\sum_{\beta} \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \vartheta(\varrho_1^2\varkappa^2\mu_\beta^2)(v_1)(v_2)(v_3)}{\sum_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\varrho_1\mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\alpha} \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda} \cdot \vartheta^3(\sigma\mu_\alpha)(u) \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\sum_{\beta} \tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta(\sigma^2\mu_\beta^2)(v_1)(v_2)(v_3)\, \vartheta^3(\sigma\mu_\beta^2)(u)$$

$$= \sum_{\beta} \tau^{2|\mu_\beta|}\, \vartheta^3(\sigma\mu_\beta^2)\, \vartheta(\sigma\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3), \quad (13)$$

$$3^p\,\vartheta(\varrho_1^2)(v_1)(v_2)(v_3)\,\vartheta^3(\varrho_1)(u)$$

$$= \sum_{\sigma} \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \vartheta^3(\varrho_1\lambda_\sigma^2)\, \vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3). \quad (14)$$

Die Summation nach σ ist hier über alle Charakteristiken auszudehnen.

Zwei mit (12) und (14) analoge Formeln erhält man durch die Substitution: $a = o$, $v_1 = v_2 = v_3 = o$ aus den Gleichungen (9) und (11), schreibt man dann noch w statt b, so lauten sie:

$$(15)\quad \ldots\ldots\ldots\quad 3^p\,\vartheta^3(\sigma\varkappa)(u) =$$

$$\sum_{\lambda} \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \left\{ \frac{\sum_{\beta} \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\varrho_1\mu_\beta\varkappa)}{\sum_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta(\varrho_1^2\mu_\gamma^2)(w_1)(w_2)(w_3)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\alpha} \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda}\, \vartheta(\sigma\mu_\alpha)(u-w_1)(u-w_2)(u-w_3) \right\},$$

$$(16)\quad \ldots\ldots\quad 3^p\,\vartheta^3(\varrho_1)\,\vartheta(\varrho_1)(u-w_1)(u-w_2)(u-w_3)$$

$$= \sum_{\sigma} \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \vartheta^3(\varrho_1\lambda_\sigma)(u)\,\vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma)(w_1)(w_2)(w_3)$$

Wir führen im folgenden Paragraphen noch eine Reihe der sich aus diesen Formeln ergebenden Relationen zwischen Thetafunktionen mit demselben Argumente an.

§ 11.

Thetarelationen.

Man kann zunächst aus den Formeln (12) und (15) 4 Relationen zwischen je 3^p+1 Thetacuben oder dreigliedrigen Thetaprodukten ableiten. Setzt man nämlich in (12) $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, so hat man eine Gleichung, durch welche der Cubus irgend einer der 3^{2p} Thetafunktionen durch 3^p unabhängige Thetacuben linear dargestellt wird; es ist:

$$(I)\quad \ldots\ldots\ldots\quad 3^p\,\vartheta^3(\sigma\varkappa)(u) =$$

$$\sum_{\lambda} \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \cdot \left\{ \frac{\sum_{\beta} \tau^{|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\varrho_1\varkappa\mu_\beta)}{\sum_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\varrho_1\mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\alpha} \tau^{|\mu_\alpha|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\, \tau^{\mu_\alpha|\varrho\lambda}\, \vartheta^3(\sigma\mu_\alpha)(u) \right\}$$

Setzt man ferner in (12) $v_1 = \nu$, $v_2 = \nu_1$, $v_3 = -(\nu + \nu_1)$, wo (ν) und (ν_1) zwei beliebige Charakteristiken sind, so kommt:

$$3^p\,\vartheta(\sigma\varkappa\nu^2)(u)\,\vartheta(\sigma\varkappa\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\sigma\varkappa\nu\nu_1)(u) =$$

$$\sum_\lambda \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \left\{ \frac{\sum_\beta \tau^{|\mu_\beta|}\,\tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\,\tau^{\mu_\beta|\varrho_\lambda}\,\vartheta(\mu_\beta\varrho_1\nu^2\varkappa)\,\vartheta(\mu_\beta\varrho_1\varkappa\nu_1^2)\,\vartheta(\mu_\beta\varrho_1\varkappa\nu\nu_1)}{\sum_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|}\,\tau^{\mu_\gamma|\varrho_\lambda}\,\vartheta^3(\varrho_1\mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|}\,\tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\,\tau^{\mu_\alpha|\varrho_\lambda}\,\vartheta^3(\sigma\mu_\alpha)(u) \right\}, \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

wodurch ein Thetaprodukt durch 3^p Thetacuben ausgedrückt wird.

Umgekehrt erhält man einen Thetacubus durch 3^p Thetaprodukte ausgedrückt, indem man in Gleichung (15) $w_1 = \nu$, $w_2 = \nu_1$, $w_3 = -(\nu + \nu_1)$ einführt; es folgt:

$$3^p\,\vartheta^3(\sigma\varkappa)(u) = \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

$$\sum_\lambda \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \cdot \left\{ \frac{\sum_\beta \tau^{|\mu_\beta|}\,\tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\,\tau^{\mu_\beta|\varrho_\lambda}\,\vartheta^3(\varrho_1\varkappa\mu_\beta)}{\sum_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|}\,\tau^{\mu_\gamma|\varrho_\lambda}\,\vartheta(\varrho_1\nu^2\mu_\gamma)\,\vartheta(\varrho_1\nu_1^2\mu_\gamma)\,\vartheta(\varrho_1\nu\nu_1\mu_\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|}\,\tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\,\tau^{\mu_\alpha|\varrho_\lambda}\,\vartheta(\mu_\alpha\sigma\nu^2)(u)\,\vartheta(\mu_\alpha\sigma\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\mu_\alpha\sigma\nu\nu_1)(u) \right\};$$

und endlich erhält man ein Thetaprodukt durch 3^p unabhängige Thetaprodukte linear dargestellt, indem man in Gleichung (9) $b_1 = v_1$, $b_2 = v_2$, $b_3 = v_3$ setzt, v_1, v_2, v_3 bezüglich durch $v_1 + \nu$, $v_2 + \nu_1$, $v_3 - (\nu_1 + \nu_2)$ ersetzt und schliesslich $a = o$ und $v_1 = v_2 = v_3 = o$ werden lässt; das gibt:

$$3^p\,\vartheta(\varkappa\sigma\nu^2)(u)\,\vartheta(\varkappa\sigma\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\varkappa\sigma\nu\nu_1)(u) = \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

$$\sum_\lambda \tau^{\Sigma(\sigma-\varrho_1)\varkappa'} \left\{ \frac{\sum_\beta \tau^{|\mu_\beta|}\,\tau^{\mu_\beta|\varrho_\lambda}\,\tau^{2\Sigma\mu_\beta\varkappa'}\,\vartheta(\mu_\beta\varkappa\varrho_1\nu^2)\,\vartheta(\mu_\beta\varkappa\varrho_1\nu_1^2)\,\vartheta(\mu_\beta\varkappa\varrho_1\nu\nu_1)}{\sum_\gamma \tau^{|\mu_\gamma|}\,\tau^{\mu_\gamma|\varrho_\lambda}\,\vartheta(\mu_\gamma\varrho_1\nu^2)\,\vartheta(\mu_\gamma\varrho_1\nu_1^2)\,\vartheta(\mu_\gamma\varrho_1\nu\nu_1)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_\alpha \tau^{|\mu_\alpha|}\,\tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\alpha'}\,\tau^{\mu_\alpha|\varrho_\lambda}\,\vartheta(\mu_\alpha\sigma\nu^2)(u)\,\vartheta(\mu_\alpha\sigma\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\mu_\alpha\sigma\nu\nu_1)(u) \right\}.$$

An diese 4 Relationen schliesst sich eine weitere an, welche eine Beziehung zwischen 3^p Thetacuben und 3^p Thetaprodukten vermittelt. Man bekommt nämlich aus (13) die Relation:

$$(V)\quad \begin{cases} \sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma(\varrho_1-\sigma)\mu_\beta'}\, \vartheta(\varrho_1\mu_\beta\nu)\,\vartheta(\varrho_1\mu_\beta\nu_1)\,\vartheta(\varrho_1\mu_\beta\nu^2\nu_1^2)\,\vartheta^3(\mu_\beta^2\sigma)(u) = \\ \sum_{\beta=0}^{\beta=3^p-1} \tau^{2|\mu_\beta|}\, \tau^{2\Sigma(\sigma-\varrho_1)\mu_\beta'}\, \vartheta^3(\varrho_1\mu_\beta^2)\,\vartheta(\sigma\nu^2\mu_\beta)(u)\,\vartheta(\sigma\nu_1^2\mu_\beta)(u)\,\vartheta(\sigma\nu\nu_1\mu_\beta)(u), \end{cases}$$

indem man daselbst u um $\sigma - \varrho_1$ vermehrt und v_1, v_2, v_3 bezüglich durch ν, ν_1, $-(\nu+\nu_1)$ ersetzt.

Endlich kann man noch aus den Gleichungen (11), (14) und (16) vier Relationen bilden: zwei zwischen 3^{2p} Thetacuben, bezüglich 3^{2p-1} Thetaprodukten und zwei, in welchen bezüglich ein ϑ-Cubus und 3^{2p-1} ϑ-Produkte, ein ϑ-Produkt und 3^{2p} Thetakuben auftreten. Die erste folgt aus (14) für $u = u - \varrho_1 + \xi$ und $v_1 = v_2 = v_3 = o$, wo (ξ) irgend eine Charakteristik ist:

$$(VI)\quad (3^p - 1)\,\vartheta^3(\varrho_1)\,\vartheta^3(\xi)(u) = \sum_\sigma{}' \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{\Sigma(\varrho_1-\xi)\lambda_\sigma'}\, \vartheta^3(\varrho_1\lambda_\sigma^2)\,\vartheta^3(\xi\lambda_\sigma)(u),$$

wo sich die Summation auf alle Charakteristiken (λ_σ) ausser (o) bezieht, was durch $'$ angedeutet ist.

Aehnlich erhält man die drei übrigen Formeln:

$$(VII)\quad (3^p - 1)\,\vartheta(\varrho_1\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu\nu_1)\,\vartheta(\xi\nu^2)(u)\,\vartheta(\xi\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\xi\nu\nu_1)(u)$$
$$= \sum_\sigma{}' \{\tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{\Sigma(\xi-\varrho_1)\lambda_\sigma'}\, \vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1\lambda_\sigma^2\nu\nu_1)$$
$$\cdot\, \vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu^2)(u)\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu\nu_1)(u)\};$$

$$(VIII)\quad 3^p\,\vartheta(\varrho_1\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1\nu\nu_1)\,\vartheta^3(\xi)(u) =$$
$$\sum_\sigma \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{2\Sigma(\xi-\varrho_1)\lambda_\sigma'}\, \tau^{|\varrho-\xi|}\, \vartheta^3(\varrho_1\lambda_\sigma^2)\cdot\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu^2)(u)\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\xi\lambda_\sigma\nu\nu_1)(u);$$

$$(IX)\quad 3^p\,\vartheta^3(\varrho_1)\,\vartheta(\xi\nu^2)(u)\,\vartheta(\xi\nu_1^2)(u)\,\vartheta(\xi\nu\nu_1)(u) =$$
$$\sum_\sigma \tau^{2|\lambda_\sigma|}\, \tau^{2\Sigma(\xi-\varrho_1)\lambda_\sigma'}\, \vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma\nu^2)\,\vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma\nu_1^2)\,\vartheta(\varrho_1^2\lambda_\sigma\nu\nu_1)\cdot\vartheta^3(\xi\lambda_\sigma)(u).$$

Die letzten 3 Formeln enthalten nur 3^{2p-1} verschiedene Thetaprodukte, weil λ_σ bei Durchlaufung aller Charakteristiken die Werte ν, ν_1, $\nu\,\nu_1$ ebenfalls erlangen muss, wodurch immer drei Produkte einander gleich werden.

Aus diesen Relationen lassen sich dann noch sofort einige Beziehungen zwischen einer geringeren Anzahl von Theta-Funktionen ableiten. So gewinnt man z. B. aus (IV) eine Relation zwischen nur $3^{p-1}+1$ Thetaprodukten, indem man statt (ν), (ν_1), zwei Charakteristiken der Gruppe

$$(1),\ (\mu_1),\ (\mu_2)\ldots(\mu_{3^p-1})$$

einführt. Es sei $(\nu)=(\mu_\nu)$, $(\nu_1)=(\mu_{\nu_1})$ gesetzt, dann ist $(\nu\,\nu_1)=(\mu_\nu\,\mu_{\nu_1})$ wieder eine Charakteristik der Gruppe. Die in obiger Formel enthaltenen Produkte haben nun die Charakteristiken $(\mu_\beta\,\mu_\nu^2)$, $(\mu_\beta\,\mu_{\nu_1}^2)$, $(\mu_\beta\,\mu_\nu\,\mu_{\nu_1})$, und es werden daher bei der Summation nach β immer jene drei Produkte einander gleich, welche dadurch hervorgehen, dass (μ_β) den Wert $(\mu_\lambda\,\mu_\nu^2)$ oder $(\mu_\lambda\,\mu_{\nu_1}^2)$ oder endlich den Wert $(\mu_\lambda\,\mu_\nu\,\mu_{\nu_1})$ annimmt. Somit reducirt sich die Gliederzahl der Summe auf der rechten Seite auf den dritten Teil und man hat eine Relation zwischen $3^{p-1}+1$ Produkten. Solcher Relationen gewinnt man aus den vorhergehenden Formeln im Ganzen drei, nämlich:

aus (III) eine Relation zwischen einem Thetacubus und 3^{p-1} Thetaprodukten; (X)

aus (IV) eine Relation zwischen $3^{p-1}+1$ Theta-Produkten; (XI)

aus (V) eine Relation zwischen 3^p Theta-Cuben (XII)
und 3^{p-1} Theta-Produkten.

§ 12.

II. Additionstheorem der Thetafunktionen.

Wie die Goepel'schen Systeme, so bieten auch die Fundamentalsysteme ein Mittel, um ein Additionstheorem aufzustellen.

Seien $(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3)\ldots(\alpha_{2p+2})$

die Charakteristiken irgend eines Fundamentalsystems, und bildet man daraus die Charakteristiken:

$$(\alpha_1^2\alpha_2),\ (\alpha_3^2\alpha_4),\ (\alpha_5^2\alpha_6)\ldots.(\alpha_{2p-3}^2\alpha_{2p-2}),$$

die mit:

$$(\mu_1),\ (\mu_2),\ (\mu_3)\ \ldots\ .\ (\mu_{p-1})$$

bezeichnet seien, so bilden die 3^{p-1} Combinationen der (μ) eine Gruppe, deren Charakteristiken der Beziehung

$$\mu_\varrho\,|\,\mu_\sigma \equiv 0 \pmod 3$$

genügen, und ferner ist

$$\alpha_\lambda\,|\,\mu_\varrho \equiv \alpha_\lambda'\,|\,\mu_\varrho \equiv \varepsilon \pmod 3,$$

wenn α_λ, α_λ' irgend zwei der noch übrigen Charakteristiken des Systemes sind, so dass ε eine vom Index λ unabhängige Zahl ist.

Zum Beweise beachte man, dass $\mu_1\,|\,\mu_2 \equiv \alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_3^2\alpha_4 \equiv \alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_1^2\alpha_1 \equiv -\alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1^2\alpha_2\,|\,\alpha_1^2\alpha_4 \equiv 0 \pmod 3$ ist, da $(\alpha_1^2\alpha_2)$, $(\alpha_1^2\alpha_3)$, $(\alpha_1^2\alpha_4)$ drei Charakteristiken eines speziellen Fundamentalsystemes bedeuten (§ 7). Somit genügen nach Satz (IV) § 4 alle Charakteristiken (μ_ϱ), (μ_σ) und ihre Combinationen der Bedingung $\mu_\varrho\,|\,\mu_\sigma \equiv 0$. Ferner ist $\alpha_\lambda^3\alpha_{\lambda'}\,|\,\mu_\varrho \equiv \alpha_1^2\alpha_\lambda\,|\,\alpha_1^2\alpha_{2\varrho-1} - \alpha_1^2\alpha_\lambda\,|\,\alpha_1^2\alpha_{2\varrho} - \alpha_1^2\alpha_{\lambda'}\,|\,\alpha_1^2\alpha_{2\varrho-1} + \alpha_1^2\alpha_{\lambda'}\,|\,\alpha_1^2\alpha_{2\varrho} \equiv 0$. Also $\alpha_\lambda\,|\,\mu_\varrho \equiv \alpha_{\lambda'}\,|\,\mu_\varrho \equiv \varepsilon$.

Bezeichnet man irgend drei der unter den (μ) nicht enthaltenen Charakteristiken des Fundamentalsystemes kurz mit (α_1), (α_2), (α_3), so kann man ein System von 3^p Charakteristiken in folgender Weise bilden. Es ist:

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (\alpha_1\mu_1),\ (\alpha_2\mu_1),\ (\alpha_3\mu_1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha_1\mu_\sigma),\ (\alpha_2\mu_\sigma),\ (\alpha_3\mu_\sigma),$$

$\sigma = 3^{p-1} - 1$. Die Charakteristiken dieses Systemes führen wir jetzt wieder wie früher als Indices einer ähnlichen Formel ein, wie sie in § 9 aufgestellt wurde. Es sei:

$$(1)\qquad .\ .\ .\ .\ .\ .\ c\,\vartheta(o)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$
$$= \sum_{\lambda,\beta} c'_{\lambda,\beta}\,\vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w),$$

wo λ die Werte 1, 2, 3 annimmt und β von Null bis $3^{p-1}-1$ läuft. Die Bedeutung der Grössen v, v′ und w ist die analoge wie in § 9.

Es sind noch c und $c'_{\lambda,\beta}$ zu bestimmen.[1]) Setzt man zu diesem Zwecke vorerst λ constant und $u = a + \mu_\gamma - \alpha_\lambda$, so kommt:

$$c\,\vartheta(\alpha_\lambda^2 \mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w) = \sum_\beta \Big\{ c'_{\lambda,\beta}\, \tau^{2\Sigma(\mu_\gamma-\alpha_\lambda)(\mu_\beta'+\alpha_\lambda')}$$
$$\cdot\, \vartheta(\mu_\beta \mu_\gamma)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)\Big\}.$$

Fügt man hier auf beiden Seiten den Faktor $\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\mu_\gamma'+\alpha_\lambda')}$ bei, so kommt:

$$c\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\alpha_\lambda'+\mu_\gamma')}\,\vartheta(\alpha_\lambda^2 \mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)$$
$$= \sum c'_{\lambda,\beta}\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\mu_\gamma'-\mu_\beta')+\Sigma\alpha_\lambda(\alpha_\lambda'+\mu_\beta')}$$
$$\cdot\, \vartheta(\mu_\beta \mu_\gamma)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w).$$

Setzt man jetzt in der Hauptgleichung (1)

$$c'_{\lambda,\beta} = \tau^{2\Sigma\alpha_\lambda(\mu_\beta'+\alpha_\lambda')}\, c_{\lambda,\beta},$$

so wird diese:

$$c\,\vartheta(o)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$
$$= \sum_{\lambda,\beta} \tau^{2\Sigma\alpha_\lambda(\alpha_\lambda'+\mu_\beta')}\, c_{\lambda,\beta}\,\vartheta(\alpha_\lambda \mu_\beta)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w), \quad (2)$$

und die zur Constantenbestimmung dienende Gleichung wird:

$$c\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\alpha_\lambda'+\mu_\beta')}\,\vartheta(\alpha_\lambda^2 \mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)$$
$$= \sum_\beta c_{\lambda,\beta}\,\tau^{\Sigma\mu_\gamma(\mu_\gamma'-\mu_\beta')}\,\vartheta(\mu_\beta \mu_\gamma)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w).$$

Diese Gleichung repräsentirt 3^{p-1} homogene Gleichungen zwischen den $3^{p-1}+1$ zu einem bestimmten Werte von λ gehörigen Coeffizienten c und $c_{\lambda,\beta}$. Um die Verhältnisse dieser Coeffizienten daraus zu bestimmen kann man wieder wie in § 9 zur Trennung der Indices $\mu_\gamma = \mu_\beta^2 \mu_\varepsilon$ setzen, beiderseits mit $\tau^{\mu_\gamma|\zeta}$ multipliziren (wo (ζ) irgend eine Charakteristik ist), und nach γ von o bis $3^{p-1}-1$ summiren, dann erhält man nach einigen Reduktionen:

---

1) Vergl. Frobenius l. c.

$$\sum_{\beta} c_{\lambda,\beta}\, \tau^{2|\mu_\beta|}\, \tau^{\mu_\beta^2|\zeta}$$

$$= c \cdot \frac{\sum\limits_{\gamma} \tau^{\Sigma\mu_\gamma(\alpha_\lambda' + \mu_\gamma')}\, \tau^{\mu_\gamma|\zeta}\, \vartheta(\alpha_\lambda^2 \mu_\gamma)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\zeta}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)},$$

und hieraus durch dieselbe Rechnung, die pag. 351 ausgeführt wurde:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3^{p-1} \cdot \frac{c_{\lambda,\beta}}{\tau^{|\mu_\beta|}}$$

$$= c \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=3^{p-1}-1} \tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu} \frac{\sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma|}\, \tau^{\Sigma\mu_\gamma\alpha_\lambda'}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)}$$

Setzt man diese Constanten in die Hauptformel (2) ein, so kommt:

$$(4) \quad \ldots \quad 3^{p-1}\vartheta(o)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=3^{p-1}-1} \sum_{\lambda=1,2,3} \left\{ \tau^{2|\alpha_\lambda|} \frac{\sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma| + \Sigma\mu_\gamma\alpha_\lambda'}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=3^{p-1}-1} \tau^{|\mu_\beta| + 2\Sigma\alpha_\lambda\mu_\beta'} \cdot \tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\, \vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w) \right\}.$$

Diese Formel kann man noch in eine weit einfachere Gestalt bringen. Setzen wir vorerst statt u, $u + \mu_\varkappa$, so kommt:

$$3^{p-1}\, \tau^{\mu_\varkappa|\alpha_\lambda}\, \vartheta(\mu_\varkappa)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{\lambda} \left\{ \frac{\tau^{2|\alpha_\lambda|}\, \tau^{\mu_\varkappa^2|\varrho_\nu} \sum\limits_{\gamma} \tau^{|\mu_\gamma| + \Sigma\alpha_\lambda'\mu_\gamma}\, \tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)}{\tau^{|\mu_\varkappa|} \sum\limits_{\varepsilon} \tau^{|\mu_\varepsilon|}\, \tau^{\mu_\varepsilon|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\varepsilon)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\beta} \tau^{|\mu_\beta| + 2\Sigma\alpha_\lambda\mu_\beta'}\, \tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\, \vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w) \right\},$$

dabei ist zu beachten, dass die Zahl $\mu_\varkappa|\alpha_\lambda$ nach den Entwicklungen am Anfang dieses Paragraphen für $\lambda = 1, 2, 3$ constant ist, so dass man dafür $\mu_\varkappa|\alpha$ setzen kann. Multiplizirt man jetzt auf beiden Seiten mit

$$\tau^{2|\mu_\varkappa|}\,\vartheta(\mu_\varkappa^2)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w),$$

setzt $(\mu_\varepsilon) = (\mu_\varkappa^2)$ und summirt nach $\varkappa$ von o bis $3^{p-1}-1$, so hebt sich in jedem Gliede der Summe $\sum_\nu$ der Nenner weg und es kommt:

$$\begin{aligned}
3^{p-1}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=3^{p-1}-1}\{&\tau^{\mu_\varkappa|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\varkappa|}\,\vartheta(\mu_\varkappa^2)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)\\
&\cdot\vartheta(\mu_\varkappa)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)\}\\
=\sum_\nu\sum_\lambda\Big\{&\tau^{2|\alpha_\lambda|}\sum_\gamma\tau^{|\mu_\gamma|+\Sigma\mu_\gamma\alpha_\lambda'}\,\tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu}\,\vartheta(\mu_\gamma\alpha_\lambda^2)(a-v_1)(a-v_2)(a+v_1+v_2+w)\\
&\cdot\sum_\beta\tau^{|\mu_\beta|+2\Sigma\alpha_\lambda\mu_\beta'}\,\tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\,\vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta)(u-v_1')(u-v_2')(u+v_1'+v_2'+w)\Big\}.
\end{aligned}$$

Führt man die Summe auf der rechten Seite aus, so findet man ähnlich wie früher bei Herstellung der Formel (8) § 9, dass alle Glieder aus der Summe verschwinden bis auf jene, die für $\mu_\beta^2 = \mu_\gamma$ auftreten, da der in den einzelnen Summanden erscheinende Faktor $\tau^{\mu_\beta|\varrho_\nu}\cdot\tau^{\mu_\gamma|\varrho_\nu} = \tau^{\mu_\beta\mu_\gamma|\varrho_\nu}$ nur dann den Wert 1 erhält, wenn $\mu_\beta\mu_\gamma \equiv o$ ist. Führt man also die Substitution $\mu_\gamma = \mu_\beta^2$ aus, so erhält man die Fundamentalformel:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\beta=0}^{\beta=3^{p-1}-1}\{\tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^2)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)\\
&\qquad\cdot\vartheta(\mu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w)\}\\
=\sum_{\beta=0}^{\beta=3^{p-1}-1}\sum_{\lambda=1,2,3}&\{\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2)(a-v_1')(a-v_2')(a+v_1'+v_2'+w)\\
&\qquad\cdot\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda)(u-v_1)(u-v_2)(u+v_1+v_2+w),\}
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

eine Formel, welche im Ganzen aus $3^{p-1}+3^p = 4\cdot 3^{p-1}$ Gliedern besteht; sie ist völlig analog den Formeln, welche Herr Frobenius l. c. pag. 219 und Herr Noether l. c. pag. 327 für Halbercharakteristiken gaben.

§ 13.

Spezielle Formeln. Thetarelationen.

Setzt man in der Fundamentalformel $v_1' = \varrho_1$, $v_2' = \varrho_2$, $v_1 = \sigma_1$, $v_2 = \sigma_2$, wo (ϱ_1), (ϱ_2), (σ_1), (σ_2) Charakteristiken sind, so kommt:

$$(1)\quad \sum_{\beta}\{\tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^s\varrho_1^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\varrho_2^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\varrho_1\varrho_2)(a+w)\cdot\vartheta(\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u+w)\}$$

$$=\sum_{\beta}\sum_{\lambda}\{\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^s\alpha_\lambda^s\varrho_1^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\alpha_\lambda^s\varrho_2^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\alpha_\lambda^s\varrho_1\varrho_2)(a+w)\cdot\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\sigma_1^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\sigma_2^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\sigma_1\sigma_2)(u+w),\}$$

$\beta = 0 \ldots 3^{p-1}-1$, $\lambda = 1, 2, 3$.

Diese Gleichung enthält wie die allgemeine $4\cdot 3^{p-1}$ Glieder. Setzt man aber $\sigma_1 = \mu_{\nu_1}$, $\sigma_2 = \mu_{\nu_2}$, wo (μ_{ν_1}), (μ_{ν_2}) Charakteristiken der Gruppe der (μ) sind, so werden immer drei Produkte mit den Argumenten u einander gleich und die Gleichung:

$$(2)\quad \sum_{\beta}\{\tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^s\varrho_1^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\varrho_2^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\varrho_1\varrho_2)(a+w)\cdot\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}^s)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_2}^s)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(u+w)\}$$

$$=\sum_{\beta}\sum_{\lambda}\{\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^s\alpha_\lambda^s\varrho_1^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\alpha_\lambda^s\varrho_2^2)(a)\,\vartheta(\mu_\beta^s\alpha_\lambda^s\varrho_1\varrho_2)(a+w)\cdot\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\mu_{\nu_1}^s)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\mu_{\nu_2}^s)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(u+w)\}$$

umfasst dann nur mehr $4\cdot 3^{p-2}$ Glieder.

Die Coeffizienten der 3^{p-2} verschiedenen Produkte

$$\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}^s)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_2}^s)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(u+w)$$

links und der 3^{p-1} verschiedenen analogen Produkte rechts sind dann dreigliedrige Summen, die sich noch vereinfachen, wenn man $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$ setzt.

Macht man endlich auch $\varrho_1 = \mu_{\nu_1}$, $\varrho_2 = \mu_{\nu_2}$, so werden auch die als Coeffizienten auftretenden dreigliedrigen Summen eingliedrig, und die Formel nimmt für $a = 0$ ihre einfachste Gestalt an:

$$\sum_{\beta}\{\tau^{\mu_\beta|\alpha}\tau^{2|\mu_\beta|}\vartheta(\mu_\beta^2\mu_{\nu_1}^2)\vartheta(\mu_\beta^2\mu_{\nu_2}^2)\vartheta(\mu_\beta^2\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(w)$$
$$\cdot\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_2}^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(u+w)\}$$
$$=\sum_{\beta}\sum_{\lambda}\{\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2\mu_{\nu_1}^2)\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2\mu_{\nu_2}^2)\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(w) \qquad (3)$$
$$\cdot\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\mu_{\nu_1}^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\mu_{\nu_2}^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(u+w)\}.$$

Setzt man hingegen in Gleichung (2) nur $\varrho_1 = \mu_{\nu_1}$, $\varrho_2 = \mu_{\nu_2}$, so werden immer drei der als Coeffizienten auftretenden Produkte

$$\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}^2)(a)\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_2}^2)(a)\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(a+w)$$

einander gleich, und man erhält eine Relation aus $4\cdot 3^{p-1}$ Gliedern, von denen je drei dasselbe ϑ-Produkt als Faktor besitzen.

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich unmittelbar einige Relationen ableiten zwischen Thetafunktionen mit demselben Argumente; diese sollen im Folgenden angegeben und dann zum Schlusse noch für $p = 2$ spezialisirt werden.

Aus (1) erhält man für $a = o$, $w = o$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \sigma_1 = \sigma_2 = o$:

$$\sum_{\beta}\tau^{\mu_\beta|\alpha}\tau^{2|\mu_\beta|}\vartheta^3(\mu_\beta^2)\vartheta^3(\mu_\beta)(u)=\sum_{\beta}\sum_{\lambda}\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\vartheta^3(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2)\vartheta^3(\mu_\beta\alpha_\lambda)(u), \quad \text{(XIII)}$$

eine Beziehung zwischen $4\cdot 3^{p-1}$ Thetacuben.

Setzt man ferner in (2) $a = o$, $w = o$, $\varrho_1 = \varrho_2 = o$, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\beta}\tau^{\mu_\beta|\alpha}\tau^{2|\mu_\beta|}\vartheta^3(\mu_\beta^2)\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_2}^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(u)\\&=\sum_{\beta}\sum_{\lambda}\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\vartheta^3(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2)\vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta\mu_{\nu_1}^2)(u)\vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta\mu_{\nu_2}^2)(u)\vartheta(\alpha_\lambda\mu_\beta\mu_{\nu_1}\mu_{\nu_2})(u),\end{aligned}\right\}\text{(XIV)}$$

eine Relation zwischen $4\cdot 3^{p-2}$ Thetaprodukten.

Eine in den Coeffizienten allgemeinere Form dieser Gleichung ergibt sich aus (2), indem man nur $a = w = o$ setzt, und ein weiterer spezieller Fall tritt ein, wenn man in (3) $w = o$ sein lässt.

§ 14.

Thetarelationen für p = 2.

Für p = 2 bilden die (μ_ε) in allen Formeln eine Gruppe 3ten Grades, deren Charakteristiken

$$(\mu_0) = (0),\ (\mu_1) = (\mu_1),\ (\mu_2) = (\mu_1^2)$$

sein mögen, dann folgt aus (1) § 13 für w = o, a = o;

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=2} \tau^{\mu_\beta\,|\,\alpha}\,\tau^{2\,|\,\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta^2\varrho_1^2)\,\vartheta(\mu_\beta^2\varrho_2^2)\,\vartheta(\mu_\beta^2\varrho_1\varrho_2)\,\vartheta(\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u)$$

$$(I') \qquad = \sum_{\beta=0}^{\beta=2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=3}\{\tau^{2\,|\,\mu_\beta+\alpha_\lambda|}\,\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2\varrho_1^2)\,\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2\varrho_2^2)\,\vartheta(\mu_\beta^2\alpha_\lambda^2\varrho_1\varrho_2)$$

$$\cdot\,\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\sigma_1^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\sigma_2^2)(u)\,\vartheta(\mu_\beta\alpha_\lambda\sigma_1\sigma_2)(u)\}.$$

Sei nun hier $\sigma_1 = \mu_1$, $\sigma_2 = \mu_1^2$ gesetzt, dann ist $\sigma\sigma_1 \equiv o$ und man erhält:

$$(II')\begin{cases} \vartheta(0)(u)\,\vartheta(\mu_1)(u)\,\vartheta(\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{\mu_\beta|\alpha}\,\tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta(\mu_\beta\varrho_1^2)\,\vartheta(\mu_\beta\varrho_2^2)\,\vartheta(\mu_\beta\varrho_1\varrho_2)\right\} \\ = \vartheta(\alpha_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\,\vartheta(\alpha_1^2\mu_\beta^2\varrho_1^2)\vartheta(\alpha_1^2\mu_\beta^2\varrho_2^2)\vartheta(\alpha_1^2\mu_\beta^2\varrho_1\varrho_2)\right\} \\ +\vartheta(\alpha_2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|}\,\vartheta(\alpha_2^2\mu_\beta^2\varrho_1^2)\vartheta(\alpha_2^2\mu_\beta^2\varrho_2^2)\vartheta(\alpha_2^2\mu_\beta^2\varrho_1\varrho_2)\right\} \\ +\vartheta(\alpha_3)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)(u)\left\{\sum_{\beta=0}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_\lambda+\mu_\beta|}\,\vartheta(\alpha_3^2\mu_\beta^2\varrho_1^2)\vartheta(\alpha_3^2\mu_\beta^2\varrho_2^2)\vartheta(\alpha_3^2\mu_\beta^2\varrho_1\varrho_2)\right\}, \end{cases}$$

eine Relation zwischen vier Theta-Produkten.

Sei ferner in (I!) $\varrho_1 = \mu_1$, $\varrho_2 = \mu_1^2$, $\varrho_1\varrho_2 = o$ gesetzt, dann folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta(o)\vartheta(\mu_1)\vartheta(\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{\mu_\beta|\alpha}\tau^{2|\mu_\beta|}\vartheta(\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u)\right\}\\
=&\,\vartheta(\alpha_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_1+\mu_\beta|}\vartheta(\alpha_1\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u)\right\}\\
+&\,\vartheta(\alpha_2)\vartheta(\alpha_2\mu_1)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|}\vartheta(\alpha_2\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u)\right\}\\
+&\,\vartheta(\alpha_3)\vartheta(\alpha_3\mu_1)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)\left\{\sum_{\beta=o}^{\beta=2}\tau^{2|\alpha_3+\mu_\beta|}\vartheta(\alpha_3\mu_\beta\sigma_1^2)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_\beta\sigma_2^2)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_\beta\sigma_1\sigma_2)(u\right\},
\end{aligned}\right\}\text{(III')}$$

eine Relation zwischen 12 Thetaprodukten, von denen immer drei die nämlichen Coeffizienten besitzen. Die Formeln (II′) und (III′) fallen für $\varrho_1 = \sigma_1 = \mu_1$, $\varrho_2 = \sigma_2 = \mu_1^2$ in die folgende einfachere zwischen 4 Thetaprodukten zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{1+\tau^{\mu_1|\alpha-|\mu_1|}+\tau^{\mu_1^2|\alpha-|\mu_1|}\right\}\vartheta(o)\vartheta(\mu_1)\vartheta(\mu_1^2)\cdot\vartheta(o)(u)\vartheta(\mu_1)(u)\vartheta(\mu_1^2)(u)\\
=&\left\{\tau^{2|\alpha_1|}+\tau^{2|\alpha_1+\mu_1|}+\tau^{2|\alpha_1-\mu_1|}\right\}\vartheta(\alpha_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)\cdot\vartheta(\alpha_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1)(u)\\
&\qquad\qquad\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)(u)\\
+&\left\{\tau^{2|\alpha_2|}+\tau^{2|\alpha_2+\mu_1|}+\tau^{2|\alpha_2-\mu_1|}\right\}\vartheta(\alpha_2)\vartheta(\alpha_2\mu_1)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)\cdot\vartheta(\alpha_2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1)(u)\\
&\qquad\qquad\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)(u)\\
+&\left\{\tau^{2|\alpha_3|}+\tau^{2|\alpha_3+\mu_1|}+\tau^{2|\alpha_3-\mu_1|}\right\}\vartheta(\alpha_3)\vartheta(\alpha_3\mu_1)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)\cdot\vartheta(\alpha_3)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1)(u)\\
&\qquad\qquad\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)(u).
\end{aligned}\right\}\text{(IV')}$$

Eine Relation zwischen denselben Produkten, aber mit andern Coeffizienten erhält man endlich noch, indem man in (I′) $\varrho_1 = \varrho_2 = o$ setzt; es folgt dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta(o)(u)\vartheta(\mu_1)(u)\vartheta(\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{\mu_\beta|\alpha-|\mu_\beta|}\vartheta^3(\mu_\beta)\\
=&\,\vartheta(\alpha_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_1\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{2|\alpha_1+\mu_\beta|}\vartheta^3(\alpha_1^2\mu_\beta^2)\\
+&\,\vartheta(\alpha_2)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_2\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|}\vartheta^3(\alpha_2^2\mu_\beta^2)\\
+&\,\vartheta(\alpha_3)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1)(u)\vartheta(\alpha_3\mu_1^2)(u)\cdot\sum_\beta\tau^{2|\alpha_3+\mu_\beta|}\vartheta^3(\alpha_3^2\mu_\beta^2).
\end{aligned}\right\}\text{(V')}$$

Durch die Substitution $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ erhält man ferner eine Relation zwischen 12 Thetacuben, in welcher man dann je drei als Coeffizienten auftretende Thetaprodukte gleich machen kann, indem man $\varrho_1 = \mu_1$, $\varrho_2 = \mu_1^2$ setzt; das gibt:

$$
\text{(VI')} \quad \left\{ \begin{aligned}
&\vartheta(0)\,\vartheta(\mu_1)\,\vartheta(\mu_1^2) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=2} \tau^{\mu_\beta|\alpha}\tau^{2|\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\mu_\beta)(u) \\
&= \vartheta(\alpha_1)\,\vartheta(\alpha_1\mu_1)\,\vartheta(\alpha_1\mu_1^2) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=2} \tau^{2|\alpha_1+\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\alpha_1\mu_\beta)(u) \\
&+ \vartheta(\alpha_2)\,\vartheta(\alpha_2\mu_1)\,\vartheta(\alpha_2\mu_1^2) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=2} \tau^{2|\alpha_2+\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\alpha_2\mu_\beta)(u) \\
&+ \vartheta(\alpha_3)\,\vartheta(\alpha_3\mu_1)\,\vartheta(\alpha_3\mu_1^2) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=2} \tau^{2|\alpha_3+\mu_\beta|}\,\vartheta^3(\alpha_3\mu_\beta)(u).
\end{aligned} \right.
$$

Relationen zwischen den Nullwerten der Thetafunktionen lassen sich sowol im allgemeinen Falle als auch im Falle $p = 2$ aus den vorangehenden Relationen direkt ableiten, indem man $u = 0$ setzt.

Schlussbemerkung. Bezüglich der in § 9 aufgestellten Fundamentalformeln mag noch bemerkt werden, dass Formel (11) pag. 355 identisch ist mit der sogenannten Riemann'schen Thetaformel für Drittelcharakteristiken, wie sie die Herren Prym und Krazer im 3. Band der Acta mathematica pag. 271 angaben; man kann sie auch der Form nach leicht in dieselbe überführen, indem man $a—v_\lambda = -u_\lambda'$, $u—b_\lambda = u_{\lambda+3}'$, $u—v_\lambda = v_\lambda'$, $a—b_\lambda = -v_{\lambda+3}'$, $\lambda = 1, 2, 3$, und $(\varrho_1) = (0)$ setzt.

Desgleichen enthält die Formel (10) pag. 354 die Analoga zu den von Jacobi für $p = 1$ (Werke, Band I) und von Rosenhain für $p = 2$ (Preisschrift) und den Modul 2 abgeleiteten Fundamentalformeln, wie ich gelegentlich auszuführen gedenke.

Ferner erkennt man, dass die Methoden, welche uns die Fundamentalformeln der §§ 9 und 12 für Drittelcharakteristiken lieferten, sofort auf n-tel Charakteristiken ausgedehnt werden können.

München im Februar 1887.

Ueber

künstlich deformirte

Schädel und Gehirne von Südseeinsulanern

(Neue Hebriden)

von

N. Rüdinger.

Mit 3 Tafeln, enthaltend 11 Figuren.

Vorbemerkung.

Künstlich verunstaltete Schädel verschiedener Völker wurden in älterer und neuerer Zeit vielfach untersucht und beschrieben. Ueber die Gehirne aus solchen deformirten Köpfen, welche äusserst schwer zu gewinnen sind, sowie über die nachtheilige Beeinflussung der Hirnfunctionen, die die künstliche Verunstaltung in vielen Fällen unzweifelhaft hervorrufen mag, liegen keine verlässigen Beobachtungen vor. Die Angaben einiger neuerer anthropologischer Schriftsteller, nach welchen die Kopfdiformitäten keine nachtheiligen Folgen für die Gehirnfunktionen haben sollen, müssen zur Zeit als Meinungsäusserungen ohne thatsächliche Unterlagen angesehen werden. Zwei tüchtige junge Aerzte, welche in München geboren und in der hiesigen Schule gebildet wurden, hatten bei ihren weiten Seereisen so grosses Interesse für wissenschaftliche Fragen, dass dieselben neben Anderem auch das eroberte anthropologische Material sorgfältig conservirten, und dasselbe nach ihrer Rückkehr der hiesigen anthropologischen Sammlung zum Geschenk machten. Dem schon verstorbenen Dr. Friedrich verdanken wir eine Anzahl künstlich deformirte Schädel von Eingeborenen der Neuhebriden und Herr Dr. E. Schneider ergänzte dieselben aus den gleichen Quellen und diesem energischen Collegen ist es auch gelungen, ein Gehirn aus einem hochgradig deformirten Kopfe an Ort und Stelle zu exenteriren und ohne wesentliche Formveränderungen gut conservirt nach München zu bringen.

Dieses Präparat veranlasst mich die Ergebnisse der Untersuchung desselben mit Berücksichtigung einiger Merkmale niederer Racen, welche die Schädel der Südseeinsulaner darbieten, begleitet mit einigen Abbildungen hier vorzulegen. Mit Vergnügen benütze ich diese Gelegenheit, genannten Herren den besten Dank für diese werthvolle Bereicherung unserer Sammlung zum Ausdruck zu bringen. —

Was die eigenen Untersuchungsresultate dieser deformirten Schädel anlangt, so mögen dieselben die vorhandenen reichen Ergebnisse, welche durch deutsche, französische und englische Forscher, insbesondere durch die klassische Arbeit Virchow's in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften (Ueber einige Merkmale niederer Menschenracen am Schädel. 1875) bekannt geworden sind, ergänzen. Die Besprechung des Hirns aus einem deformirten Kopfe eines Erwachsenen hat, soweit ich die Literatur übersehe, keine Vorläufer, abgesehen von dem von Zuckerkandl beschriebenen deformirten Hirn eines Neugeborenen, bei welchem eine Verunstaltung des Hirnschädels durch Druck von Seite der Uteruswand zu Stande kam. —

I. Die deformirten Schädel der Neuhebridenbewohner.

Alle die mir vorliegenden künstlich umgeformten Köpfe haben eine in sagittaler Richtung gegen die Scheitelgegend stark aufsteigende Cylinderform erlangt; dieselben sind an der Stirnregion von geringerem Umfang, als in der Parietal- und Occipitalgegend, wohin das Gehirn in Folge des vorn ausgeübten Druckes entweichen musste. Die lange cylindrische Schädelform ist durch allseitige kreisförmige Umschnürung zu Stande gekommen, welche von der Stirne und dem Nacken ihren Anfang nahm und dann so weit als möglich nach oben und hinten fortgesetzt wurde. Die umgeformten Schädel der Eingeborenen der Neuhebriden unterscheiden sich ganz wesentlich von den Flachkopf-Indianern Nordamerikas. Sie stimmen in ihrer Form auffallend überein mit einem mir vorliegenden Schädel, der angeblich aus Chili stammen soll. Ich bekam denselben von meinem verstorbenen Freunde Eduard Steinheil, der ihn in Chili von einem Arzt zum Geschenk erhielt. Dieser besitzt ebenfalls eine, selbst noch längere nach der Occipital - Scheitelgegend aufsteigende Cylinderform. An diesem Schädel sowohl, wie auch bei der Mehrzahl der künstlich umgeformten Schädel von Eingeborenen der Neuhebriden ist die Veränderung so hochgradig, dass bei einer Aufstellung derselben in der deutschen Horizontalen die Mitte der Kranznaht und der Vorderrand des Foramen occipitale magnum fast in einer frontalen Ebene sich befinden (S. Fig. 2), woraus hervorgeht, dass die mechanische Einwirkung auf den Hirnschädel viele Jahre hin-

durch stattgefunden haben muss, um endlich eine so hochgradige Umformung zu Stande zu bringen. Alle die formellen Abweichungen der einzelnen Knochen, der Nähte, der Spalten, der Oeffnungen und der äusseren Gehörgänge von der Norm können nur als Folge der gewaltsamen Einwirkungen angesehen werden.

1. Die formellen Eigenthümlichkeiten der einzelnen Knochen und Nähte der deformirten Hirnschädel.

Das schmale Stirnbein dieser Schädel ist gegen seine Vereinigungsstelle mit der Sagittalnaht bedeutend verlängert, so dass die Kranznaht schief nach hinten und oben stark aufsteigt. Die Tubera frontalia erscheinen verwischt und das Stirnbein an einzelnen Schädeln etwas gegen die Schädelhöhle eingedrückt, so dass ein zweifacher frontal gestellter Sattel am Schädeldach vorhanden ist, der eine in der Mitte der Pars frontalis des Stirnbeines mit Verwischung der Tubera frontalia und der andere an und hinter der Kranznaht. Unter den sieben von den Neuhebriden stammenden Schädeln befindet sich einer, an welchem eine grösstentheils grob gezackte Sutura frontalis erhalten blieb. Die Arcus superciliares sind theils glatt, theils stark wulstig vorspringend, als Resultat weiter Stirnhöhlen.

An zwei Schädeln dagegen hat die ganze Stirnregion und ihr Uebergang zu der Nasenwurzel, sowie die beiden oberen Augenhöhlenränder eine auffallende Aehnlichkeit mit den Schädeln von ägyptischen Mumien, auf welche ich bei der Besprechung des Gesichtsschädels noch zurückkommen werde. Einige von diesen Schädeln besitzen lateralwärts an der Pars orbitalis ossis frontis die von H. Welcker beschriebenen Cribra orbitalia in grösserer, andere in geringerer Anzahl. Einzelne jedoch haben am Dach der Augenhöhle eine vollständig glatte Beschaffenheit.

Die Scheitelbeine zeigen, wie bei allen stark dolichocephalen Schädeln, eine rhomboide Form mit einem langgestrekten und spitzen Angulus sphenoidalis, einem stark schief aufsteigenden Margo frontalis und Margo occipitalis. Man sollte glauben, dass die Sulci arteriosi für die Zweige der Art. meningea media in Folge des andauernden Druckes auf den Schädel tiefer sein müssten, als unter normalen Verhältnissen;

allein die geöffneten Schädel lassen, wie es scheint, nur individuelle Verschiedenheiten in dem Verhalten der Arterienfurchen erkennen.

Die Durchschnitte durch die Scheitelbeine, das Stirn- und Hinterhauptsbein ergeben verhältnissmässig dünne Knochen mit gut ausgebildeter Diploë und mässig dicken kompakten Lamellen.

Das Hinterhauptsbein ist charakteristisch dadurch, dass seine Schuppe nur geringgradig gekrümmt erscheint. Dieselbe steigt von der hinteren Umrandung des Foramen occipitale magnum bis zur Mitte der Lambdanaht gleichmässig schief aufwärts, indem die Mitte der Lambdanaht mit den angrenzenden Scheitelbeinen den hintersten abgerundeten Abschnitt des oben erwähnten zum Cylinder umgeformten Hirn-Schädels darstellt. Die Protuberantia occipitalis externa ist nach abwärts gerichtet und sie stellt nur bei einem jugendlichen Schädel, dessen Sphenooccipital-Fuge weit offen steht, den hintersten Punkt desselben dar, während an den stark umgeformten Köpfen nicht einmal der oberste Rand der Pars occipitalis ossis occipitis das hinterste Ende des Schädels bildet. Die Hinterhauptschuppe wird an einem der vorliegenden Schädel durch die bedeutend umgeformten und stark gekrümmten Parietalbeine überragt und es sind an demselben die Stellen, welche die Foramina parietalia einschliessen, zu der hintersten Schädelgrenze geworden. An diesem erwähnten Schädel und an einem zweiten gracilen Exemplar zeigen sich auch sattelförmige Impressionen, welche sich an der lateralen Fläche nach den Scheitel-Impressionen fortsetzen und unzweifelhaft als das Resultat der ringformigen Einschnürung des Kopfes zu betrachten sind. Die starken männlichen Schädel, welche mit kräftig entwickelten Occipitalleisten, erzeugt durch die Nackenmuskulatur, versehen sind, zeigen diese Impressionen nur in geringerem Grade. Der von A. Ecker zuerst beschriebene und von B. Hagen an den Schädeln der Münchener Sammlung geprüfte Torus occipitalis zeigt sich an drei der vorliegenden Schädeln ein- oder zweihöckerig ausgebildet, wie er nur ausnahmsweise bei anderen Racen auftritt und immerhin auch als Merkmal niederer Race aufgefasst werden mag.

An der Pars basilaris ossis occipitis und den beiden Partes condyloideae mit ihren Oeffnungen kann ich keine stark in die Augen fallenden formellen Veränderungen wahrnehmen. Nur ein kräftiger männlicher Schädel, an welchem die rechte Umrandung des Foramen magnum einen

Defekt zeigt, befindet sich nach vorn und unten am grossen Hinterhauptsloche eine querovale glatte Vertiefung, welche kaum anders, als eine mit der Spitze des Zahnfortsatzes in Verbindung gewesene Artikulationsfläche gedeutet werden kann. Ein dem Processus paramastoideus des Hinterhauptes homologer Fortsatz, wie er bei Nagern und Hufthieren auftritt, zeigt sich an den deformirten Schädeln nicht mehr und nicht weniger entwickelt, als bei den Schädeln der übrigen Menschenracen.

Die hintere Zone der Basis cranii erhält in Folge der Schiefstellung der Pars occipitalis ossis occipitis einen von den künstlich nicht umgeformten Schädeln sehr abweichenden Habitus, darin bestehend, dass die durch die Kleinhirnhemisphären bedingte, nach aussen gerichtete, Wölbung kaum angedeutet erscheint. Man darf für die Schuppe des Os occipitis sagen, dass das glatte Planum occipitale und das unebene Planum nuchae ebenso wie die beiden Fossae cerebri und cerebelli nicht übereinander, sondern hintereinander angebracht sind.

An der übrigen Basis cranii sind keine wesentlichen formellen Abweichungen nachweisbar. Die Pars basilaris ossis occipitis, die Körper der Keilbeine und die Pars petrosa zeigen etwas geringere Dimensionen, als an normalen Schädeln von verschiedenen Racen und ohne auf die einzelnen Maasse, die ich an verschiedenen Stellen genommen habe, näher einzugehen, kann ich hervorheben, dass die formellen Aenderungen durch das Augenmaass taxirt werden können. So fällt zunächst die Verkleinerung der mittleren und vorderen Schädelgrube auf. Die erstere erscheint dadurch etwas verengert, dass der kleine Keilbeinflügel, besonders an seinem lateralen Abschnitt, nach hinten stark vorspringt und der Schläfenlappen somit jederseits tief unter demselben verlarvt war. Die vordere Schädelgrube ist in sagittaler Richtung kurz und vorn auffallend schief nach aufwärts gerichtet. Die linke laterale Nische derselben, in welcher der untere Abschnitt der dritten Stirnwindung Aufnahme findet, erscheint viel tiefer als rechts, aber klein und scharf begrenzt.

Der Türkensattel ist verschieden je nach dem Alter der Individuen; eine wesentliche Umformung hat an demselben nicht stattgefunden. Die Wirkung der Compression erstreckte sich nicht auf die Körper der Schädelwirbel, denn wie schon angegeben wurde, zeigen die beiden Keil-

beinkörper und die Pars basilaris ossis occipitis den geringsten Grad formeller Aenderungen.

Von besonderem Interesse erscheint das Schläfenbein mit seinem etwas plattgedrückten Meatus auditorius externus osseus, und dem terromorphen Processus frontalis der Schläfenbeinschuppe[1]). Was zunächst den äusseren Gehörgang anlangt, so wird man bei einer vergleichenden Betrachtung einer grösseren Zahl von künstlich umgeformten und normalen Schädeln zu der Annahme geführt, dass die formelle Beschaffenheit desselben sehr variabel ist und diese Verschiedenheit in der Tiefe und Weite ist schon bei den sieben Schädeln der Neuhebridenbewohner zu konstatiren. Allein an einzelnen Schädeln erscheint die vordere Wand bedeutend verdünnt, ist daher auch theilweise weggebrochen und der Gang von vorn nach hinten zweifellos verengert. Dass ein hoher Grad der Umformung auch den äusseren Gehörgang in Mitleidenschaft zieht, haben schon Welcker und J. Lenhossék nachgewiesen. Die Betrachtung des Schädels aus Chili, welcher den höchsten Grad künstlicher Verunstaltung zeigt, ergibt auch einen von vorn nach hinten stark zusammengedrückten Gehörgang. Den höchsten Grad der Verengerung der beiden äusseren Gehörgänge jedoch zeigt der Schädel eines Peruaners unserer Sammlung, an welchem theils durch direkten Druck, theils durch Knochenwucherung in Folge des Druckes eine fast vollständige Verschliessung stattgefunden hat. Ein ovaler Knochenvorsprung geht von der hinteren Wand des äusseren Gehörganges symmetrisch auf beiden Seiten aus und bedingt eine so hochgradige Verengerung desselben, dass man nur mit Hilfe einer Schweinsborste in die Paukenhöhle gelangen kann. Im Leben konnten bei diesem Individuum keine Schallwellen durch den äusseren Gehörgang einfallen, weil die jetzt vorhandenen schmalen Spalten durch die Hautschichten ohne Zweifel ganz erfüllt waren.

---

1). Virchow hat die variabeln Formen von 9 Schädeln beiderseits abgebildet. Die Schädel, welche zu den Abbildungen verwendet wurden, sind verschiedener Abstammung.

Der Processus frontalis des Schläfebeines und die Stenokrotaphie der deformirten Schädel.

Schon Virchow[1]) hat in seiner eingehenden Abhandlung über die Merkmale niederer Racen den Processus frontalis der Schläfenbeinschuppe an den Schädeln der Eingeborenen der Neuhebriden als eine häufig vorkommende Bildung erwähnt. Allein auffallend erscheint es, dass unter den sieben mir vorliegenden Exemplaren sechs derselben den Processus frontalis der Schuppe beiderseitig in verschiedenem Grade der Ausbildung besitzen. Nur ein Schädel (No. I), welcher oben als gracil bezeichnet wurde und dessen Stirnregion Aehnlichkeit mit den Schädeln der ägyptischen Mumien hat, zeigt die normale Beziehung des grossen Keilbeinflügels zu dem Sphenoidalwinkel des Scheitelbeines beiderseits. Das verschiedene Verhalten des Processus frontalis soll hier nur kurz berührt werden. Derselbe tritt in zwei eigenthümlichen Formen auf; entweder ganz einfach oder im Verein mit Schaltknochen. Bei dem einfachen Verhalten des Processus frontalis tritt an jener Stelle, wo der grosse Keilbeinflügel endet, ein Fortsatz aus der Schuppe hervor, welcher in seiner Breite mit der er das Stirnbein erreicht, zwischen 5 und 19 mm schwankt. Selbst an dem siebenten Schädel, wo die grossen Keilbeinflügel und die Sphenoidalwinkel der Scheitelbeine mit einander in Verbindung stehen, sind beiderseits die Processus frontales symmetrisch angelegt und dadurch die abgerundeten Ränder der beiden Schuppen unterbrochen, allein die gegenseitige frühzeitige Vereinigung des Sphenoid und Parietale hinderte unzweifelhaft die Entwicklung des Stirnfortsatzes der Schläfenbeinschuppe.

Eine weitere variable Bildung in der unmittelbaren Nähe des Processus frontalis auf der einen oder auf beiden Seiten besteht in dem Auftreten eines oder mehrerer Schaltknochen — Ossa intercalaria temporofrontalia. — Sie treten einfach und mehrfach am oberen Rande des Processus frontalis auf und reichen an einzelnen Schädeln auch noch weiter rückwärts bis an den oberen Rand der Schläfenbeinschuppe. (S. Taf. I, Fig. 1 u. 3).

1) Ueber einige Merkmale niederer Menschenrassen am Schädel. Abhandlungen der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1875. S. 227. Virchow's 6 Schädel stammen: 1. Australier von Neu-Süd-Wales; 2. Moderner Philippinen-Schädel von Manilla; 3. Moderner Schädel eines Eingeborenen von Sama (Philippinen); 4. Schädel einer Magyarin; 5. u. 6. Zwei Schädel von St. Remo. Die übrigen 6 Figuren der Tafel III sind verschiedenen Völkern entnommen.

Man begegnet diesen Schaltknochen am oberen Ende des grossen Keilbeinflügels, wie schon Virchow[1]) nachwies, auch bei dem Studium der Schädel anderer Racen, allein verhältnissmässig viel seltener, als bei den Köpfen der Bewohner der Neuhebriden. Es müssen bei diesen an der Regio temporalis Ursachen eingewirkt haben, welche die rechtzeitige Vereinigung der normalen Knochenränder hinderten und so die Möglichkeit für die Bildung neuer Knochenkerne gegeben war. Es liegt wohl am nächsten, diese Ursachen in einer direkten Beeinträchtigung des Knochenwachsthums zu suchen, welche bedingt wurde durch den dauernden allseitigen Druck. Dass dieser Druck von der Stirn- zur Hinterhauptsgegend mit Einschluss der Regio temporalis stattfand, geht aus der Betrachtung der Schädel hervor, an welchen die vordere sattelförmige Rinne von der Stirn aus über die Schläfengegend nach dem unteren Abschnitt des Hinterhauptes hinzieht.

Ob diese angenommene Beeinträchtigung des Knochenwachsthums auch als Ursache für das so häufige Auftreten der Processus frontales an den Schädeln der Neuhebriden-Bewohner angesehen werden kann, mag dahin gestellt bleiben. Bei der Betrachtung der diformen Augenhöhle werde ich noch einmal auf diese Frage zurückkommen. Von sieben Schädeln haben sechs die Stirnfortsätze; aber auch an dem siebenten sind dieselben, wie schon erwähnt, angedeutet, wenn auch nur im rudimentären Zustande. Hier muss noch auf die interessante Thatsache hingewiesen werden, dass die erwähnte Bildung an einer Anzahl von Schädeln, welche Virchow, J. Ranke beschrieben haben, vorkommt, ohne nachweisbare vorausgegangene künstliche Veränderung der Köpfe. Das Vorhandensein des Processus frontalis an den Schädeln der Bewohner der Neuhebriden berechnet sich nach meinen Exemplaren auf 100 %, ist folglich bei diesen eine normale Bildung. Was die oben angedeutete Entstehungsursache der Ossa intercalaria temporo-frontalia und auch die des Processus frontalis selbst anlangt, so darf man die mechanischen Einwirkungen und das hierdurch beeinträchtigte Knochenwachsthum nicht als das einzige Moment ansehen, weil man dasselbe auch für die Thiere, bei denen der Frontalfortsatz als normale Bildung auftritt, geltend machen könnte. Der Processus frontalis ist bei vielen Thieren eine normale Erscheinung,

1) Virchow l. c.

tritt aber derselbe beim Menschen auf, so bezeichnen wir dies als Ausnahme von dem Bildungsgesetz und findet sich für diese Ausnahme kein plausibler Grund vor, so sind wir gegenwärtig schon daran gewöhnt worden, zu sagen, es läge hier eine atavistische Erscheinung vor.

Bei den Bewohnern der Neuhebriden müssen wir diese bei andern Schädeln atavistische Bildung wieder als Norm betrachten, weil dieselbe bei 100% der Vervölkerung auftritt und sich unverändert vererbt. Virchow hat den Processus frontalis mit Recht zu den Merkmalen niederer Racen gerechnet und kein anderes Merkmal am Schädel derselben ist charakteristischer, als diese Beziehung des Schläfebeins zum Stirnbein und wenn wir diesem Merkmal einen hohen Werth beilegen, so müssen wir die Bewohner der Neuhebriden zu den niedersten Racen stellen, denn keine andere Race besitzt diese terromorphe Bildung so ausgesprochen und so allgemein verbreitet, als die genannte.

Hier sei auch noch erwähnt, dass der künstlich hochgradig verunstaltete Schädel aus Chili, sowie die in meinem Besitz befindlichen mechanisch veränderten Schädel der Flachkopf-Indianer und jene diformen Schädel, welche Gosse, Virchow, A. B. Meyer u. A. beschrieben und abgebildet haben, nur ausnahmsweise Frontalfortsätze zeigen, woraus hervorgeht, dass die mechanischen Einwirkungen am Kopfe nicht die alleinige Ursache der Vereinigung des Schläfebeins mit dem Stirnbein sein können.

Die Stenokrotaphie an den Schädeln von den Neuhebriden. (S. T. I, Fig. 1.)

Die Schläfenenge steht an den vorliegenden Schädeln genau im Verhältniss zu dem Grad der Diformität derselben. Je bedeutender die Verunstaltung ist, um so mehr zeigt sich der grosse Keilbeinflügel in seiner Entwicklung zurückgeblieben oder zu einer vertikal gestellten, nach aussen concaven Rinne umgewandelt, daher auch der einfache Durchmesser desselben von vorn nach hinten nicht seine wirkliche Grösse ausdrückt. Diese kann nur durch die Messung seiner Oberfläche zum Ausdruck gelangen. Trotzdem auch an den Schädeln der Eingeborenen der Neuhebriden individuelle Verschiedenheiten vorhanden sind, so ist doch die Stenokrotaphie an ihnen eine auffallende Thatsache und sie kann auch noch dadurch eine Bestätigung erfahren, dass an allen künstlich umgeformten Schädeln die Entfernung der äusseren Ohr-

öffnung von der Naht zwischen Joch- und Stirnbein geringer gefunden wird, als an normalen Schädeln. Die Stenokrotaphie ist hier durch eine Wachsthumsbeschränkung des grossen Keilbeinflügels entstanden. An normalen Schädeln beträgt der Querdurchmesser des grossen Keilbeinflügels durchschnittlich etwas über 20 mm; an den Schädeln von den Einwohnern der Neuhebriden dagegen nur 15 mm im Mittel. Abgesehen von der rinnenartigen Vertiefung ergab sich auch bei der Bestimmung der Oberfläche des grossen Keilbeinflügels ein geringerer Grad der Ausbildung, als an normalen Schädeln. Besonders in die Augen fallend ist die mehr oder weniger rechtwinkelige Knickung an der Crista alae magnae, so dass der Abschnitt oberhalb derselben mehr vertikal, jener unterhalb mehr horizontal gestellt ist, während an normalen Schädeln auch die unter der Leiste angebrachte Knochenfläche eine schiefe Stellung einnimmt. Die künstliche Verunstaltung lässt fast an allen Schädeln eine ziemlich bedeutende Schläfenenge erkennen und diese geht Hand in Hand mit der Verkleinerung der ganzen vorderen Schädelgrube. Die ringförmige Umschnürung des Kopfes, welche vorn beginnt, bringt hier eine grössere Umformung zu Stande, als hinten, wohin das Grosshirn in Folge des Druckes entweicht.

Was die Abdrücke der Hirnwindungen an der Innenfläche des Schädels anlangt, so findet man an einem Exemplar eine ganz glatte Beschaffenheit, an einem anderen dagegen so deutlich markirte Impressiones digitatae und Juga cerebralia, wie an normalen Objekten. Da die Schädeldiformität in dem jugendlichen Alter zu Stande gebracht wird, so werden zu dieser Zeit auch die einzelnen Windungsgruppen in ihrer Entfaltung beeinträchtigt sein, während in späteren Jahren ein weiteres Wachsthum der Hirnwindungen mit Anpassung des Schädeldaches an dieselben wahrscheinlich ist. Findet die Entfaltung der Gehirnoberfläche noch in späteren Jahren statt, so werden die Juga cerebralia an der Basis cranii sowohl, als auch am Schädeldach sich verstärken.

In der folgenden Tabelle habe ich die Capacität der Schädel von den Eingeborenen der Neuhebriden zusammengestellt und obschon einige mit geringer Capacität unter denselben sind, zeigen andere sogar eine bedeutende. Gleichzeitig habe ich auch die Capacität der Flachkopfindianer angereiht, aus der ebenfalls zu entnehmen ist, dass diese mecha-

nischen Einwirkungen am Schädel, selbst bei dem Zustandekommen einer bedeutenden Formveränderung nicht nothwendig den Schädelbinnenraum beeinträchtigen müssen, sondern durch Compensation an der Scheitel- und Hinterhaupts-Gegend nur eine Verlängerung der einzelnen Hirnlappen und deren Windungsgruppen stattfindet.

Schädelcapacität.

Schädel.		Capacität.
I.		1150 Cc.
II.		1190 „
III.		1130 „
IV.		1230 „
V.		1280 „
VI.		1380 „
VII.		1450 „
VIII.	aus Chili	1500 „
A.	Flachkopfindianer aus Columbia	1350 „
B.	„ „ Ancona	1400 „
C.	„ „ „	1440 „

Die Schädelcapacität ist an den mir vorliegenden Exemplaren auffallend verschieden. Dieselbe schwankt bei den Eingeborenen der Neuhebriden zwischen 1130—1450 Cc. und dieselbe wird nur übertroffen von jener des hochgradig verunstalteten Schädels aus Chili, welcher 1500 Cc. besitzt. Verglichen mit der Capacität anderer Racen, wie sie Hudler von der Münchener Sammlung festgestellt hat, ergibt sich folgendes mittlere Verhältniss:

Kaukasier	1461,8
Mongolen	1487,3
Aethiopier	1304,7
Amerikaner	1422
Malayen	1444
Schädel der Neuhebridenbewohner	**1258**,4
Schädel der Flachkopfindianer	1396,2

Wollte man bei der Bestimmung der Capacität dieser Schädel eine Ausscheidung nach dem Geschlecht machen, so müsste man in einige Verlegenheit gerathen, denn die feineren Formdifferenzen am Hirn- und

Gesichtsschädel gehen in Folge der mechanischen Einwirkungen verloren und man kann daher die Schädel nach dem Geschlecht schwer unterscheiden. Die beiden Schädel, welche ich in I und II angeführt habe, sind so gracil gebaut, dass man geneigt sein könnte, dieselben für weibliche zu halten; allein jener No. II zeigte den Verlust der beiden medialen Schneidezähne im Oberkiefer, welche meines Wissens doch nur bei Männern als Zeichen der Mannbarkeit und der Kriegstüchtigkeit ausgezogen werden. Ist auch der Processus alveolaris an der betreffenden Stelle vernarbt und zugeschärft, so muss man diese Schädel doch, weil die Spheno-occipitalfuge nicht verknöchert und die Zahnkronen an dem einen derselben sehr rein erhalten sind, für jugendliche Männerschädel halten. Stammen diese sieben Schädel alle von Männern ab, so erscheint die festgestellte hochgradige Verschiedenheit in der Capacität als eine auffallende Thatsache, welche meiner Meinung nach nicht nur auf individuelle Unterschiede, sondern auch auf die Grade der mechanischen Einwirkungen zurückgeführt werden darf.

Bei näherer Ueberlegung ist es nicht auffallend, dass die verunstalteten Schädel der Neuhebridenbewohner eine geringere Capacität zeigen als jene aller übrigen Racen und selbst eine geringere als die Schädel der Flachkopfindianer. Bedenkt man nämlich, dass bei den letzteren der Druck nur von zwei Seiten, von der Frontal- und Occipitalgegend aus, einwirkt und bei der Verdrängung des Gehirns eine vielseitigere compensatorische Ausgleichung möglich ist, als bei der ringförmigen Umschnürung der Köpfe der Neuhebridenbewohner, so dürfte die geringe Capacität der Schädel dieser doch ihre Erklärung in der Methode der Umformung finden. Die letztere Annahme wird um so wahrscheinlicher, als auch A. B. Meyer[1]) an den im Dresdener Museum befindlichen deformirten Schädeln eine geringe Capacität nachgewiesen hat. Die 17 von A. B. Meyer gemessenen Schädel haben zusammen eine mittlere Capacität von 1284 Cc. Die geringste (1043 Cc.) misst ein weiblicher Schädel aus Frankreich, dann folgt ein Patagonier mit 1120 Cc., ein Peruaner mit 1140 Cc. und die grösste Capacität hat ein Schädel mit der Bezeichnung Lanang Samar, welcher auf 1510 Cc. bestimmt wurde.

---

1) Ueber künstlich deformirte Schädel von Bornea und Mindanáo etc. Leipzig u. Dresden 1881.

Diese übereinstimmenden Ergebnisse an den Dresdener und den Münchener deformirten Schädeln sprechen unzweifelhaft dafür, dass die dauernde Umschnürung des Kopfes eine Wachsthumbeschränkung des Hirnschädels mit Verringerung der Capacität zur Folge hat.

Die Schädelnäthe.

Die Beschaffenheit der Nähte an den verbildeten Schädeln kann nicht gut zur Beantwortung allgemeiner Fragen herangezogen werden, weil die Persistenz der einen oder die Synostose der andern Naht gewiss auch beeinflusst wurde durch die gewaltsamen Einwirkungen am Kopfe, die in ihren Folgen als etwas Pathologisches anzusehen sind.

Die verschiedenen Nähte haben nur an einzelnen Schädeln mehrere Eigenthümlichkeiten. Allein dieselben sind kaum hoch anzuschlagen; denn man weiss, wie bedeutend die Nähte im Allgemeinen formell variiren können. Die Uebergänge zwischen der einfachen Verbindung zweier rauher Knochenränder bis zur zierlichen Zackenbildung in der Kranz- oder Lambdanaht sind ja nach Race, Geschlecht und Alter sehr verschieden. Als etwas Auffallendes kann jedoch an den umgeformten Schädeln bezeichnet werden: 1. Die Synostose in der Sutura coronalis und sagittalis und 2. das Vorhandensein zahlreicher Ossa intercalaria.

Bei dem Schädel Nr. III ist der linke Schenkel der Kranznaht verwachsen, bei IV der rechte, obschon die Kauflächen der Molarzähne auf ein nicht hohes Alter des Individuums hinweisen. Nr. V und VII haben kleine Synostosen auf der Scheitelhöhe. Diese Nahtverschmelzungen, welche nur vorn und oben am Schädel auftreten, kann ich nicht mit Gratiolet als ein typisches Merkmal niederer Racen deuten, sondern muss sie auch als Resultat der mechanischen Einwirkungen, welche bekanntlich Jahre hindurch stattfinden, betrachten.

Die Ossa intercalaria.

Abgesehen von den schon erwähnten Schaltknochen an der ehemaligen lateralen vorderen Fontanella [1]) der künstlich umgeformten Schädel, welche

1) Virhow hat in Taf. III, Fig. 1—6 eine Anzahl Schaltknochen an der Schläfenfontanella abgebildet.

nach Form und Bezeichnung zu den benachbarten Knochen gewiss keinen Postfrontalia niederer Thiere entsprechen, treten bei vier dieser Schädel Schaltknochen in der Sutura lambdoidea in verschiedener Zahl auf. An dem Schädel, welcher mit Nr. II bezeichnet ist, sind etwa 23 Ossa intercalaria von wechselnder Grösse vorhanden. Bei Nr. III sind zwei zu beiden Seiten des Interpariatale angebracht, welche eine symmetrische Beschaffenheit zeigen. An Nr. V zähle ich 20 ziemlich grosse Stücke, welche mit zierlichen Zacken in die Parietalia und in die Interparietalia eingreifen und Nr. VI besitzt etwa 22—24 theils längliche, theils kreisrunde Schaltknochen.

Die grössten Schaltknochen liegen zwischen der Occipitalschuppe, dem Warzentheil des Schläfebeins und den Parietalia.

Dass die Ossa intercalaria bei allen Racen in der Lambdanaht am zahlreichsten vorkommen, ist eine längst festgestellte Thatsache; allein in dem erwähnten Verhältniss, wie an den vorliegenden sieben deformirten Schädeln der Neuhebridenbewohner, von welchen jeder in der Lamdanaht Schaltknochen besitzt, treten dieselben nicht auf. Fasst man die Art der Umformung des Kopfes ins Auge, so liegt es nahe, dass bei der reifförmigen Umschnürung desselben von der Stirne nach hinten und dem Nacken aus eine blasige Hervorwölbung des Hirnschädels nach rückwärts stattfinden muss. Während demnach an der vorderen Hälfte des Hirnschädels die einzelnen Knochen gegen einander gedrängt werden, müssen dieselben rückwärts in Folge der blasenförmigen Spannung, welche von der Höhle des Schädels ausgeht, von einander ferne gehalten werden und gleichwie sich an einem hochgradig hydrocephalischen Schädel in fast allen Nähten Schaltknochen ablagern, so auch hier an den künstlich umgeformten Schädeln in der Occipitalgegend, welche sich ebenso zu dem verdrängten Gehirn, das wie Grashey nachwies, nur eine minimale Compressibilität besitzt, verhält, wie die Mehrzahl der Nähte des Schädels bei einem hochgradigen Hydrocephalus. Von Interesse bleibt es jedoch immerhin, dass der aus Chili stammende verunstaltete Schädel weder eine Synostose, noch einen Schaltknochen zeigt. — Virchow hält die Schaltknochen an der Stelle der Schläfenfontanelle und in den benachbarten Nähten weder für eine Bedingung noch für ein Hinderniss der Schläfenenge. Was die Schaltknochen an anderen Schädelgegenden anlangt, ist Virchow

der Anschauung, dass dieselben nicht nur Folge einer durch Binnendruck erzeugten Ausdehnung des Schädeldaches seien, sondern sie seien auch, entstanden durch eine vermehrte Organisation mit zahlreicheren Ossifikationen, fähig eine Gegend zu beengen.

2. Die künstlichen Veränderungen des Gesichtsschädels.

Die mechanischen Einwirkungen an dem Hirnschädel üben auch auf den Gesichtsschädel, insbesondere auf dessen oberen Abschnitt, einen formverändernden Einfluss aus. Am meisten betheiligt ist hiebei die knöcherne Umrahmung der Augenhöhle, die Pars nasalis des Stirnbeins und das Höhenwachsthum des Siebbeins, nebst einer Verengerung der Augenhöhlenspalten.

Der Gesichtswinkel erfährt eine Veränderung, indem die Stirn mit der Pars nasalis sich nicht normal entwickeln können und dadurch das ganze Gesichtsskelet eine mässig prognathe Form erhält. Wie die Figuren I und II erkennen lassen, erhält der Gesichtswinkel durch die mechanische Umformung des Gesichtsschädels und wesentlich durch die Schiefstellung der Basis cranii mit Beeinflussung des Sattelwinkels, eine Abweichung von der Norm. (Bei Nr. V misst derselbe 76^0, bei Nr. VII 84^0). Das ganze Gesichtsskelet besitzt von der Vorderfläche desselben bis zu den beiden Processus pterygoidei eine so starke Schiefstellung, dass der Gesichtswinkel eine dem Grade der Verunstaltung entsprechende Veränderung erfährt. Wenn die verunstalteten Schädel eine hochgradige Prognathie zeigen, so kann dieselbe nicht als ein Merkmal niederer Race, sondern nur als Folgezustand der mechanischen Einwirkungen an den Köpfen betrachtet werden. Die Bestimmung der Gesichtswinkel an den diformen Schädeln kann demnach auch keinen besonderen Werth beanspruchen und doch will ich dieselben hier folgen lassen.

Gesichtswinkel.

Neuhebridenschädel	Gesichtswinkel
I.	86^0
II.	89^0
III.	84^0
IV.	84^0
V.	76^0

Neuhebridenschädel	Gesichtswinkel
VI.	82^0
VII.	84^0
VIII. Schädel aus Chili	86^0

Die Veränderungen der Augenhöhlen und ihrer Umrahmung sind ziemlich bedeutende. Die Orbita ist in sagittaler Richtung verkürzt und erscheint nach vorn erweitert, so dass alle ihre Wände leicht übersehen werden können. Sind auch die Augenbrauenbogen und die Oberaugenhöhlenränder etwas gewulstet, so ist dies wesentlich das Resultat der weiten Sinus frontales, welche die Aufblähung von der Pars nasalis des Stirnbeins bis zur Mitte des Margo supraorbitalis bedingen. Die Kürze des sehr dünnen transparenten Daches der Augenhöhle, welche an einigen der deformirten Schädel sehr bedeutend ist, wird hauptsächlich durch die Kleinheit resp. Schmalheit des kleinen Keilbeinflügels, welcher an den Schädeln Nr. I und V geradezu rudimentär erscheint, hervorgerufen. (S. Fig. 2.) Derselbe ist auf beiden Seiten sehr schmal und kurz, das Foramen opticum klein und von oben nach unten etwas plattgedrückt, so dass eine Beschränkung für den durchtretenden Opticus und die Arteria ophthalmica gegeben war. Auch die Orbitalfläche des grossen Keilbeinflügels erscheint kleiner, als an normalen Schädeln und sie wird ersetzt durch die Vergrösserung des Wangen- und Stirnbeins. Das Hauptwiderlager für das Wangenbein stellt an diesen Schädeln nicht der grosse Keilbeinflügel, sondern das Stirnbein dar.

Bei dem Studium des vorderen Sphenoid wird man zu der Vermuthung geführt, dass die mangelhafte Entwicklung des grossen Keilbeinflügels das ursächliche Moment für die Entstehung des oben beschriebenen Processus frontalis des Schläfebeins sei, welcher als Lückenbüsser sich zwischen den Keilbeinflügel und den lateralen vorderen Scheitelbeinwinkel einschieben musste. Reicht der Frontalfortsatz zur Ausfüllung der lateralen vorderen Fontanelle nicht aus, so müssen sich ergänzende Ossa intercalaria entwickeln, um das Fehlende zu completiren. Diese Bemerkungen beziehen sich insbesondere auf die stark deformirten Neuhebridenschädel und sie können auffallenderweise keine Geltung beanspruchen für den hochgradig veränderten Schädel aus Chili und ebensowenig für die Schädel der Flachkopfindianer.

Hand in Hand mit dem verkümmerten Zustande der beiden kleinen und grossen Keilbeinflügel geht die Enge der Fissura orbitalis superior und inferior, welche in natürlicher Grösse in Figura 4 abgebildet sind. Zunächst fällt ihre Asymmetrie in die Augen und dann die Enge der Fissura orbitalis superior, welche lateralwärts durch Annäherung des grossen und kleinen Keilbeinflügels als sehr schmale Spalte auftritt. Der mediale Theil dieser Spalte stellt ein etwas grösseres Dreieck dar, welches zur Passage der Nerven und der Vena ophthalmica dienen musste. Die Fissura orbitalis inferior zeigt die stärkste Verengerung in ihrem medialwärts von dem Eingang in den Canalis infraorbitalis gelegenen Abschnitt. Der laterale vordere Theil ist etwas weiter, bleibt jedoch hinter der Norm zurück. Gerade die Eintrittsstelle des Nervus infraorbitalis und der gleichnamigen Gefässe stellt eine Grenzmarke zwischen dem engeren und weiteren Theil der Unteraugenhöhlen-Spalte dar. Auch die Fossa spheno-palatina hat wesentlichen Antheil an der Raumbeschränkung der Spalten zwischen dem Hirn- und Gesichtsschädel genommen. In dem Augenhintergrunde hat somit eine auffallende Beschränkung des Knochenwachsthums stattgefunden, welche die Pforten für die Optici, die motorischen und sensiblen Nerven nur so weit verengerte, dass diese Nervenbahnen keinen derartigen Druck erfuhren, um in ihren Funktionen beeinträchtigt worden zu sein. Das sehr verschiedene diforme Verhalten der zuletzt erwähnten Knochen und Knochenspalten, welches sich an den Schädeln erwachsener Individuen konstant zeigt, spricht dafür, dass auch noch höhere Grade von Verunstaltungen vorkommen können, Grade, welche eine noch weitere Beschränkung nicht nur der besprochenen Theile des Hintergrundes der Orbita, sondern auch der ganzen Schädelhöhle mit hochgradiger Funktionsstörung wichtiger anderer Organe veranlassen. Diese Fälle gelangen nicht zu unserer Beobachtung, sondern nur jene, welche in der Jugend der mechanischen Umformung des Kopfes Widerstand geleistet haben.

Wie hinten und lateralwärts in der Augenhöhle eine Wachsthumsbeschränkung nachweisbar ist, so hat auch an der medialen Seite derselben das Siebbein eine Beeinträchtigung in seiner Entwicklung erfahren, indem dasselbe kaum die Hälfte der Höhe normaler Siebbeine beträgt. (S. Fig. 4). Die Lamina paryracea stellt nämlich eine sagittal stehende, nur

6 mm hohe Platte zwischen Oberkiefer und Stirnbein dar. Es ist aber nicht nur die laterale Lamina paryracea des Siebbeins allein, welche sich so rudimentär zeigt, sondern das ganze Siebbeinlabyrinth blieb in seiner vertikalen Entwicklung zurück und zwar unzweifelhaft durch den auf die Stirnregion ausgeübten Druck. Auch die Formveränderungen der oberen Muscheln, welche sehr klein erscheinen, der beiden Nasenbeine und der kurzen Processus frontales der Oberkiefer können nur durch die mechanischen Einwirkungen am Hirnschädel entstanden sein.

Was das Oberkiefergerüste betrifft, so erlangt dasselbe an jenen Schädeln, an welchen die beiden medialen Schneidezähne weggenommen wurden, einen eigenartigen Habitus. Da wo die Wurzeln der beiden Schneidezähne waren, entsteht durch Knochenatrophie ein Alveolarrand mit zugeschärften Rändern. Die beiden Oberkiefer sinken bis zur unteren Umrandung der Apertura pyriformis etwas ein, die Spina nasalis schwindet und das Profil erfährt eine Ablenkung, so dass der Gesichtswinkel von den verunstalteten Schädeln, an welchen die medialen Schneidezähne erhalten sind, bedeutend kleiner wird.

Bei dem Zustandekommen der erwähnten Veränderungen am oberen Abschnitte des Gesichtsschädels sollte man glauben, dass auch die Nasenscheidewand eine Ablenkung von der Medianebene erfahren hätte. Allein dieselbe ist an einigen Schädeln ganz senkrecht stehend, an anderen lenkt sie nur wenig nach der Seite ab. Der Grad der Schiefstellung der beiden Processus pterygoidei und des hinteren Randes des Pflugscharbeines geht parallel mit dem Grad der Umformung. Ist diese stark, so stellt sich das ganze Gesichtsskelet schiefer und die Prognathie nimmt ebenso zu, wie die Neigung der Knochenumrandung der beiden Choanen.

Die Unterkiefer, soweit sie vorhanden sind, zeichnen sich aus durch schwache Entwicklung mit etwas eingezogenem Kinn und schiefer Stellung ihrer Aeste, so dass, wie bei allen dolichocephalen Schädeln, ein auch beim Manne stumpfer Angulus maxillae inferioris zu Stande kam.

An den erhaltenen und nicht abgeriebenen Zähnen ist keine Eigenthümlichkeit zu konstatiren. Der Schädel No. IV besitzt auf jeder Seite zwei unversehrte Molares und jederseits einen Praemolaris. Die im Oberkiefer fehlenden Zähne waren alle vorhanden, denn ihre Alveolen sind von normaler Beschaffenheit. Nur die beiden letzten Molares sind

wohl bald nach ihrem Auftreten wieder verloren gegangen, eine Thatsache, die an diesem Schädel um so auffallender erscheint, als an keinem der 9 vorhandenen Zähne eine pathologische Veränderung nachweisbar ist. Befinden sich dieselben beim Menschen in der regressiven Metamorphose? Zwei der verunstalteten Schädel (No. III und VII) besitzen die letzten Molares in ebenso stark abgenütztem Zustande, wie ihre Nachbarn.

Im Allgemeinen darf man sagen, dass die Zähne dieser Schädel von den Bewohnern der Neuhebriden keine auffallenden Besonderheiten darbieten. —

II. Das Gehirn aus einem künstlich verunstalteten Schädel.

Die Gewinnung eines Gehirns aus einem deformirten Schädel eines Erwachsenen muss als ein besonderes Verdienst des Herrn Dr. med. Schneider betrachtet werden. Bisher hat man meines Wissens noch kein derartiges Präparat nach Europa gebracht und wenn dies auch der Fall gewesen ist, so war dasselbe gewiss nicht in dem vortrefflich conservirten Zustande, wie das Hirn, welches Herr Dr. Schneider der Münchener anatomischen Sammlung zum Geschenk gemacht hat. Die in Folge der Alkoholconservirung und des weiten Transportes kaum nennenswerthe Formveränderung des Gehirns wurde dadurch konstatirt, dass der von dem Zeichner Krapf gewonnene Profilumriss desselben fast genau in einen senkrecht durchschnittenen künstlich verunstalteten Schädel passte, ein Beweis, dass die Exenteration kunstgerecht ausgeführt und die Conservirung wie von einem Anatomen von Fach ausgeführt worden ist.

Ohne dass die feste Schädelkapsel zum Anhaltspunkte für die bildliche Darstellung des Gehirns genommen wurde, ergeben die verschiedenen Ansichten desselben eine vollständige Uebereinstimmung mit dem Ausguss des Schädelinnenraumes und der Vergleich zwischen beiden führt zu sehr lehrreichen Ergebnissen.

Bei der Besprechung des deformirten Gehirns kann es sich weniger handeln um alle Einzelheiten desselben, sondern um die wesentlichsten Formveränderungen an der Basis cerebri, der einzelnen Lappen mit ihren Windungen und den verschiedenen Gebilden in den Hirnhöhlen.

Das Hirngewicht.

Nach der Angabe des Herrn Dr. Schneider stammt das Hirn von einem eingeborenen Krieger aus Malicolo Lenure, welcher durch einen Granatsplitter getödtet wurde. Dasselbe ist gut ausgebildet, zeigt einen ziemlich grossen Windungsreichthum und darf in dieser Beziehung den mittleren Hirnen unserer Race angereiht werden. Das Gewicht beträgt zur Zeit 900 Gramm. Da nach den Untersuchungen von Th. von Bischoff und meinen eigenen Bestimmungen das Gehirn nach längerer Aufbewahrung in Alkohol durchschnittlich 38 — 43 % seines Gewichtes verliert, so wog das frische Hirn dieses Kriegers annähernd 1269 grm, ein Gewicht, welches gerade nicht als sehr gering zu bezeichnen ist, aber doch übereinstimmt mit der geringen Capacität der Schädel und etwa 93 grm unter dem mittleren Gehirngewichte der Männer sich befindet. Wählen wir aber zur Vergleichung das mittlere Gehirngewicht von niederen Racen, welches z. B. zwischen den Australnegern und den Sandwich-Insulanern auch ziemlich bedeutend schwankt, so hat das Hirn aus dem verunstalteten Schädel ein grösseres Gewicht, als das eines Javaners mit 1266 grm, oder eines Australnegers mit 1185 grm. Leider besitzen wir von den Völkern der niederen Racen noch viel zu wenig Gewichtsbestimmungen, um mit verlässigen Mittelzahlen rechnen zu können.

Die Gesammtform des Gehirns geht schon theilweise aus der Betrachtung des Schädels hervor. Dasselbe ist vorn niedrig und schmal und zeigt eine abgerundete Vergrösserung in der Gegend des oberen Endes des Praecuneus und der Parieto-occipitalspalte. Der Occipitallappen fällt steil ab und seine Spitze nimmt hinten den tiefsten Stand der Grosshirnhemisphäre ein, fast einen ebenso tiefen, wie der Schläfenlappen. Die auffallendste Formveränderung hat die Basis cerebri erfahren (S. Fig. 6 u. 9), indem das Grosshirn über das im grossen Hinterhauptsloch fixirte verlängerte Mark nach hinten hinweggedrängt wurde. Das Kleinhirn wurde auch nicht bedeutend beeinflusst, weil ja die Fossae cerebelli, wegen des Schutzes von Seite der Wirbelsäule und der Nackenmuskulatur durch den Druckapparat nicht leicht in Angriff genommen und somit das Kleinhirn in demselben nicht verdrängt werden konnte.

Diese Verschiebung des Grosshirns über dem Kleinhirn und dem verlängerten Mark verursacht die fast rechtwinkelige Stellung

des letzteren, der Brücke und der Grosshirnstiele zum Balken. (S. Fig. 9.)

Bei der Betrachtung der einzelnen Flächen des Hirns soll die Reihenfolge eingehalten werden, wie die Figuren geordnet sind und demnach muss zunächst besprochen werden

a) Die Basis cerebri. (Fig. 6.)

Wie schon kurz erwähnt wurde, erscheint die Basis des Hirns durch das Verhalten der Brücke, des verlängerten Markes und des Kleinhirns, welche fast in der Mitte derselben stehen, eigenartig verschoben. Das Kleinhirn wird von den Occipitallappen des Grosshirns weit überragt. Die Gründe für diese Formveränderung des Gehirns wurden schon berührt. Das Vorderhirn wurde über das Mittel-, Hinter- und Nachhirn hinweggedrängt und dadurch die gegenseitigen Beziehungen der letzteren so geändert, dass die freie Brückenfläche stark nach vorn, der Boden der Rautengrube und die Vierhügel geradezu nach hinten gerichtet sind. Das vordere Vierhügelpaar ist zum oberen und das hintere zum unteren Paar geworden. Der Aquaeductus Sylvii ist vertikal angeordnet und steht demnach fast rechtwinkelig zur dritten Hirnkammer.

In Folge dieser Verschiebung der Theile an der Basis cerebri ist eine grosse Raumbeschränkung an den Grosshirnschenkeln und an dem Trigonum intercrurale zu Stande gekommen, so dass die Corpora mammillaria, das Infundibulum und die Tractus optici fast ganz verlarvt erscheinen. Das Trigonum olfactorium ist nur 11 mm von der Brücke entfernt und wenn man auch eine Verkleinerung aller Theile durch die Alkoholwirkung zugibt, so sind doch an der erwähnten Stelle die einzelnen Gebilde sehr zusammengedrängt und die subarachnoidealen Räume zur Aufnahme des Liquor cerebro-spinalis, auf welchem das Hirn ruht, der Art. basilaris und ihrer Aeste hochgradig beschränkt worden. An diesen wichtigen basalen Hirnparthien hat unzweifelhaft in Folge der Verdrängung eine ziemlich bedeutende Compression stattgefunden.

Sehr in die Augen fallend ist ferner noch die stumpfspitzige Beschaffenheit der Schläfenlappen, welche, wie oben schon angegeben, unter die rudimentären Alae minores des Keilbeines gedrängt wurden. Hiedurch erscheinen denn auch die unteren Flächen der Stirnlappen,

welche in ihrer Entfaltung gehemmt wurden, sehr verkürzt und an dem Präparat ist die dritte Orbitalwindung fast ganz verlarvt oberhalb des spitzen Schläfenlappens. Der Eingang in die Fossa Sylvii ist hiedurch zu einer tiefen gekrümmten Spalte umgewandelt. Die Orbitalwindungen sind trotz der Beengung der vorderen Schädelgrube meiner Beurtheilung nach weniger verkürzt, als die spindel- und zungenförmigen Windungen an der Unterfläche der Occipitallappen, welche in Folge der starken Krümmung der Occipitallappen nach unten stark concav und auf einen kleineren Raum zusammengedrängt erscheinen.

b) Die obere Fläche des Grosshirns.

Gehen wir bei der Betrachtung der convexen Aussenseite, der oberen und lateralen Fläche des Grosshirns, von den Centralwindungen und den Centralfurchen aus, so ergibt sich im Ganzen eine hochgradige Schiefstellung derselben und diese Richtung der Centralfurchen bestätigt in eklatanter Weise die Resultate meiner früheren Untersuchungen, welche eine grössere Frontalrichtung bei brachycephalen und eine auffallende Schiefstellung bei dolichocephalen Köpfen ergeben haben.

Der Winkel der Centralfurche zur Medianebene der Grosshirnhemisphären beträgt annähernd 42 bis 45 Grad, eine Stellung dieser Furche, wie sie nie an normalen Hirnen zur Beobachtung gelangt. Die mediale Arcade der beiden Centralwindungen befindet sich nur etwa 3 cm von dem hinteren abgerundeten Ende des Parietallappens entfernt, denn es wurde schon angegeben, dass die Spitze des Occipitallappens ganz nach unten gedrängt wurde (S. Fig. 9). Besonders muss aber noch darauf hingewiesen werden, dass beide Centralfurchen nach hinten stark convex gebogen sind. Während der laterale Abschnitt derselben schief nach hinten und oben aufsteigt, stellt sich der mediale Schenkel etwas mehr frontal.

Diese Veränderung der beiden Centralwindungen hat eine derartige Dehnung des Gyrus frontalis primus zur Folge, dass derselbe fast die doppelte Länge besitzt, wie die dritte Stirnwindung. Diese von der lateralen Arcade der Centralwindungen in gerader Richtung zum vorderen Ende des Stirnlappens gemessen, beträg 7,2 cm, während die erstere 12,9 cm Länge besitzt. Aber nicht nur diese verschiedene Länge der

medialen und lateralen Stirnwindung ist am Stirnlappen auffallend, sondern noch viel mehr die formellen Unterschiede in der Grösse und Krümmung der drei Windungen. An ihrer Vereinigung mit der vorderen Centralwindung sind dieselben einfach und verhältnissmässig gross, gegen das convexe Vorderende der Hemisphäre dagegen werden sie allmählig stärker gekrümmt und eng zusammengedrängt, eine Erscheinung, welche an dem Präparat noch mehr zum Ausdruck kömmt, als an der Abbildung Fig. 7.

Die Umschnürung der Stirnregion des Kopfes hat demnach nicht nur eine Verdrängung der einzelnen Windungen bewirkt, sondern durch die Beschränkung des Raumes die Flächenausdehnung der Windungen des Stirnhirns beeinträchtigt. Ich halte diese Annahme um so mehr für berechtigt, als eine ähnliche Erscheinung an dem verdrängten und theilweise verkümmerten Occipitallappen wiederkehrt. Für eine Raceneigenthümlichkeit möchte ich diese Bildung der Stirnwindungen nicht ansehen.

Die Schiefstellung der Centralwindungen bedingt selbstverständlich auch die Anpassung der Fissura praecentralis, welche das Resultat des Ursprunges der Wurzeln der Stirnwindungen ist. Dieselbe ist auch stark schief nach innen und oben gerichtet.

Was die dritten Stirnwindungen und die beiden Inseln anlangt, so müssen dieselben zu den gering ausgebildeten gerechnet werden. Die Fossa Sylvii senkt sich sehr tief zwischen den Schläfen- und Scheitellappen ein und es lassen sich alle die feinen formellen Aenderungen ihrer Umrandung kaum zum Ausdruck bringen. Es mag daher genügen, wenn ich sage, dass die Fossa Sylvii selbst fast horizontal und ihr vorderer Schenkel in gleicher Stellung lang gestreckt und einfach ist (S. Fig. 8 Taf. III). Die einfache dritte Stirnwindung ist an ihrem unteren Abschnitte in der Fossa Sylvii fast ganz verlarvt und nur die Arcade am Ende des vorderen Schenkels der Sylvischen Spalte prominirt ziemlich stark und erzeugte die oben beschriebene circumscripte Grube lateralwärts an der vorderen Schädelgrube. Da ich den zu diesem Hirn gehörigen Schädel nicht besitze, so ist diese Thatsache um so mehr hervorzuheben, weil dieselbe dafür spricht, dass die Hirne in den hochgradig umgestalteten Schädeln auffallend übereinstimmende Formveränderungen erfahren. Von beson-

derem Interesse war an diesem Hirn das übereinstimmende Verhalten der beiden dritten Stirnwindungen. Weder in Form noch in Grösse zeigen sich diese Windungen der beiden Hemisphären verschieden und als ich mich bemühte, ihre Länge genau festzustellen, konnte ich auch keine nennenswerthe Differenz konstatiren; während kürzlich an dem Hirn eines geistig hochstehenden Mannes an der linken dritten Stirnwindung 32 cm Länge und an der rechten nur 21 cm bestimmt wurden.

Die zwei Gyri temporales transversi Heschl's treten verhältnissmässig gut entwickelt auf, allein sie stehen ebenso schief, wie die hinteren Windungen der Insel, welche sich der Richtung der Sylvischen Spalte angepasst haben. Die übrigen Windungen der Insel sind klein, mehr oder weniger radiär gestellt und bilden zusammen einen abgerundeten Conus, der sich stark zwischen Stirn- und Schläfenlappen lateralwärts hervordrängt, die Oberfläche jedoch nicht erreicht. Man erkennt an der Insel, dass dieselbe, von allen Seiten stark eingeengt, sich lateralwärts conisch zuspitzen musste. (S. Fig. 10 u. 11.)

Die unteren Flächen des Stirnlappens zeigen, mit Ausnahme der stärkeren Verkürzung und dadurch bedingte zahlreichere kleinere Krümmungen der Windungen keine in die Augen fallenden Veränderungen. Die Ablenkung des vorderen Endes der Rinne, in welcher der Nervus olfactorius Aufnahme findet, nach der medialen Fläche der Hemisphäre beobachtet man auch zuweilen an ganz normalen Hirnen.

Da der Schläfenlappen schon Erwähnung fand, so sei nur noch hervorgehoben, dass derselbe, abgesehen von seiner langgestreckten, nach vorn stumpf abgerundeten Spitze, keine wesentlichen Veränderungen darbietet. Die einzelnen Windungen sind gut ausgebildet. Die Fissura parallela prima ist eine der Richtung der Fossa Sylvii angepasste durchgehende Spalte, die nur links unten eine Unterbrechung zeigt und oben vom Gyrus angularis umschlossen wird. Die unvollständige Fissura parallela secunda und die einzelnen Schläfenwindungen bieten weder oben noch unten Besonderheiten dar.

Die Scheitellappen haben von allen Gehirnlappen die stärkste Krümmung erfahren, indem die der oberen Fläche des Praecuneus entsprechende Region den höchsten hintersten Punkt der Hemisphäre bildet und von hier aus ein starker Abfall bis gegen die Spitze des Occipital-

lappens vorhanden ist. Das Ende des letzteren erscheint selbst etwas nach vorn gebogen. Diese Form des Scheitellappens ist denn auch der Grund, dass derselbe in Figura 7 nicht in seiner ganzen Ausdehnung zur Ansicht gebracht werden konnte. Die Anordnungen der Furchen und Windungen des Scheitellappens konnten daher in ihrer ganzen Ausdehnung nur in den Figuren 8 und 9 klar wiedergegeben werden, wie denn auch diese beiden Abbildungen die topographischen Beziehungen der einzelnen Hirntheile zu einander am besten übersehen lassen.

Die Fissura postcentralis setzt sich ohne Unterbrechung in die Fissura interparietalis fort, welche mit den angrenzenden Windungen eine nach oben convexe halbkreisförmige Krümmung zeigt und in die stark gebogene Affenspalte übergeht. Diese letzteren sind bestimmt ausgesprochen, von mittlerer Grösse, assymetrisch verkrümmt und gerade nach rückwärts gerichtet. Der laterale Schenkel der Affenspalte geht weniger weiter nach rückwärts resp. nach unten, als der mediale, welcher in Folge der starken Entwicklung der die Fissura parieto-occipitalis umgebenden Bogenwindung eine Verschiebung erfahren hat. Diese Bogenwindung der linken Hemisphäre ist so gross, dass sie von drei sekundären Einsenkungen gefurcht ist, während die correspondirende Bogenwindung der rechten Hemisphäre nicht in ihrer vollen Ausdehnung an die Hirnoberfläche reicht, sondern an zwei Stellen in der Tiefe stecken blieb und demnach eine Beschränkung der Oberflächenausdehnung erfahren hat.

Der laterale und mediale Windungszug an der Fissura interparietalis zeigen, abgesehen von ihren Krümmungen, eine vollständige Ausbildung und bieten sogar in Folge ihrer starken, nach oben convexen halbkreisförmigen Umbiegungen relativ grössere Oberflächen dar, als die Windungen des Stirn- und Occipitallappens.

c) Die medialen Flächen der Hemisphären und die Occipitallappen.

Noch deutlicher, als an den übrigen schon erwähnten Figuren, wird die Formveränderung der Grosshirnhemisphäre an der Abbildung Fig. 9 erkannt. Das niedere Stirnhirn, das allmählige Anwachsen des Stirn- und Scheitellappens bis zum oberen Ende des Praecuneus und das steile Abfallen von diesem Punkte aus bis zu der nach unten gerichteten Spitze des Occipitallappens ist noch charakteristischer zum Ausdrucke gekommen,

als an der Abbildung der lateralen Fläche der Grosshirnhemisphäre. Auch an dieser medialen Fläche erscheinen vorn die Stirnwindungen klein und gewunden, werden allmählig einfach und langgestreckt, um am hinteren Ende der Hemisphäre abermals wieder die kleine stark gewundene Beschaffenheit anzunehmen.

Der Sulcus calloso-marginalis weicht an seinem vorderen unteren Anfangsschenkel an beiden Hemisphären bedeutend von der Norm ab, indem derselbe gar nicht unter dem Rostrum corporis collosi, sondern erst oberhalb des Balkenknies beginnt und dann schief aufsteigend, an der hinteren oberen Abrundung des Scheitelhirns mit einer Krümmung hinter der medialen Bogenwindung der beiden Gyri centrales endet. Neben dem Sulcus colloso-marginalis sind noch zwei Furchen vorhanden, von welchen die eine aufwärts steigend vorn am Stirnhirn ausläuft, die andere, nachdem sie in der Ebene des Balkenknies aufgetreten, nach rückwärts ziehend, ebenfalls an dem oberen medialen Rande der Hemisphäre seicht endet.

Dieses Verhalten der vorn und unten am Stirnhirn kaum angedeuteten Furchen und das formelle Verhalten des Anfangstheiles des Gyrus fornicatus selbst sprechen dafür, dass die betreffende Hirnmasse in einem verkümmerten Zustande sich befindet. Selbst die einfachsten Hirne unserer Race zeigen an besagter Stelle eine grössere Entfaltung der Oberfläche, als diese verunstalteten Hirne. Für diese Auffassung der Atrophie des vorderen Theiles des Gyrus fornicatus spricht auch die Kleinheit und die horizontale Stellung des Balkens, insbesondere auch die schwache Entwickelung des Rostrum corporis callosi mit dem darüber befindlichen Septum lucidum und dem engen Foramen Monroii. Aber auch der Gyrus fornicatus selbst ist schwach entwickelt. Der untere Zug desselben: der Gyrus hippocampi mit dem Haken sind etwas aus ihrer Lage verdrängt und letzterer weicht durch seine gedehnte spitze Beschaffenheit von der Norm auffallend ab. Die mediale Fläche der ersten Stirnwindung verhält sich ebenso, wie die beschriebene obere Fläche derselben.

Die Fissura perpendicularis interna und die Fissura calcarina bieten insoferne besondere Abweichungen dar, als die letztere sich vor der ersteren bei starker Krümmung nach unten wendet. Während

die Fissura perpendicularis interna oben in drei Secundärfurchen, welche vom Gyrus calloso-marginalis umrahmt werden, ausläuft, erlitt die Fissura calcarina mit den sie umgebenden Windungen eine starke Biegung, so dass ihr hinteres Ende zum unteren geworden ist, eine Richtung, welche man an normalen Hirnen niemals beobachtet hat. Nur Zuckerkandl hat ein Hirn von einem Neugeborenen beschrieben, an welchem der Occipitallappen in ähnlicher Weise verkrümmt war, in Folge Formveränderung des Kopfes durch den Druck des Uterus, wie an unserem Objekt. Die Fissura calcarina zeigte sich ebenfalls stark gebogen mit nach abwärts gerichteter Concavität. Die beiden erwähnten Furchen gehen an ihren unteren Enden direkt in einander über und jene von Bischoff beschriebene Windung, weche zuweilen eine Trennung beider zu Stande bringt, ist kaum angedeutet.

Der Cuneus und der Praecuneus befinden sich auch in einem verkümmerten Zustande. Der Vorzwickel stellt eine vom Splenium corporis callosi nach hinten und oben sich fortsetzende Windungsgruppe dar, welche länglich viereckig gestaltet, aus kleinen und ziemlich stark gekrümmten Windungen zusammengesetzt ist. Der Zwickel erscheint klein, aber windungsreich, wie der Occipitallappen. Er ist ebenso stark umgebogen, wie es die beschriebene Fissura calcarina bedingt. Seine Windungen stellen als Ganzes einen stark gekrümmten Haken dar, der mit seiner Basis die Perpendiculärspalte begrenzt und mit seiner Spitze unten am Ende des Occipitallappens mit anderen Windungen desselben in Verbindung tritt.

Die übrigen Windungen des Lobus occipitalis zeichnen sich, wie schon angegeben wurde, durch starke Krümmungen aus. Würde man dies beschriebene Hirn vollständig zerlegen, die Ventrikel und basalen und centralen Hemisphären-Ganglien untersuchen, so könnten ohne Zweifel mehrere formelle Abweichungen von der Norm konstatirt werden. Allein dieselben hätten doch nur dann eine Bedeutung, wenn an ihnen eine Beschränkung ihrer Ausbildung und bei histologischer Prüfung ein anomales Verhalten der Nervenelemente zu konstatiren wäre. Derartige Untersuchungsergebnisse müssen jedoch an einem künstlich verunstalteten Hirn, welches bald nach dem Tode in einer für die Prüfung der Elemente des Hirns geeigneten Weise zur Conservirung gelangt, gewonnen werden.

Wenn zum Schlusse noch der Frage näher getreten werden soll, ob bei den Individuen mit hochgradig verunstalteten Köpfen sich auch nachtheilige Folgen auf die Funktionen des Hirns nachweisen lassen, so steht man unzweifelhaft bei der Beantwortung derselben vor einem schwer lösbaren Problem und alle bis jetzt in dieser Hinsicht bekannt gewordenen Angaben sind so mangelhaft und von so allgemeiner Natur, dass man keine Schlussfolgerungen darauf gründen kann. Der so leichthin gemachte Ausspruch, dass geringgradige künstliche Verunstaltung des Kopfes keine nachtheiligen Folgen für die Hirnfunktion habe, ist bis jetzt durch keine Thatsache begründet worden.

Man weiss, dass die christlichen Missionäre in Peru sich bemühen der Kopfverunstaltung bei den Kindern entgegenzuwirken. Diese löblichen Bemühungen der frommen Männer sind ohne Zweifel nicht nur wegen ästhetischer Beeinträchtigung der Gesichtsformen, sondern mehr noch wegen der gesundheitsschädlichen Wirkung in Scene gegangen.

Wenn diese beschriebenen mechanischen Einwirkungen am Kopfe der Neuhebridenbewohner schon in der frühesten Jugend beginnen, zu einer Zeit, in welcher die noch in der Ausbildung begriffenen Schädelknochen sehr gefügig sind, so können so hochgradige Formveränderungen des Schädels und Gehirns zu Stande kommen, wie sie oben beschrieben worden sind.

Bei einer so bedeutenden Umformung des Hirnschädels mit erhöhtem Hirndruck müssen nachtheilige Wirkungen auf die Elemente des Grosshirns und dessen Funktionen zu Stande kommen.

Wenn man bedenkt, dass alle Theile des Grosshirns, in welchen sich die psychischen Prozesse abspielen, einen dauernden Druck erfahren, dass die basalen Regionen der Hemisphären in gleicher Weise, wie die cerebralen Ganglien und die grauen Rindenschichten der Hemisphäre sehr stark eingeengt werden, und dass dieser Drnck die bei der Gehirnthätigkeit nothwendige Ausdehnung und Füllung des gesammten Gefässsystems innerhalb der Schädelhöhle beeinträchtigt und folglich den Zufluss des Ernährungsmaterials zum Hirn verringert, so wird man a priori anzunehmen berechtigt sein, dass die Funktionen der einzelnen Zellenterritorien des Grosshirns eine dem Intensitätsgrade des Druckes entsprechende Benachtheiligung erfahren. Alle Beobachtungen, welche bis jetzt hierüber bekannt wurden, können nicht hoch taxirt werden.

Wenn z. B. der französische Irrenarzt Esquirol seiner Zeit angab, dass in einigen Provinzen Frankreichs, wo eine Kopfverunstaltung durch das Tragen eigenthümlicher Hauben zur Beobachtung kam, die Zahl der Irren beim weiblichen Geschlecht vermehrt sei, so wurden diese Angaben später auf Grund statistischer Erhebungen und Vergleichungen mit der Zahl der Irren in anderen französischen Provinzen, wo keine mechanische Einwirkungen auf den Kopf stattfinden, korrigirt und das häufigere Auftreten des Irrsinns beim weiblichen Geschlecht auf andere Ursachen zurückgeführt.

Ueber künstlich deformirte Schädel aus Europa, aus Deutschland, Oesterreich-Ungarn, Holland; aus England, Frankreich und der Schweiz; aus Amerika und Asien, insbesondere aus der Südsee und dem ostindischen Archipel sind sorgfältige Untersuchungsresultate, welche sich auf die todten Schädel beziehen, in grosser Zahl bekannt geworden. Allein über das psychische Verhalten der Menschen mit hochgradigen Hirnschädelverunstaltungen ist das Beobachtungsmaterial sehr spärlich, obschon die Feststellung der funktionellen Störungen der einzelnen Hirnparthien einen hohen wissenschaftlichen Werth beanspruchen dürfte.

Der Mann, von welchem das beschriebene Hirn abstammt, war ein eingeborener kräftiger Krieger auf der Insel Malicolo Lenure, welcher durch einen Granatsplitter getödtet wurde. Seine motorischen Leistungen waren demnach nicht beeinträchtigt und seine sensiblen Funktionen mögen seinen motorischen ähnlich gewesen sein. Ueber eine Beschränkung der Sinnesthätigkeit konnten weder bei diesem Individuum, noch bei anderen männlichen Eingeborenen Beobachtungen angestellt werden. Ob die Sehnerven oder die Sehnerven-Centren an der Hirnbasis und die mit diesen Centren correspondirenden Rindenschichten der Hemisphären eine sehr starke Beschränkung in ihrer Entwicklung erfahren, bleibt dahingestellt. Auch die Verengerung der äusseren Gehörgänge hat wahrscheinlich für den Einfall der Schallwellen einen dem Grade derselben entsprechenden Nachtheil. Wie weit der stattgefundene Druck die Hörnerven und die primären Hör-Centren beeinträchtigte und ihre Funktion beschränkte, kann an dem Objekt nicht festgestellt werden. An den Riechnerven kann man nachweisen, dass dieselben dünn und mit kleinen

Bulbi olfactorii versehen sind. Allein aus dieser Thatsache kann nicht mit Sicherheit gefolgert werden, in welchem Grade das Riechorgan ausser Funktion gesetzt war.

Noch schwieriger ist die Beurtheilung der Gehirnfunktionen. Wenn man auch die geringe Schädelcapacität, die Kleinheit der Gehirnschlagadern, die Verdickung der Pia mater, in welcher die Bahnen für das Ernährungsmaterial des Grosshirns eingeschlossen sind, für eine Beeinträchtigung der Hirnfunktion geltend macht und die Beschränkung in der Ausbildung einer Anzahl von Windungen, insbesondere der der Stirnlappen, welche schon an dem ersten Objekt beobachtet wurde, hervorhebt, so kann man doch nur mit Wahrscheinlichkeit annehmen, dass diese künstliche Verunstaltung des Kopfes, wenn Kinder der länger dauernden Einengung Widerstand geleistet haben, nicht ohne Nachtheil für die funktionellen Vorgänge des Gehirns ist.

Eine eingehende und länger fortgesetzte Beobachtung an den Eingeborenen mit künstlich verunstalteten Köpfen auf den Neu-Hebriden oder in Peru müsste ohne Zweifel Ergebnisse liefern, die den Resultaten eines Experimentes am lebenden Menschen gleichkäme. Es wäre eine lohnende Aufgabe, wenn künftig mit den erforderlichen biologischen Vorkenntnissen ausgerüstete Forscher diesbezügliche sorgfältige Beobachtungen anstellten.

Beschreibung der Tafeln.

Tafel I. Verschiedene Ansichten von einem künstlich verunstalteten Schädel.

Fig. 1. Linke Seitenansicht eines deformirten Schädels. Diese Abbildung repräsentirt die typische Form der verunstalteten Schädel der Bewohner der Neuhebriden. Besonders charakteristisch ist das Verhältniss des Gehirnschädels zu dem Gesichtsskelet. Die Schläfenenge, der Processus frontalis mit einem Os intercalare temporo-frontale, die Zwickelbeine in der Lambdanaht und der Torus occipitalis sind an demselben klar sichtbar.

Fig. 2. Sagittal durchschnittener Schädel von der Median-Ebene aus gesehen. Die Formveränderungen des Stirn-, Scheitel- und Hinterhauptbeines mit den zwischen ihnen befindlichen Nähten, der rudimentäre kleine Keilbeinflügel, der Sattelwinkel sind an dieser Darstellung speciell berücksichtigt.

Fig. 3. Regio temporalis der rechten Seite in natürlicher Grösse. a) Processus frontalis des Schläfebeins und b) Ossa intercalaria temporo-frontalia.

Fig. 4. Rechte Orbita von vorn dargestellt mit den verkleinerten und verengerten beiden Augenhöhlenspalten. c) Plattgedrücktes Foramen opticum und d) sehr niedere Lamina papyracea des Siebbeins.

Fig. 5. Atrophischer, zugeschärfter Processus alveolaris, an welchem die beiden medialen Schneidezähne ausgezogen wurden.

Tafel II.

Fig. 6. Basis cerebri. An der Basis cerebri ist die spitzabgerundete Form der Schläfenlappen an ihren unteren vorderen Enden, die Verengerung des Raumes zwischen der Brücke und den beiden Nervi optici besonders auffallend. In Folge der Verschiebung der Theile sind Brücke und verlängertes Mark in bedeutender Verkürzung wiedergegeben. Das kleine Hirn ist stark nach vorn gerückt und wird von den Occipitallappen weit überragt.

Fig. 7. Das Grosshirn von oben dargestellt. 1) Gyrus centralis anterior. 2) Gyrus centralis posterior. 3) Mediale Arcade der sich vereinigenden Gyri centrales. 4) Laterale Arcade derselben. 5) Sulcus praecentralis. 6) Sulcus frontalis primus. 7) Sulcus frontalis secundus. 8) Sehr langer Gyrus frontalis primus. 9) Gyrus frontalis secundus. 10) Gyrus frontalis tertius. Letzterer sehr kurz. 11) Sulcus postcentralis. 12) Zusammengedrängter und stark gebogener Sulcus interparietalis. 13) Gyrus parieto-occipitalis. 14) Fissura parallela prima. 15) Gyrus angularis.

Tafel III.

Fig. 8 und 9 lassen am deutlichsten die Verschiebungen der einzelnen Hirnabschnitte zu einander erkennen, insbesondere ist an der Darstellung des Medianschnittes die Stellung der Medulla oblongata, der Brücke, der Grosshirnstiele und des Kleinhirns zu der Hemisphäre sehr charakteristisch für den Grad der künstlichen Verunstaltung.

Fig. 10 und 11. Die Windungen der rechten und linken Insel ergeben sich als kleine, in ihrer Ausbildung beschränkte Hemisphärenparthien.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Joh. Roth sel. Wtw. München.

NATURAL HISTORY

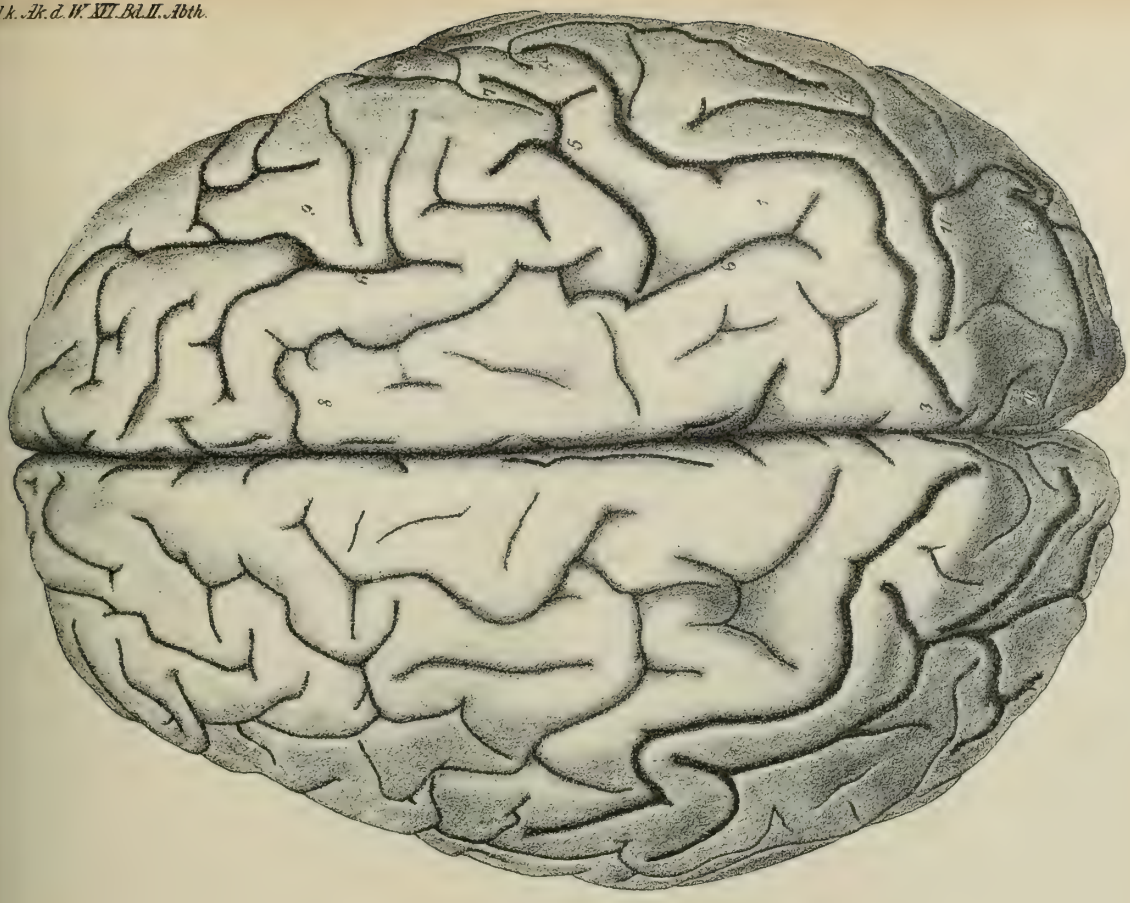


Fig: 7.

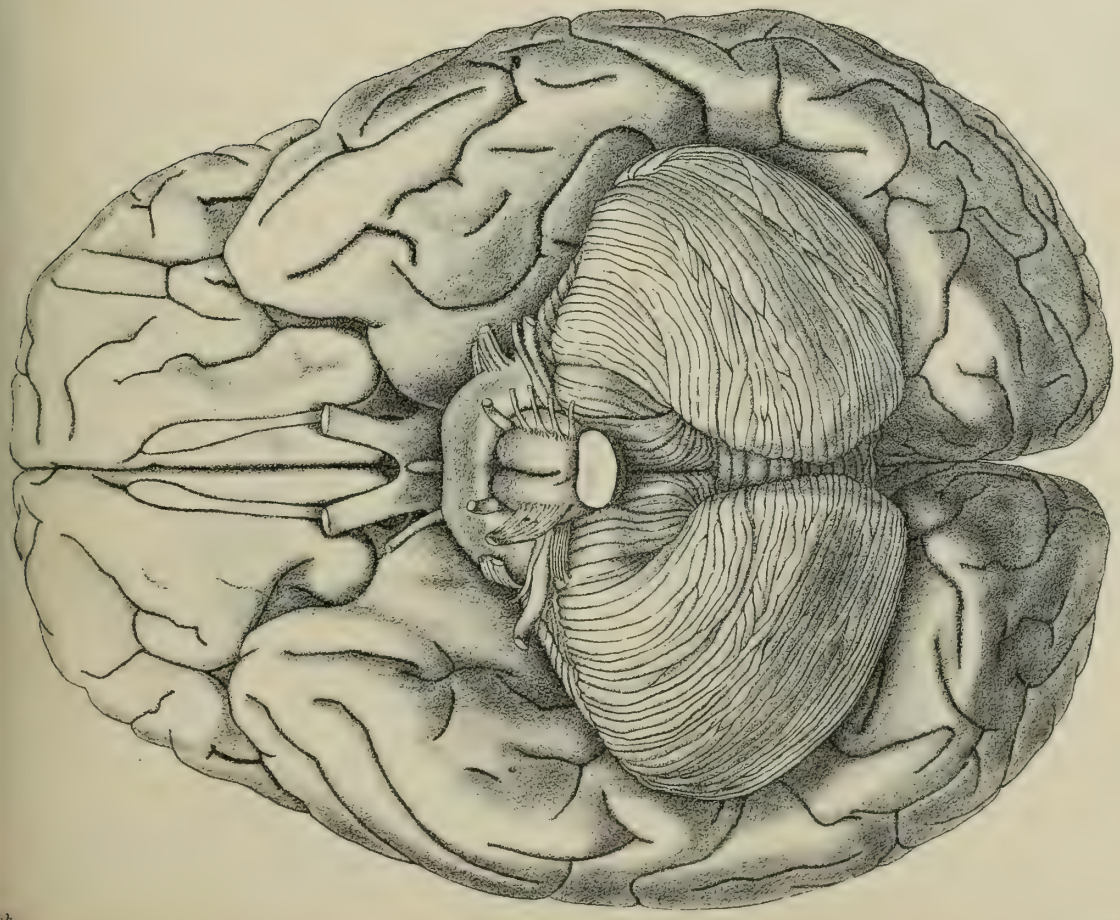


Fig: 6.

Joh. Roth, sel. Wtw München.

BRITISH MUSEUM

Fig: 8.

Fig: 10.

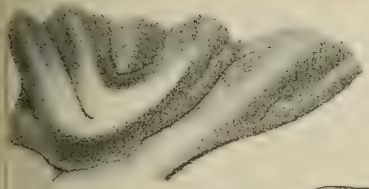


Fig: 11.

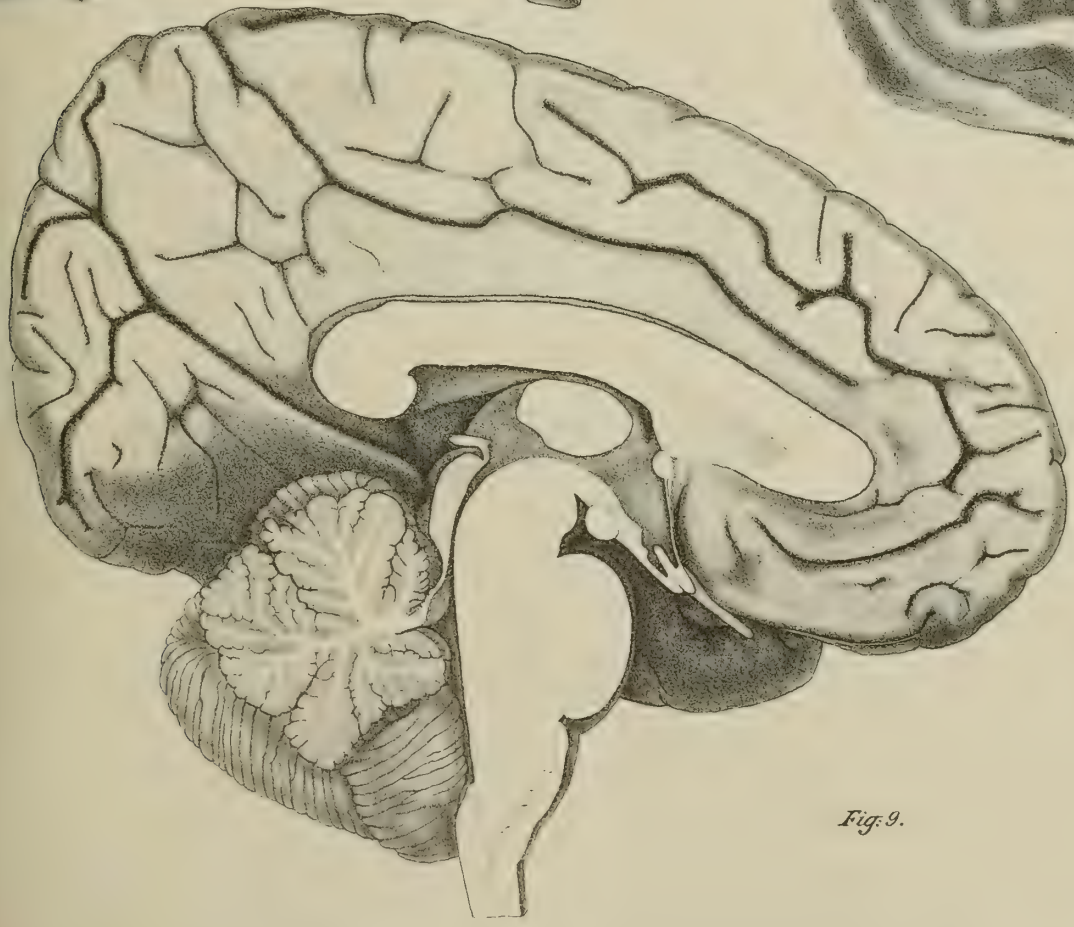


Fig: 9.

Zur Theorie

der Beleuchtung der grossen Planeten

insbesondere des Saturn.

Von

H. Seeliger.

Die Anwendung der Photometrie auf die Planeten hat bis jetzt nur in wenigen Fällen zu Resultaten geführt, die in unzweideutiger Weise interpretirt werden können. Solange man über das Gesetz, nach welchem sogenannte zerstreut reflectirende Substanzen das auffallende Licht zurückwerfen, eine ganz bestimmte Annahme macht und die aus dieser Annahme gezogenen Folgerungen mit den Beobachtungsergebnissen vergleicht, wird natürlich jedes auf diesem Wege erlangte Resultat denselben Zweifeln unterliegen, die gegen das angewandte photometrische Grundgesetz erhoben werden können. Seit Seidel's [1]) und Zöllner's [2]) Arbeiten im Gebiete der Photometrie der Planeten hat man beinahe immer das Lambert'sche Gesetz als Grundlage angenommen und hieraus nicht nur Vorschriften zur Reduction von photometrischen Messungen abgeleitet, sondern auch die physikalischen Eigenschaften der Planeten, so ihre Albedo, zahlenmässig bestimmt und mit den analogen irdischer Substanzen verglichen. In den letzten Jahren ist man darauf aufmerksam geworden, dass die Lambert'sche Formel, deren theoretische Begründung bereits von Zöllner als unrichtig nachgewiesen worden ist, durch angestellte Experimente keineswegs in dem Umfange bestätigt worden ist, wie gefordert werden muss und es hat sich herausgestellt, dass man Substanzen angeben kann, welche sich der genannten Formel gewiss nicht fügen. Dass infolge dessen alle auf die allgemeine Gültigkeit des Lambert'schen Gesetzes gegründeten Folgerungen hinfällig werden, ist selbstverständlich. So sind, um nur eines zu erwähnen, die von Zöllner erhaltenen Albedowerthe von Planeten

1) Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten etc. Monumenta saecularia der k. bayer. Akademie der Wissenschaften 1859.

2) Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865.

und irdischen Substanzen durchaus unvergleichbare Zahlen, weil für beide das Lambert'sche Gesetz als gültig angenommen worden. Der Begriff der Albedo muss überhaupt, wie ich nachgewiesen habe,[1]) eine neue und erweiterte Definition erhalten, wenn man nicht unerlaubte Beschränkungen einführen will. Ich habe ausserdem a. a. O. einige Punkte näher erörtert, wo die namentlich von Zöllner erhaltenen Resultate durch die veränderte Auffassung der Sachlage nicht mehr als bewiesene Thatsachen angesehen werden können und man wird wohl zugeben müssen, dass nicht sehr viel übrig geblieben ist, was als gesichertes Forschungsergebniss gelten darf. Das gesteigerte Interesse, welches gegenwärtig der Himmelsphotometrie entgegengebracht wird und die ausgezeichnete Pflege, welche dieser Wissenszweig von vielen Seiten erfährt, lassen wohl hoffen, dass manches Ziel, das Zöllner anstrebte, wirklich erreicht werden wird. Soll dies geschehen, so wird man aber einen etwas andern Weg als bisher geschehen einschlagen müssen. Man darf nicht versuchen durch eine so einfache Formel, wie die Lambert'sche, alle Möglichkeiten zu umspannen, vielmehr wird man darnach streben müssen in jedem besonderen Falle durch physikalisch zulässige Annahmen den Eigenthümlichkeiten zu genügen, welche in den photometrischen Beobachtungsergebnissen zu Tage treten. Jeder solche Fall aber, in welchem es gelingt den Beobachtungen in der Hauptsache zu entsprechen, wird schon deshalb ein gesteigertes Interesse in Anspruch nehmen dürfen, weil es, wenigstens gegenwärtig noch, nur wenig solcher günstig erledigten Fälle giebt. Ein solcher soll nun im Folgenden (vergl. insbesondere Artikel 11) eingehend erörtert werden.

Die theoretischen Betrachtungen, welche die Photometrie des Planeten Saturn erfordert, bieten in mehrfacher Beziehung Interesse dar. Zunächst sind infolge der wechselnden Gestalt des Ringsystemes und der starken Abplattung des Saturnkörpers die sich darbietenden geometrischen Verhältnisse ziemlich verwickelt. Die scharfe Reduction von photometrischen Messungen auf einen bestimmten Zustand z. B. auf den, wo die Erde sich in der Ringebene befindet, ist deshalb stets als ein recht mühsames

---

1) Bemerkungen zu Zöllner's photometrischen Untersuchungen. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 21. Jahrgang.

Geschäft betrachtet worden, wenn man nicht so weitgehende Vereinfachungen zulassen will, wie Zöllner[1]) vorgeschlagen hat. Im Folgenden wird nun gezeigt, wie mit Hülfe wenig umfangreicher Tabellen eine in jedem Falle genügend genaue Reduction fast ohne Mühe ausgeführt werden kann, wobei nöthigenfalls auch auf den Schattenwurf des Saturnkörpers auf den Ring und umgekehrt Rücksicht genommen werden kann. Die Resultate eines Theiles dieser Untersuchungen habe ich bereits in den Astronom. Nachrichten Nr. 2639 in Form einer Tabelle mitgetheilt. Hier werden die hierbei angewandten Entwickelungen vollständig gegeben werden.

Besonderes Interesse beanspruchen die Lichtverhältnisse, welche der Saturnring darbietet. Schon Zöllner machte darauf aufmerksam, dass diese sich durchaus nicht nach dem Lambert'schen Gesetze regeln, vielmehr der Ring stets sehr nahe gleich hell erscheint. Da sowohl die Sonne als auch die Erde, vom Mittelpunct des Saturn aus gesehen, Höhen über der Ringebene (Elevationswinkel) haben, die nicht wesentlich von einander verschieden zwischen den weiten Grenzen von 0 bis etwa 30 Grad variiren, so erschien das photometrische Verhalten des Ringes ganz unerklärlich oder doch wenigstens sehr auffallend. Da indess die Thatsache zweifellos feststeht, so muss sie sich auch aus der Constitution des Ringes ableiten lassen. In der That habe ich schon vor einigen Jahren[2]) nachgewiesen, dass alles Unerklärliche verschwindet, wenn man die von Maxwell und Hirn begründete Ansicht festhält, dass der Saturnring aus lauter discreten Massentheilchen zusammengesetzt sei, welche Ansicht überdies durch mechanische Gründe mit grosser Sicherheit gestützt wird. In dem angeführten Aufsatze habe ich indess eine ganz bestimmte einfache Massenvertheilung annehmen müssen, weil ich damals noch die Art und Weise, wie Zöllner das Lambert'sche Gesetz plausibel machte, für richtig hielt und aus dieser Beweisführung gewisse sonst am wahrscheinlichsten erscheinende Annahmen als nicht haltbar hervorgingen. Seitdem ist mir nun eine, wie ich glaube, ganz einwurfsfreie Theorie der Beleuchtung des Saturnringes gelungen von einer Allgemeinheit, die

1) a. a. O. pag. 139 ff.

2) Astron. Nachrichten Nr. 2612.

nichts zu wünschen übrig lassen dürfte. Namentlich ist dieselbe frei von der immerhin willkührlichen Annahme über das photometrische Grundgesetz, welches jedes einzelne Theilchen des Ringes befolgt.

Eine solche Allgemeinheit ist bei der Betrachtung der Beleuchtung des Saturnsphäroides natürlich nicht möglich. Es wird sich aber herausstellen, dass eine etwaige Unsicherheit in dieser Beziehung ziemlich gleichgültig ist, weil sie sich nur in sehr verkleinertem Massstabe in den Beobachtungen aussprechen kann. Die Albedo des Planeten ist freilich unter diesen Umständen nicht einwurfsfrei zu bestimmen, sie wäre es nur dann, wenn man sich über das geltende photometrische Grundgesetz entschieden hätte. Es wäre demnach zu untersuchen, welche Annahme in dieser Beziehung zur Zeit die meiste Wahrscheinlichkeit für sich hat. Ich habe mich hierüber in der „Vierteljahrsschrift“ geäussert und will hier nur, in directem Anschluss an das Folgende, hervorheben, dass ich stets zwei Grundgesetze verfolgt habe, welche mir die Grenzen anzugeben scheinen, innerhalb welcher sich das unbekannte wahre Gesetz bei Saturn bewegen dürfte. Bezeichnet man die Winkel, welche die Normale eines beleuchteten Elementes ds mit der Richtung nach der Sonne resp. Erde bildet, mit i und ε, so ist die Lichtmenge, welche ds der Erde zusendet, zufolge der Lambert'schen Formel proportional mit

$$ds \,.\, \cos i \cos \varepsilon$$

und nach dem a. a. O. für manche Zwecke empfohlenen Gesetze proportional mit

$$ds \cdot \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} .$$

Die erste Formel giebt eine allmählige Abnahme des Lichtes auf der scheinbaren Planetenscheibe von der Mitte bis zum Rande, wo die Helligkeit 0 stattfindet. Die zweite Formel dagegen giebt, da für die von der Sonne entfernteren Planeten Jupiter, Saturn etc. i und ε nicht wesentlich verschieden von einander sind, eine überall gleichmässig helle Scheibe. Ein Anblick der grossen Planeten durch ein besseres Fernrohr dürfte zu Gunsten der zweiten Annahme entscheiden. Ich habe aber trotzdem die Rechnungen auch für das Lambert'sche Gesetz durchgeführt und zwar aus dem oben angeführten Grunde und dann auch, um mit den älteren Arbeiten in dieser Richtung in Contact zu bleiben.

Zunächst war die Beleuchtung eines Rotationsellipsoides zu studiren, wobei die Rücksicht auf eine leichte practische Anwendung massgebend sein musste. Da diese bisher nicht behandelte Aufgabe zugleich die Hauptsache ist bei der Photometrie des Jupiter und Uranus, so habe ich die Rücksicht auf eine solche Anwendung nicht aus dem Auge gelassen.

Die folgenden Entwickelungen sind in zwei Hauptabschnitte getheilt. Der erste behandelt allgemein die Beleuchtung eines Rotationsellipsoides, während sich der zweite ausschliesslich mit dem Planeten Saturn beschäftigt. Schliesslich habe ich alle Zahlentabellen, welche bei der wirklichen Anwendung der abgeleiteten Formeln von wesentlichem Nutzen sein dürften, zusammengestellt. Noch möchte ich erwähnen, dass der Anhang eine Aufgabe bespricht, deren Lösung leicht und längst bekannt ist, die aber durch die Erleichterung, welche die dazu gehörenden Tabellen gewähren, vielleicht einiges Interesse darbieten wird.

1. Abschnitt.

Beleuchtung eines Rotationsellipsoides.

1.

Die grosse Halbaxe des Ellipsoides sei a, b die Rotationsaxe. In die letztere werde die z Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems gelegt, dessen Anfang im Mittelpunkt des Ellipsoides liegt. Es werde ferner angenommen, dass die Entfernung von Sonne und Erde von dem Planeten als sehr gross gegenüber den Dimensionen des letzteren angesehen werden kann; geometrisch heisst das: die der Sonne resp. der Erde entsprechenden Polarebenen des Ellipsoides gehen durch den Mittelpunct des letzteren. Die Lichtmenge dQ, welche ein Oberflächenelement ds der Erde zusendet, wird sein:

$$dQ = I.\, ds.\, f(i, \varepsilon) \qquad (1)$$

wenn I eine Constante und $f(i, \varepsilon)$ das photometrische Grundgesetz, welches eine Abhängigkeit des Incidenzwinkels i und des Emanationswinkels ε ausspricht, bedeutet. Um die Gesammtlichtmenge zu erhalten, welche der Planet der Erde zusendet, ist dQ über alle ds zu summiren, die zu gleicher Zeit von der Sonne beleuchtet und von der Erde aus gesehen werden. Die

dem entsprechenden Integrationsgrenzen lassen sich durch folgendes Verfahren leicht angeben.

Es werde concentrisch mit dem Ellipsoid eine Kugel mit dem Radius 1 gelegt. Der unendlich schmale Kegel, dessen Spitze im Coordinatenanfang liegt und welcher aus dem Ellipsoid das Element ds ausschneidet, möge auf der Kugel die Fläche $d\sigma$ begrenzen.

Bezeichnet dann ϱ die Entfernung des Elementes ds vom Coordinatenanfang, so ist

$$ds = d\sigma \cdot \frac{\varrho^3}{\mathrm{M}}; \quad \mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{b^4}}} \tag{2}$$

Die Polarebenen der Sonne und Erde schneiden die Kugel in zwei grössten Kreisen und es ist also dQ in Bezug auf alle Kugelelemente zu summiren, welche von diesen beiden Kreisen begrenzt werden.

Bezeichnet A, B, C resp. A', B', C' die Richtungswinkel der Geraden Planet-Erde und Planet-Sonne, so sind die Gleichungen der Polarebenen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x\cos A}{a^2}+\frac{y\cos B}{a^2}+\frac{z\cos C}{b^2} &= 0 \\ \frac{x\cos A'}{a^2}+\frac{y\cos B'}{a^2}+\frac{z\cos C'}{b^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

während die Ausdrücke für den Emanations- und Incidenzwinkel sich so stellen:

$$\cos\varepsilon = \mathrm{M}\cdot\left(\frac{x}{a^2}\cos A+\frac{y}{a^2}\cos B+\frac{z}{b^2}\cos C\right)$$

$$\cos i = \mathrm{M}\cdot\left(\frac{x}{a^2}\cos A'+\frac{y}{a^2}\cos B'+\frac{z}{b^2}\cos C'\right)$$

Es sei gleich hier bemerkt, dass es später vortheilhaft sein wird, statt A', B', C' den Winkel l' einzuführen durch die Relationen:

$$\cos A' = \sin C'\cos l'$$
$$\cos B' = \sin C'\sin l'$$

Die bisher ganz willkührlich gelassenen x und y Axen unseres Coordinatensystems legen wir nun so, dass die Richtung nach der Erde in die xz Ebene fällt. Es ist dann also $B = 90^0$ und $C = 90^0 - A$. Aus

(3) ergeben sich die Richtungswinkel μ, ν, π und μ', ν', π' der Normalen der beiden Polarebenen:

$$\cos\mu = \gamma \cdot \frac{\cos A}{a^2}; \quad \cos\mu' = \gamma' \cdot \frac{\cos A'}{a^2}$$

$$\cos\nu = 0 \qquad ; \quad \cos\nu' = \gamma' \cdot \frac{\cos B'}{a^2}$$

$$\cos\pi = \gamma \cdot \frac{\sin A}{b^2}; \quad \cos\pi' = \gamma' \cdot \frac{\cos C'}{b^2}$$

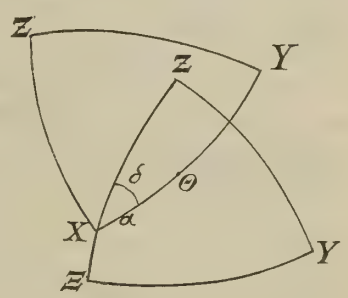
wo selbstverständlich:

$$\gamma = 1 : \sqrt{\frac{\cos^2 A}{a^4} + \frac{\sin^2 A}{b^4}}$$

$$\gamma' = 1 : \sqrt{\frac{\sin^2 C'}{a^4} + \frac{\cos^2 C'}{b^4}}$$

Es soll nun ein zweites Coordinatensystem X, Y, Z mit demselben Anfang wie das erste, eingeführt werden. Die X Axe desselben falle mit der Normalen der Polarebene der Erde zusammen. Die Normale der Polarebene der Sonne, welche mit der neuen X Axe den Winkel α bilde, liege in der XY Ebene des neuen Systems. Bezeichnet noch δ den Winkel zwischen den beiderseitigen xy Ebenen, so ergeben sich zunächst die Beziehungen zwischen den Coordinaten xyz des ersten in der nebenstehenden Figur mit $\Xi Y Z$ bezeichneten und XYZ des zweiten Systemes:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\mu \,.\, X - \sin\mu\cos\delta \,.\, Y - \sin\mu\sin\delta \,.\, Z \\ y &= \quad + \quad \sin\delta \,.\, Y - \quad \cos\delta \,.\, Z \\ z &= \sin\mu \,.\, X + \cos\mu\cos\delta \,.\, Y + \cos\mu\sin\delta \,.\, Z \end{aligned}\right\} (4)$$



Führt man schliesslich die Winkel ϑ und ω ein:

$$X = \varrho \sin\vartheta \cos\omega$$
$$Y = \varrho \sin\vartheta \sin\omega$$
$$Z = \varrho \cos\vartheta$$

so hat man die Summation von dQ auf dieselben Integrationsgrenzen in Bezug auf ϑ und ω zurückgeführt, die bei der gewöhnlichen Ableitung der Lambert'schen Beleuchtungsformel für Kugeln benutzt

werden. Die Grenzen der Integration sind aber für ϑ: 0 bis π und für ω: $\alpha - \frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$. Die Lichtmenge Q, welche das ganze Ellipsoid der Erde zusendet, ist also:

$$Q = I' \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\omega \int_{0}^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \, . f(i,\varepsilon) \cdot \frac{\varrho^3}{M} \tag{5}$$

Nach sehr einfachen Reductionen aber findet sich leicht:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varepsilon &= \frac{M}{\gamma} \cdot \varrho \sin\vartheta \cos\omega \\ \cos i &= \frac{M}{\gamma'} \cdot \varrho \sin\vartheta \cos(\omega - \alpha) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Um schliesslich alle Grössen unter den Integralzeichen durch die Integrationsvariablen ausgedrückt zu erhalten bemerken wir, dass

$$1 = \frac{\varrho^2}{a^2} + z^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}, \quad \frac{1}{M^2} = \frac{\varrho^2}{a^4} + \frac{z^2(a^4 - b^4)}{a^4 b^4}$$

woraus folgt:

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{\varrho}\right)^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2}}}; \quad M\varrho = \frac{a^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{\varrho}\right)^2 \cdot \frac{a^4 - b^4}{b^4}}} \tag{7}$$

$\frac{z}{\varrho}$ wird mit Hülfe der letzten Gleichung (4) bestimmt. Danach hat man zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} p &= \sin\mu \cos\omega + \cos\mu \sin\omega \cos\delta \\ q &= \cos\mu \sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

woraus folgt

$$\frac{z}{\varrho} = p \sin\vartheta + q \cos\vartheta$$

Die Gleichungen (5)—(8) führen die gestellte Aufgabe auf die Berechnung eines Doppelintegrales zurück, welche wir nun in den beiden in der Einleitung angegeben Fällen wirklich durchführen wollen. Zuerst soll das Lambert'sche Gesetz verfolgt werden. Hier ist zu setzen:

$$f(i,\varepsilon) = \cos i \cos\varepsilon$$

Die zugehörige Lichtmenge Q_L wird dann:

$$Q_L = \frac{\Gamma \cdot a^6}{\gamma\gamma'} \cdot \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\omega \,.\cos\omega\cos(\omega-\alpha) \int_0^{\pi} \frac{\sin^3\vartheta\, d\vartheta}{\left[1+\frac{z^2}{\varrho^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2}\right]^2 \cdot \sqrt{1+\frac{z^2}{\varrho^2}\cdot\frac{a^4-b^4}{b^4}}} \qquad \text{(I)}$$

Ferner soll, wie bereits erwähnt, in zweiter Linie als photometrisches Grundgesetz angenommen werden:

$$f(i,\varepsilon) = \frac{\cos i\cos\varepsilon}{\cos i + \lambda\cos\varepsilon}$$

Dasselbe giebt für die zugehörige Lichtmenge Q_N:

$$Q_N = \Gamma.a^4 \cdot \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega\cos\omega\cos(\omega-\alpha)}{\gamma'\cos\omega + \gamma\lambda\cos(\omega-\alpha)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\left[1+\frac{z^2}{\varrho^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2}\right]^2} \qquad \text{(II)}$$

Es wird sich jetzt darum handeln die Integrale (I) und (II) für die numerische Rechnung herzurichten. Es wird hierbei die Rücksicht auf die im Planetensystem wirklich vorkommenden Fälle massgebend sein müssen. Bei den kleineren Planeten Mercur, Venus und Mars kann α zum Theil alle möglichen Werthe zwischen 0^0 und 180^0 annehmen; dagegen ist die Abplattung bei ihnen so klein, dass eine solche überhaupt noch nicht nachgewiesen ist. Man wird deshalb unbedenklich diese Planeten für alle Zwecke der Photometrie als kugelförmig betrachten dürfen. Wollte man indess auf die Abplattung Rücksicht nehmen, so hätte man nach Potenzen derselben zu entwickeln und etwa das erste Glied einer solchen Entwicklung mitzunehmen. Diese Rechnung bietet nicht die mindesten Schwierigkeiten dar, weshalb ich die hier auftretenden Ausdrücke unterdrücke. Anders verhält es sich mit den grossen Planeten. Hier haben die Abplattungen zum Theil sehr beträchtliche Grössen und eine Entwickelung nach Potenzen derselben wäre nicht am Platze. Dagegen tritt hier ein anderer Umstand ein. Der Winkel α ist bei allen diesen Planeten klein und die aus der Phase entstehende Verminderung von Q ist so unbeträchtlich, dass sie, ausser vielleicht bei Jupiter, unbedenklich vernachlässigt werden kann. Es soll indess im

Folgenden nur angenommen werden, dass die dritten Potenzen von α weggelassen werden können. Unter dieser Voraussetzung nun sollen die Formeln weiter entwickelt werden.

2.

Ich beginne damit in (I) $\alpha = 0$ zu setzen. Das Integral lässt sich dann in endlicher Form darstellen, welche Form der weiteren Entwickelungen wegen am besten auf folgendem Wege erreicht wird. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \quad k_1^2 = \frac{a^4 - b^4}{b^4}$$

Dann ist in dem Ausdrucke

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{(1+k^2\xi^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k_1^2\xi^2}} = \frac{1}{(1+k^2)^2(1+k_1^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{k^2}{1+k^2}(1-\xi^2)\right]^2 \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{1+k_1^2}(1-\xi^2)}}$$

$\frac{k^2}{1+k^2}(1-\xi^2)$ und $\frac{k_1^2}{1+k_1^2}(1-\xi^2)$ jederzeit kleiner als 1 und man kann also die Potenzreihe ansetzen:

$$\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (1-\xi^2)^n; \quad \xi = p \sin\vartheta + q \cos\vartheta$$

Die Formel (I) wird so:

$$Q_L^o = \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\omega \cdot \cos^2\omega \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \cdot d\vartheta (1-\xi^2)^n$$

was man auch schreiben kann:

$$Q_L^o = \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \binom{n}{\nu} \mathfrak{K}_\nu; \quad \mathfrak{K}_\nu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\omega \cos^2\omega \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \cdot \xi^{2\nu} \cdot d\vartheta$$

Zufolge des Werthes von ξ erhält man weiter:

$$\xi^{2\nu} = \sum_{\mu=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\mu} \cdot p^\mu q^{2\nu-\mu} \cdot \sin^\mu\vartheta \cos^{2\nu-\mu}\vartheta.$$

und da durch die Integration nach ϑ die Glieder mit ungeraden μ verschwinden, so wird:

$$\mathfrak{R}_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \binom{2\nu}{2\mu} p^{2\mu} q^{2\nu-2\mu} \cdot \cos^2 \omega \, d\omega \int_0^{\pi} \sin^{2\mu+3} \vartheta \cdot \cos^{2\nu-2\mu} \vartheta \cdot d\vartheta$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sin \mu = r, \quad \cos \mu \cos \delta = s \tag{1a}$$

so dass also $p = r \cos \omega + s \sin \omega$ wird, und setzt den bekannten Werth des zweiten Integrales ein, so kann man schreiben:

$$\mathfrak{R}_\nu = 2 \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\mu} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2\nu - 2\mu - 1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2\nu + 3)} \, 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots (2\mu + 2) \, q^{2\nu-2\mu} \times$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega \, (r \cos \omega + s \sin \omega)^{2\mu} \, d\omega$$

Das hier noch auftretende Integral, das für den Augenblick I heissen möge, kann man leicht ausführen, wenn man

$$r = m \cos \varepsilon$$
$$s = m \sin \varepsilon$$

setzt. Es wird dann

$$I = m^{2\mu} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega \cdot \cos^{2\mu} (\omega - \varepsilon) \, d\omega$$

Die einfache Integration ausgeführt, indem man berücksichtigt. dass

$$I = m^{2\mu} \left\{ \sin^2 \varepsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mu} x \, dx + (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mu+2} x \, dx \right\}$$

ergiebt

$$I = \pi \cdot m^{2\mu} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots 2\mu - 1}{2 \cdot 4 \cdot \cdots 2\mu + 2} \cdot \left\{ (2\mu + 1) \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \right\}$$

oder in etwas anderer Form:

$$I = \pi \cdot m^{2\mu-2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots 2\mu - 1}{2 \cdot 4 \cdot \cdots 2\mu + 2} \cdot \left\{ (2\mu + 1) \, r^2 + s^2 \right\}$$

Substituirt man dies in dem obigen Ausdruck für $\mathfrak{K}_\nu$ so wird nach einfacher Rechnung:

$$\mathfrak{K}_\nu = 2\pi \cdot \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \times$$

$$\left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (r^2+s^2)^\mu \cdot q^{2\nu-2\mu} + 2r^2 \sum_{\mu=0}^{\nu} \mu \cdot \binom{\nu}{\mu} (r^2+s^2)^{\mu-1} \cdot q^{2\nu-2\mu} \right\}$$

Die erste Summe ist offenbar $= (r^2+s^2+q^2)^\nu$, die zweite ist $\frac{d}{d(r^2)}(r^2+s^2+q^2)^\nu = \nu \cdot (r^2+s^2+q^2)^{\nu-1}$ und da nach der Definition der betreffenden Grössen (1a) und (8) des vorigen Artikels $r^2+s^2+q^2=1$ ist, so wird

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \cdot (1+2\nu r^2) \text{ und schliesslich}$$

$$Q_L^o = \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{2+4\nu r^2}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$$

Diese Doppelsumme kann aber sofort durch ein ausführbares Integral angegeben werden. Da nämlich:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{1}{2\nu+1}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \cdot x^2 \, dx = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{1}{2\nu+3}$$

so findet sich:

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \cdot \frac{2+4\nu r^2}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$$

$$= (1-r^2) \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx + (3r^2-1) \cdot \int_0^1 (1-x^2)^n x^2 \, dx$$

Hält man dann weiter an der Bedeutung des Entwickelungscoefficienten γ_n fest so wird:

$$Q_L^o = \pi \cdot \frac{\Gamma a^6}{\gamma^2} \left\{ (1-r^2) M + (3r^2-1) N \right\}$$

wenn gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} M &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+k^2x^2)^2\sqrt{1+k_1{}^2x^2}} \\ N &= \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+k^2x^2)^2\sqrt{1+k_1{}^2x^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nach den im Artikel 1) abgeleiteten Formeln ist aber:

$$r^2 = \sin^2\mu = \gamma^2\cdot\frac{\sin^2 A}{b^4};\ \cos^2\mu = \gamma^2\cdot\frac{\cos^2 A}{a^4};\ \ \gamma^2 = 1:\left(\frac{\cos^2 A}{a^4}+\frac{\sin^2 A}{b^4}\right)$$

Hiermit kann man nun die Berechnung von Q_L^0 in folgender einfachen Weise zusammenfassen. Man setze:

$$\frac{M-N}{2} = P;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^4 N = R \qquad (2)$$

dann ergiebt sich

$$Q_L^0 = 2\pi a^2 . I' . \{ P\cos^2 A + R\sin^2 A \} \qquad (I)$$

Hieraus folgt für $A = 0$, also für die Lichtmenge in dem Falle, dass die Erde im Aequator des Planeten stände:

$$Q_L^0(o) = 2\pi a^2 I' . P \qquad (Ia)$$

Die Integrale M und N hängen nur von der Abplattung ab; sie können deshalb ein für allemal berechnet werden. Es ist hierbei nicht unwichtig zu bemerken, dass sich dieselben nach allbekannten einfachen Methoden in geschlossener Form angeben lassen. Setzt man nämlich

$$\frac{b}{a} = \cos\varphi$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} M &= -\tfrac{1}{2}\cos^2\varphi\left\{1-\frac{2+\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\log\text{nat}\,\text{tg}\left((45^0+\frac{\varphi}{2})\right\}\right| \\ N &= -\tfrac{1}{2}\frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi}\left\{1-\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\log\text{nat}\,\text{tg}\left(45^0+\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Ich habe nun nach Formel (2) und (3) für einige Werthe von $\frac{a}{b}$, welche die bei den grossen Planeten vorkommenden Abplattungen umspannen, P und R berechnet. Man findet dieselben in Tafel I zusammengestellt. Es wird vielleicht nicht unnöthig sein zu bemerken, dass für $\frac{a}{b} = 1$, $\log P = \log R = 9.5229 - 10$ wird, wie man sich leicht überzeugt.

Für Jupiter ist $\frac{a}{b} = 1.0612$ zu setzen und hiermit ergiebt die Tafel

$$\log P = 9.4918 - 10; \quad \log R = 9.5330 - 10$$

Für Saturn ist $\frac{a}{b} = 1.1222$. Wegen des Folgenden habe ich gleich

$$Z = P\cos^2 A + R\sin^2 A$$

für die eventuell in Frage kommenden Werthe von A, d. h. von $A = 0$ bis $A = 30^0$ berechnet. Die Logarithmen von Z finden sich ebenfalls in Tabelle I mit aufgeführt.

3.

Es soll nun der allgemeinere Fall behandelt werden, wo α nicht gleich 0 aber doch so klein ist, dass α^3 vernachlässigt werden kann. Es wurde schon oben bemerkt, dass diese Voraussetzung für alle Fälle der Praxis ausreichen wird. Wie eine flüchtige Betrachtung der Entwickelungen des letzten Artikels zeigt, kann man sofort ansetzen:

$$Q_L = \frac{\Gamma a^6}{\gamma\gamma'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mathfrak{K}_\nu$$

$$\mathfrak{K}_\nu = 2 \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\mu} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot(2\nu - 2\mu - 1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot(2\nu + 3)} \cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdot(2\mu + 2)\, q^{2\nu - 2\mu} \cdot I'$$

$$I' = \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega \cos(\omega - \alpha)(r\cos\omega + s\sin\omega)^{2\mu}\, d\omega \qquad (1)$$

Entwickelt man I' nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von α und bleibt bei α^2 stehen,[1]) so wird:

$$I' = I\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) + \alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\omega \sin\omega \,(r\cos\omega + s\sin\omega)^{2\mu}\, d\omega$$

was man bis zu dem angegebenen Genauigkeitsgrad schreiben kann:

$$I' = I\cos\alpha + K\sin\alpha$$

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\omega \sin\omega \,(r\cos\omega + s\sin\omega)^{2\mu}\, d\omega$$

Auf K lässt sich dieselbe Entwicklungsmethode anwenden, welche im vorigen Artikel benutzt worden ist. Behält man die dort gebrauchte Bezeichnung bei, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \cdot \left\{ \cos\alpha \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} m^{2\mu} q^{2\nu-2\mu} \right.$$

$$\left. + 2\, m^2 \cos\varepsilon \cos(\varepsilon - \alpha) \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \mu\, m^{2\mu-2} \cdot q^{2\nu-2\mu} \right\}$$

oder, wenn man die Summation wie früher ausführt:

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \left\{ \cos\alpha + 2\, m^2 \cos\varepsilon \cos(\alpha - \varepsilon) \cdot \nu \right\}$$

Man kann diese Gleichung durch Einführung von σ besser schreiben:

$$\sigma^2 = r^2 + s \cdot r \operatorname{tg}\alpha \qquad (2)$$

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{2\pi}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \cos\alpha \left\{ 1 + 2\sigma^2 \nu \right\}$$

Dieses $\mathfrak{K}_\nu$ unterscheidet sich von dem im vorigen Artikel benutzten $\mathfrak{K}_\nu$ nur durch den Factor $\cos\alpha$ und dadurch, dass an Stelle von r, σ tritt. Lässt man also die Bedeutung der früheren Ausdrücke M, N, P und R gelten, so kann gesetzt werden:

$$Q_L = \pi \cdot \frac{\Gamma a^6}{\gamma\gamma'} \cos\alpha \left\{ (1-\sigma^2) M + (3\sigma^2 - 1) N \right\} \qquad (3)$$

1) Die Mitnahme weiterer Glieder macht übrigens keine Schwierigkeit.

Für die numerische Berechnung lässt sich dieser Ausdruck noch wesentlich vereinfachen. Da nämlich war:

$$r = \sin \mu; \quad s = \cos \mu \cos \delta$$

so folgt aus (2)

$$\sigma^2 \cos \alpha = \sin \mu \{ \sin \mu \cos \alpha + \cos \mu \sin \alpha \cos \delta \}$$

Aus den in Artikel 1 eingeführten Grössen erhellt aber:

$$\cos \pi' = \sin \mu \cos \alpha + \cos \mu \sin \alpha \cos \delta$$
$$\cos \alpha = \cos \mu \cos \mu' + \sin \mu \cos \pi'$$

Hierdurch wird

$$(1 - \sigma^2) \cos \alpha = \cos \mu \cos \mu'; \quad \sigma^2 \cos \alpha = \sin \mu \cos \pi'$$

Ferner folgt aus Artikel 1:

$$\cos \mu \cos \mu' = \gamma\gamma' \cdot \frac{\cos A \cos A'}{a^4}$$
$$\sin \mu \cos \pi' = \gamma\gamma' \cdot \frac{\sin A \cos C'}{b^4}$$

und infolge dessen:

$$Q_L = 2\pi I' a^2 \left\{ \frac{M-N}{2} \cos A \cos A' + \frac{a^4 \sin A \cos C'}{b^4} N \right\}$$

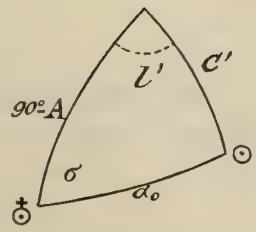
und mit Benutzung der Gleichungen (2) des vorigen Artikels:

$$Q_L = 2\pi I' a^2 \{ P \cos A \cos A' + R \sin A \cos C' \} \qquad \text{(I)}$$

welche Formel an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Wenn auch ihre Berechnung so gut wie gar keine Arbeit macht, so wird die Rücksicht auf die wenig grosse Genauigkeit photometrischer Beobachtungen doch dazu auffordern noch einen Schritt weiter zu gehen und dadurch selbst die geringe erforderte Rechnung ganz zu vermeiden.

Betrachten wir das sphärische Dreieck, welches aus einer um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt beschriebenen Kugel von den Richtungen nach Sonne, Erde und der Z Axe des Coordinatensystems herausgeschnitten wird. Bezeichnet α_0 den sogenannten Phasenwinkel, also den Winkel am Planeten im Dreiecke Erde—Sonne—Planet und σ den Winkel, den die Ebene Planet—Erde—Sonne mit der XZ Ebene bildet, so ist:

$$\cos A' = \sin C' \cos l' = \cos \alpha_0 \cos A - \sin \alpha_0 \sin A \cos \sigma$$
$$\cos C' = \cos \alpha_0 \sin A + \sin \alpha_0 \cos A \cos \sigma$$



also auch:

$$\cos A \cos A' = \cos \alpha_0 \cos^2 A - \sin \alpha_0 \sin A \cos A \cos \sigma$$
$$\sin A \cos C' = \cos \alpha_0 \sin^2 A + \sin \alpha_0 \sin A \cos A \cos \sigma$$

Demzufolge wird die Gleichung (I):

$$Q_L = 2\pi I' a^2 \{ (P \cos^2 A + R \sin^2 A) \cos \alpha_0 + (R - P) \sin \alpha_0 \sin A \cos A \cos \sigma \}$$

Im Allgemeinen scheint nun diese Gleichung kein besonderes Interesse zu verdienen. Sie thut es aber in Anbetracht der Umstände, welche die grossen Planeten darbieten. Das zweite Glied nämlich kann hier unbedenklich vernachlässigt werden. Bei Jupiter und Uranus ist schon $\sin \alpha_0 \sin A$ ein verschwindend kleiner Bruch, aber auch bei Saturn macht das ganze zweite Glied in Folge der Kleinheit der Differenz $R - P$ nur einen Bruchtheil von 1% des ersten Gliedes aus. Man wird demnach wohl stets mit der Formel ausreichen:

$$Q_L = 2\pi I' a^2 \cos \alpha_0 \{ P \cos^2 A + R \sin^2 A \} \qquad \text{(II)}$$

Bezeichnet noch $Q_L^0(0)$ die Lichtmenge für den Fall $\alpha_0 = 0$ und $A = 0$, also für den Fall, dass Erde und Sonne vom Planeten gesehen genau in derselben Richtung und zwar in der Aequatorebene erscheinen, so ist:

$$Q_L^0(0) = 2\pi I' a^2 . P$$

und wenn man

$$Z(A) = \cos^2 A + \frac{R}{P} \sin^2 A$$

nennt, so kann man schliesslich schreiben:

$$Q_L = Q_L^0(0) \cos \alpha_0 \cdot Z(A) \qquad \text{(IIa)}$$

Den Logarithmus von $Z(A)$ für Saturn habe ich ebenfalls in Tafel I aufgenommen.

4.

Ich gehe nun dazu über, die Formel (II) des Artikels 1 zu entwickeln. Ausser den bereits benutzten Bezeichnungen:

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \quad \frac{z}{\varrho} = p \sin\vartheta + q \cos\vartheta$$

werde noch gesetzt

$$p = r\cos\eta; \quad q = r\sin\eta$$

Dann wird die zu behandelnde Gleichung:

$$Q_N = I' a^4 \cdot \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \cdot \cos\omega \cos(\omega-\alpha)}{\gamma' \cos\omega + \gamma\lambda\cos(\omega-\alpha)} \cdot I; \quad I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{[1+r^2k^2\sin^2(\vartheta+\eta)]^2}$$

Der Werth von I findet sich sofort:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x-\eta)\,dx}{(1+r^2k^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+k^2q^2}{[1+k^2(p^2+q^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man noch, anschliessend an die Gleichungen (8) Art. 1, wobei eine Verwechselung des neu eingeführten ν mit dem früher gebrauchten Winkel wohl nicht zu befürchten ist:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sin\nu &= \sin\mu \\ \varrho\cos\nu &= \cos\mu\cos\delta \\ \sigma &= \lambda\frac{\gamma}{\gamma'} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

so kann man schreiben:

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+k^2q^2}{\gamma'} \cdot I' a^4 \cdot \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\cos(\omega-\alpha)}{\cos\omega + \sigma\cos(\omega-\alpha)} \cdot \frac{d\omega}{[1+k^2q^2+k^2\varrho^2\sin^2(\nu+\omega)]^{\frac{3}{2}}} \qquad (2)$$

Setzt man hier zuerst wieder $\alpha = 0$, so hat man, da dann $\gamma' = \gamma$ und $\sigma = \lambda$ wird:

$$Q_N^0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+k^2q^2}{\gamma} \frac{\Gamma a^4}{(1+\lambda)} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\, d\omega}{[1+k^2q^2+k^2\varrho^2\sin^2(\nu+\omega)]^{\frac{3}{2}}}$$

und da sich das Integral sofort ausführen lässt:

$$Q_N^0 = \pi \cdot \frac{\Gamma a^4}{\gamma(1+\lambda)} \cdot \frac{\sqrt{1+k^2q^2+k^2\varrho^2\cos^2\nu}}{1+k^2(q^2+\varrho^2)}$$

Weil nun weiter $q^2+\varrho^2=1$, $q^2+\varrho^2\cos^2\nu = \cos^2\mu$ und ferner nach Art. 1

$$\cos\mu = \gamma \cdot \frac{\cos A}{a^2}, \quad \gamma = \frac{a^2}{\sqrt{1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\sin^2 A}}$$

so erhält man sofort

$$Q_N^0 = \frac{\pi\, ab\, \Gamma}{1+\lambda} \cdot \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 A}$$

Ist weiter $Q_N^0(0)$ die Lichtmenge für $A=0$ so ist

$$Q_N^0(0) = \frac{\pi\, ab\, \Gamma}{1+\lambda} \tag{3a}$$

und also:

$$Q_N^0 = Q_N^0(0) \cdot \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 A} \tag{3}$$

Die Ableitung dieser Formel ist nur zur Controlle geschehen. Denn da für $\alpha=0$ die Planetenscheibe sich als gleichmässig helle Ellipse mit den Halbaxen a und b' darstellt, so muss sein

$$Q_N^0 = \frac{\pi\, ab'\, \Gamma}{1+\lambda}$$

und nun ist in der That

$$b' = a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 A} = b\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 A}$$

Zur Behandlung des allgemeinen Falles, der ebenfalls auf geschlossene Formen führt, werde das Integral in (2) mit I bezeichnet, so dass:

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+k^2q^2)\,\Gamma a^4}{\gamma'} \cdot I \tag{4}$$

Durch Einführung der Hülfsgrössen:

$$\left.\begin{aligned} n\cos\varphi &= 1+\sigma\cos\alpha \\ n\sin\varphi &= \sigma\sin\alpha \\ \varepsilon^2 &= \frac{k^2\varrho^2}{1+k^2\varrho^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

wird:

$$I = \frac{1}{n(1+k^2q^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\omega\cos(\omega-\alpha)\,d\omega}{\cos(\varphi-\omega)\cdot[1+\varepsilon^2\sin^2(\nu+\omega)]^{\frac{3}{2}}}$$

Führt man die neue Integrationsvariable $x = \nu+\omega$ ein, benutzt die Identität:

$$\frac{\cos(x-\nu)\cdot\cos(x-\nu-\alpha)}{\cos(x-\nu-\varphi)} = \cos(x-\nu+\varphi-\alpha)+\frac{\sin\varphi\sin(\varphi-\alpha)}{\cos(x-\nu-\varphi)}$$

und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} K &= \int_{-\frac{\pi}{2}+\nu+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\nu}\frac{\cos(x-\nu+\varphi-\alpha)\,dx}{(1+\varepsilon^2\sin^2x)^{\frac{3}{2}}} \\ L &= \int_{-\frac{\pi}{2}+\nu+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\nu}\frac{dx}{\cos(x-\nu-\varphi)(1+\varepsilon^2\sin^2x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

so wird

$$I = \frac{1}{n(1+k^2q^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{K+\sin\varphi\sin(\varphi-\alpha)\,L\right\}$$

und schliesslich nach (4):

$$Q_N = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Gamma a^4}{n\gamma'\sqrt{1+k^2q^2}}\left\{K+\sin\varphi\sin(\varphi-\alpha)\,L\right\} \qquad (7)$$

Das Integral K kann sofort ausgeführt werden. Nach bekannten Methoden und nach kurzer Zwischenrechnung findet sich:

$$K = \cos(\nu+\alpha-\varphi)\left[\frac{\cos\nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}}+\frac{\cos(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}}\right]$$
$$+\frac{\sin(\nu+\alpha-\varphi)}{1+\varepsilon^2}\left[\frac{\sin\nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}}+\frac{\sin(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}}\right] \qquad (8)$$

In gleicher Weise kann man L in geschlossener Form darstellen. Zur Erlangung dieser sind allgemein bekannte Reductionen vorzunehmen. Für unsere Zwecke wird es genügen das erhaltene Resultat zu verificiren. Jedenfalls ist es auf diese Weise möglich die Mittheilung etwas verwickelter Formeln zu vermeiden. Zu diesem Zwecke bilde ich also folgende Ausdrücke:

$$X_0 = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \sin^2 x}}; \quad X_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \sin^2 x}}$$

$$f = \frac{\cos(\nu+\varphi)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2(\nu+\varphi)}}; \quad f' = \frac{\sin(\nu+\varphi)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2(\nu+\varphi)}}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon^2}{\cos(\nu+\varphi)} f^2 \cdot X_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{f}{\cos(\nu+\varphi)}\right)^3 \log \text{nat}\left(\frac{f+X_0}{f-X_0}\right)$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)\sin(\nu+\varphi)} f'^2 X_1 - \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{f'}{\sin(\nu+\varphi)}\right)^3 \log \text{nat}\left(\frac{f'+X_1}{f'-X_1}\right)$$

Dann giebt die Differentiation nach x, die sich recht einfach ausführen lässt:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dx} = \frac{\cos(\nu+\varphi)\cos x}{[\cos^2(\nu+\varphi) - \sin^2 x](1+\varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dx} = -\frac{\sin(\nu+\varphi)\sin x}{[\cos^2(\nu+\varphi) - \sin^2 x](1+\varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

und hieraus:

$$\frac{d(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{dx} = \frac{\cos(\nu+\varphi+x)}{[\cos^2(\nu+\varphi) - \sin^2 x](1+\varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

und weil

$$\cos(x+\nu+\varphi)\cos(x-\nu-\varphi) = \cos^2(\nu+\varphi) - \sin^2 x$$

so ist man jetzt in der That auf die gewünschte Form gekommen, indem:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = \int \frac{dx}{\cos(x-\nu-\varphi)(1+\varepsilon^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Vorschriften zur Berechnung des bestimmten Integrales L gestalten sich jetzt so: Man setze:

$$\frac{\cos(\nu+\varphi)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\varphi)}}=f;\quad \frac{\sin(\nu+\varphi)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\varphi)}}=f'$$

$$\frac{\cos(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}}=g;\quad \frac{\sin(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}}=g'$$

$$\frac{\cos\nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}}=h;\quad \frac{\sin\nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}}=h'$$

dann ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} L=&\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\varphi)}}f(g+h)-\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\varphi)}}f'(g'+h')\\ &+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\varphi)}}\right)^3\log\frac{(f+g)(f'+g')(f+h)(f'+h')}{(f-g)(f'-g')(f-h)(f'-h')}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Die Gleichungen (7) (8) und (9) enthalten die vollständige und strenge Lösung der gestellten Aufgabe. Es ist vielleicht nicht überflüssig noch hinzuzufügen, dass sich (8) mit Hülfe der eingeführten Grössen einfacher gestalten lässt, nämlich:

$$K=\cos(\nu+\alpha-\varphi)(g+h)+\frac{\sin(\nu+\alpha-\varphi)}{1+\varepsilon^2}(g'+h')\qquad(10)$$

Die gewonnenen Formeln sind, wenn sie auch in sehr übersichtlicher Gestalt erscheinen, doch für eine numerische Rechnung recht weitläufig. Man kann in dieser Beziehung selbstverständlich noch beträchtliche Vereinfachungen erreichen. Diese Absicht soll aber nicht weiter verfolgt werden, weil wir, wie oftmals erwähnt, nur den Fall kleiner α oder sehr kleiner ε zu berücksichtigen haben und hierbei für die Praxis sehr weitgehende Vernachlässigungen gestattet werden sollen. Die für diese Zwecke ausreichenden Formeln lassen sich nun aber in eine äusserst einfache Gestalt bringen.

Zuerst mag der Fall hervorgehoben werden, wo bereits ε^2 fortgelassen werden kann. Die Formeln geben dann die Beleuchtung einer Kugel. Für $\varepsilon^2=0$ wird aber:

$$L = \log \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha-\varphi}{2}\right) \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$$

$$K = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)$$

$$Q_N = \frac{\pi}{2}\cdot I' a^2 \left\{ \frac{2\cos(\frac{\alpha}{2}-\varphi)\cos\frac{\alpha}{2}}{n} - \frac{\sin\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{n} \log\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\varphi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right\}$$

Für $\alpha = 0$, also volle Beleuchtung, wird hieraus:

$$Q_N^0 = \pi \cdot \frac{\Gamma a^2}{1+\lambda}$$

und der Quotient beider Quantitäten wird:

$$\frac{Q_N}{Q_N^0} = \frac{1+\lambda}{2}\cdot\left\{\frac{2(1+\lambda)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{n^2} - \frac{\lambda\sin^2\alpha}{n^3}\log\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\varphi}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right\} \qquad (11)$$

während nach (5), weil hier $\sigma = \lambda$ ist:

$$n^2 = 1+\lambda^2+2\lambda\cos\alpha$$

Schliesslich verdient aus physikalischen Gründen die Annahme $\lambda = 1$ eine besondere Beachtung. Dann wird aber $n = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ und für diesen speciellen Werth:

$$D = \frac{Q_N}{Q_N^0} = 1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\log\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4} \qquad (11\,a)$$

Die zuletzt angeführten Formeln für die Beleuchtung einer Kugel habe ich bereits in dem oben citirten Aufsatze in der „Vierteljahrsschrift“ abgeleitet. Es wird für manche Zwecke bequem sein, wenn man den Werth (11a) aus einer Tafel entnehmen kann. Eine solche Tabelle (II) ist am Schlusse dieser Abhandlung gegeben. Ich habe der leichteren Interpolation wegen die Zahlen, nicht die Logarithmen, angesetzt.

Wenn wir nun die Verhältnisse der einzelnen grossen Planeten näher betrachten, so ergeben sich für die Anwendung der im Vorstehenden enthaltenen Formeln folgende Vorschriften.

Bei Uranus und Neptun wäre es ganz überflüssig, auf die Phase Rücksicht zu nehmen. Es ist also nach Formel (3) zu rechnen.

Die Abplattung des Saturn ist so beträchtlich, dass es nothwendig wird, in dieser Beziehung keine Vernachlässigungen zuzulassen. Dagegen ist α sehr klein, im Maximum etwa $6^1/_2$ Grad. So kommt es, dass die vom Saturn der Erde zugesandte Lichtmenge niemals um mehr als etwa um $1^0/_0$ infolge der Phase variirt. Es wäre also bei diesem Planeten ohne Zweifel erlaubt, einfach die Formel (3) anzuwenden. Wesentlich genauer und beinahe ebenso wenig Mühe verursachend ist es jedoch, wenn man die Formel (11) benutzt, hierin aber für Q_N^0 den Werth aus (3) einsetzt. Bezeichnet man demgemäss die rechte Seite von (11) einfach mit D, so wird:

$$Q_N^0(0) = Q_N \cdot \frac{1}{D \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}} \qquad (12)$$

Hierin bedeutet also Q_N die vorhandene Lichtquantität, $Q_N^0(0)$ diejenige für volle Beleuchtung und für den Fall, dass $A = 0$ also die Erde und Sonne in der Aequatorebene des Planeten stände. Die Grösse D kann einfach genug berechnet werden. Bei dem minimalen Einfluss, den sie überhaupt ausübt, wird der specielle Werth von λ gar nicht in Frage kommen und da ausserdem die Annahme $\lambda = 1$ sehr viel für sich hat, soll gesetzt werden:

$$D = 1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \log \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{4}$$

Im Folgenden ist Formel (12) durchaus zur Anwendung gekommen. Man findet den Logarithmus von $\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 A}$ in Tabelle I mit aufgeführt, während D, wie schon erwähnt, in Tabelle II gegeben ist.

Für Jupiter wird die Reductionsformel noch einfacher. Bei diesem Planeten ist nämlich A in extremen Fällen etwa 3 Grad und $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$ ungefähr 0. 1. Demzufolge wird es stets erlaubt sein zu setzen:

$$Q_N^0(0) = Q_N^0 = \frac{\pi a b \Gamma}{1 + \lambda}$$

Das Glied, welches L enthält, ist wegen des kleinen Factors sehr klein und es wird deshalb ohne Zweifel gestattet sein in L, $\varepsilon^2 = 0$

zu setzen. Um die Verhältnisse bei K vollständig zu übersehen, muss erst eine kleine Umformung mit diesem Ausdrucke vorgenommen werden.

Mit Hülfe der Gleichungen (8) und (5) kann man K die Gestalt geben:

$$nK = [\cos(\nu+\alpha)+\sigma\cos\nu]\left[\frac{\cos\nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}}+\frac{\cos(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}}\right]$$

$$+\frac{1}{1+\varepsilon^2}[\sin(\nu+\alpha)+\sigma\sin\nu]\left[\frac{\sin\nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}}+\frac{\sin(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}}\right]$$

was man auch so schreiben kann:

$$nK = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left\{(\sigma+\cos\alpha)\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}-\frac{\varepsilon^2\sin\alpha\sin\nu\cos\nu}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}}\right\}$$

$$+\frac{1}{1+\varepsilon^2}\left\{(1+\sigma\cos\alpha)\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}+\sigma\frac{\varepsilon^2\sin\alpha\sin(\nu+\alpha)\cos(\nu+\alpha)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}}\right\}$$

Die beiden mit $\varepsilon^2\sin\alpha$ multiplicirten Glieder sind bei Jupiter deshalb zu vernachlässigen, weil auch noch $\sin\nu$ und $\sin(\nu+\alpha)$ kleine Brüche sind. Es wird dann:

$$nK = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left\{(\sigma+\cos\alpha)\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu}+(1+\sigma\cos\alpha)\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)}\right\}$$

Mit Hülfe von (1) und (5) und der in Art. 1 vorkommenden Figur findet sich aber ohne Mühe:

$$\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\nu} = \frac{\sqrt{1+k^2\cos^2\mu}}{\sqrt{1+k^2q^2}}$$

$$\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2(\nu+\alpha)} = \frac{\sqrt{1+k^2\sin^2\pi'}}{\sqrt{1+k^2q}}; \qquad \frac{1}{1+\varepsilon^2} = \frac{1+k^2q^2}{1+k^2}$$

und hiermit:

$$\frac{nK}{\sqrt{1+k^2q^2}} = \frac{1}{(1+k^2)}\cdot\left\{(\sigma+\cos\alpha)\sqrt{1+k^2\cos^2\mu}+(1+\sigma\cos\alpha)\sqrt{1+k^2\sin^2\pi'}\right\}$$

$\cos^2\mu$ und $\sin^2\pi'$ darf, dem obigen zufolge, $=1$ gesetzt werden, ebenso ist genügend genau $\sigma=\lambda$ und demnach:

$$\frac{nK}{\sqrt{1+k^2q^2}} = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{1+k^2}}(1+\lambda) = \frac{2b}{a}\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\cdot(1+\lambda)$$

Setzt man dies in (7) ein, so wird, da im zweiten Gliede die Abplattung vernachlässigt wird,

$$Q_N = \frac{\pi}{2} \cdot I' a^2 \cdot \left\{ \frac{b}{a} \frac{(1+\lambda) \cdot 2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{n^2} - \frac{\sin(\alpha-\varphi)\sin\varphi}{n} \cdot \log \operatorname{cotg} \frac{\alpha-\varphi}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \right\}$$

Setzen wir schliesslich auch in dieser Formel $\lambda = 1$, so ist:

$$Q_N = \frac{\pi}{2} I' a b \cdot D$$

Dem früheren analog werden wir $Q_N^0(0) = \frac{\pi}{2} I' a b$ annehmen müssen, so dass

$$Q_N^0(0) = Q_N \cdot \frac{1}{D} \qquad (13)$$

Die etwas umständliche Ableitung dieser höchst einfachen und leicht zu übersehenden Relation war nicht unnöthig zur Erkenntniss dessen, was eigentlich in der obigen Formel vernachlässigt worden ist. Ausserdem dürften die angewandten Formeln andeuten, in welcher Weise auch im allgemeinen Falle eine Umgestaltung der in (7) vorkommenden Grössen erzielt werden kann.

5.

Es ist hier der Ort, über den Begriff der Albedo einige Worte zu sagen. Die gewöhnliche Definition dieses Begriffes ist in Rücksicht auf die Anwendung des Lambert'schen Gesetzes eingerichtet und muss durch eine andere ersetzt werden, wenn andere photometrische Gesetze benutzt werden. Einige Willkür ist natürlich hierbei nicht zu umgehen. Mir scheinen indessen die in dem Folgenden enthaltenen (bereits in meinem Aufsatze in der V.-S. vorkommenden) Vorschläge nicht unzweckmässig zu sein.

Ein Flächenelement $d\sigma$ möge bei senkrechter Beleuchtung von einem leuchtenden Punkte in der Entfernung 1 die Lichtmenge $L.d\sigma$ erhalten. Dann erhält es bei dem Incidenzwinkel i die Lichtmenge $L\cos i.d\sigma$. Denn das beliebige Beleuchtungsgesetz kann so aufgefasst werden, als ob nach demselben n u r die Oberflächenelemente Licht empfangen und

wieder abgeben. In der That wurde im Früheren auch für die Lichtmenge dQ, welche von einem Elemente $d\sigma$ ausgesandt wird, der Werth:

$$dQ = \gamma L d\sigma . f(i, \varepsilon) \qquad (1)$$

angenommen, wenn man $I' = \gamma L$ setzt. Diese Lichtmenge (1) strahlt also das Element in der Richtung des Emanationswinkels ε aus und alle Elemente einer mit dem Radius 1 um $d\sigma$ beschriebenen Halbkugel erhalten Licht nach Massgabe dieser Formel. Die ganze Halbkugel erhält also die Lichtmenge:

$$2\pi d\sigma . \gamma L . \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(i, \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\varepsilon$$

während dem obigen zufolge $d\sigma$ die Lichtmenge $L . d\sigma . \cos i$ empfangen hat. Das Verhältniss μ' der ausgestrahlten zur empfangenen Lichtmenge ist daher:

$$\mu' = 2\pi\gamma \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(i, \varepsilon)}{\cos i} \sin \varepsilon \, d\varepsilon \qquad (2)$$

Dieses μ' entspricht der Grösse, welche Lambert Albedo genannt hat. Man sieht aber, dass im Allgemeinen μ' noch vom Incidenzwinkel i abhängt und die Albedo also keine der betreffenden Substanz eigenthümliche Zahl sondern eine gewisse Funktion von i ist. Nur in dem speciellen Falle, dass $f(i, \varepsilon) = \cos i f_1(\varepsilon)$, wo f_1 eine beliebige Funktion bedeutet, liefert demnach diese Definition der Albedo einen brauchbaren Ausdruck, was u. A. beim Lambert'schen Gesetze stattfindet, bei welchem $f_1(\varepsilon) = \cos \varepsilon$ ist.

Man kann nun selbstverständlich auf sehr verschiedene Weise durch eine neue und genügendere Definition einen dem früheren Begriff Albedo entsprechenden einführen.

Welche Entscheidung man in dieser Beziehung trifft, ist natürlich ziemlich gleichgültig. Es wird aber eine ganz bestimmte Convention dringend erwünscht sein, und ich möchte zu diesem Zwecke folgende Definition der Albedo vorschlagen, die mir aus vielen Gründen die annehmbarste scheint.

Auf den ersten Blick könnte es passend scheinen, unter der Albedo einer Substanz einfach den Werth von μ' für $i = 0$ zu verstehen. Diese Definition ist aber deshalb unpractisch, weil sie einem speciellen Werth von i eine Bevorzugung einräumt, zu welcher gar kein Grund vorliegt. Ich gehe deshalb auf die Mittheilung der aus dieser Definition folgenden Formeln, die sehr leicht hinzuschreiben sind, nicht ein. Vielmehr soll unter der Albedo μ der Mittelwerth sämmtlicher allen möglichen i entsprechenden μ' verstanden werden. Da die Lichtquelle jeden Ort auf einer um $d\sigma$ beschriebenen Halbkugel mit dem Radius 1 annehmen kann, so wird:

$$\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu' \sin i \, d\, i = 2\,\pi\,\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i \, d\, i \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(i, \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\, \varepsilon \qquad (3)$$

Für das Lambert'sche Gesetz ist $f(i, \varepsilon) = \cos i \cos \varepsilon$ zu setzen und es wird:

$$\mu = \gamma\,\pi \qquad (4\,\text{a})$$

Für das zweite im Vorigen zur Anwendung gekommene Gesetz wird:

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon}$$

und demzufolge:

$$\mu = 2\,\pi\,\gamma \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \, d\, i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} d\, \varepsilon$$

und nach Ausführung der einfachen Integration:

$$\mu = \frac{\pi\,\gamma}{\lambda} \cdot \left\{ 1 - \lambda \log \lambda + \frac{(\lambda^2 - 1)}{\lambda} \log (1 + \lambda) \right\} \qquad (4)$$

wo die vorkommenden Logarithmen natürliche sind. Danach wird u. A. für $\lambda = 1$, $\mu = \pi\,\gamma$.

Bezeichnet also der Kürze wegen

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ 1 - \lambda \log \lambda + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \log (1 + \lambda) \right\}$$

und setzt man wieder $I' = \gamma L$ so werden die Gleichungen (4a) und (4):

$$I' = \frac{\mu L}{\pi}$$

$$I' = \frac{\mu L}{\pi} \cdot \frac{1}{\psi(\lambda)}$$

Wendet man dies auf die in den früheren Artikeln gewonnenen Formeln für die Beleuchtung eines Ellipsoides an und zwar Art. 2, (Ia) und Art. 4, (3a), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} Q_L^0(0) &= 2\,a^2 P . \mu L \\ Q_N^0(0) &= \frac{ab}{1+\lambda} \cdot \frac{\mu L}{\psi(\lambda)} \end{aligned}\right\}$$

L ist die Lichtquantität, welche die Sonne einem Flächenelement des Planeten, welches senkrecht gegen die Sonnenstrahlung steht, zusendet. Hat man also die Lichtquantitäten gleich auf die Entfernung eins, sowohl für die Entfernung Planet – Sonne $= r$ als auch Planet – Erde $= \Delta$ dadurch reducirt, dass man die beobachteten Lichtmengen mit $r^2 \Delta^2$ multiplicirt hat, so ist L die durch photometrische Beobachtungen auf der Erde bestimmte Lichtquantität, welche die Sonne uns zusendet.

Als Beispiel mag der Planet Jupiter genommen werden. Ich benutze die von Zöllner „Photometr. Untersuchungen" pg. 133 mitgetheilten Beobachtungen. Die dort unter der Rubrik „log reduc. Helligkeit" angeführten Zahlen können direct als die obigen $Q(0)$ angenommen werden. Die Reduction wegen der Phase wird dem früheren zufolge genügend genau ausgeführt, wenn resp. mit $\frac{1}{\cos \alpha_0}$ und $\frac{1}{D}$ multiplicirt wird. Auf diese Weise ergiebt sich für das Helligkeitsverhältniss Jupiter zu Wega:

α_0	$Q_L^0(0)$	$Q_N^0(0)$
9.0	3.693	3.696
1.2	692	692
4.1	704	705
4.6	671	673
5.1	716	718
8.2	740	743

im Mittel also

$$\log Q_L^0(0) = 3.703 \quad \log Q_N^0(0) = 3.705$$

Nach Zöllner's Messungen ist $\log \frac{\text{Wega}}{\text{Sonne}} = 9.241 - 20$. Es ist also:

$$\log \frac{\text{Jupiter}}{\text{Sonne}} = 2.944 - 10 \text{ resp. } 2.946 - 10$$

und die obigen Gleichungen ergeben:

$$\log(2\,a^2\,P\,\mu) = 2.944 - 10; \quad \log\left(\frac{a\,b}{1+\lambda} \cdot \frac{\mu}{\psi(\lambda)}\right) = 2.946 - 10$$

Hier sind selbstverständlich a und b in der Einheit der Entfernung (also Sonne—Erde) angegeben, sodass:

$$\log a^2 = 3.354 - 10 \quad \log a\,b = 3.329 - 10$$

und nach Art. 2 $\log P = 9.4918 - 10$

Und hiermit nach Lambert's Gesetz

$$\mu = 0.627$$

während die zweite Formel

$$\frac{\mu}{(1+\lambda)\,\psi(\lambda)} = 0.415$$

ergiebt. Wird noch $\lambda = 1$ gesetzt, so ist $\psi(\lambda) = 1$ und

$$\mu = 0.830$$

Zöllner erhält mit dem ersten Werthe nahe übereinstimmend $\mu = 0.624$. Der zweite Werth zeigt auf das deutlichste, wie sehr die Albedobestimmungen der Planeten von dem zu Grunde gelegten photometrischen Grundgesetz abhängig sind und wie gewagt es ist, ohne vorherige genaue Untersuchungen rein experimenteller Natur die bei Planeten gefundenen Albedowerthe mit denen irdischer Substanzen zu vergleichen.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möchte ich noch darauf anfmerksam machen, dass bei einem Planeten die Photometrie die messende Astronomie wesentlich unterstützen kann. Es ist das der Planet Uranus. Bekanntlich ist es immer noch nicht mit absoluter Sicherheit festgestellt,

ob derselbe eine Abplattung zeigt oder nicht. Während ein Theil der Astronomen behauptet, dass Uranus eine starke Abplattung im ungefähren Betrage von 0.1 habe und dass seine Rotationsaxe nahe in der Ecliptik liege, leugnet ein anderer Theil, wozu ich mich meinen Untersuchungen zufolge auch rechnen muss, diese Abplattung gänzlich, oder doch in der angegebenen Grösse [1]). Ist nun wirklich die Abplattung nahe 0.1 und liegt die Rotationsaxe in der Ecliptik, so geben die Formeln Art. 2, (I) und Art. 4, (3) nebst der Tabelle I für $\frac{a}{b} = 1.1111$:

$$\frac{Q_L^0(90)}{Q_L^0(0)} = 1.183; \quad \frac{Q_N^0(90)}{Q_N^0(0)} = 1.111$$

also Variationen in der Lichtquantität von 18 resp. 11 %, die sich durch zahlreiche Beobachtungen gewiss feststellen liessen. Freilich müssten sich die Beobachtungen auf die Zeit eines halben Umlaufes des Uranus ausdehnen; dies ist aber auch bei einer micrometrischen Ausmessung der Planetenscheibe erforderlich.

1) Wenn von einigen Seiten der Versuch gemacht worden ist, diese strittige Frage durch blosses Ansehen des Planeten zu lösen, so genügt es, auf die allerbekanntesten optischen Täuschungen hinzuweisen, welche bei der Beurtheilung von Figuren stets stattfinden, um solchen Versuchen, namentlich genauen Messungen gegenüber, jedwedes Gewicht abzusprechen.

2. Abschnitt.

Beleuchtung des Planeten Saturn.

6.

Es wird sich darum handeln, die photometrischen Beobachtungen, die bei beliebiger Stellung des Ringes gemacht sind, auf den Fall zu reduciren, wo die Erde und Sonne in der Ringebene stehen, der Ring also unsichtbar wird. Die Voraussetzungen, die dem Folgenden zu Grunde liegen, sollen sein: Der Ring habe eine äusserst geringe Dicke und liege in der Ebene des Saturnaequators. Hier werde er begrenzt von zwei mit dem Saturnaequator concentrischen Kreisen. Der Radius des äusseren sei α, der des inneren α'. Ferner werde angenommen, dass sowohl die Lichtmengen als auch die scheinbaren Dimensionen des Saturnsystems bereits auf bestimmte Entfernungen z. B. auf die mittlere Opposition reducirt seien.

Das Saturnsphäroid würde sich, wenn die Erde in seiner Aequatorebene stände, einem Beobachter als eine Ellipse mit den Halbaxen a und b zeigen. In Wirklichkeit werden, wenn A den Elevationswinkel der Erde über der Ringebene bedeutet, a und b' die Halbaxen der elliptischen Planetenscheibe sein, wo

$$b' = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 A};\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad (1)$$

Die Ringgrenzen werden sich als mit der Planetenscheibe concentrische Ellipsen projiciren, deren grosse Halbaxen α und α' und deren kleine:

$$\beta = \alpha \sin A;\ \beta' = \alpha' \sin A$$

sind. Bezeichnet dann R den Flächeninhalt des Ringes (ebenso wie die ganze Figur gleich auf eine zum Visionsradius senkrechte Ebene projicirt gedacht) und Q_R die vom Ringe der Erde zugesandte Lichtmenge, so ist

$$Q_R = R . \Phi(\sin A) \qquad (2)$$

wo Φ eine vorerst ganz unbestimmt gelassene Function bedeutet. Nun werden gewisse Theile der Saturnscheibe vom Ringe und umgekehrt verdeckt. Es sei Q_S die Lichtmenge, welche die Saturnscheibe, wäre sie überall frei, uns zusenden würde, F der Flächeninhalt der Ringtheile, welche vom Saturn bedeckt werden und Q_F die Lichtmenge, welche die vom Ringe verdeckten Theile des Saturn für sich allein uns zusenden würden, schliesslich Q_B die Lichtmenge, die das ganze System uns wirklich zusendet. Dann ist offenbar:

$$Q_B = (R - F)\,\Phi(\sin A) + Q_S - Q_F \qquad (3)$$

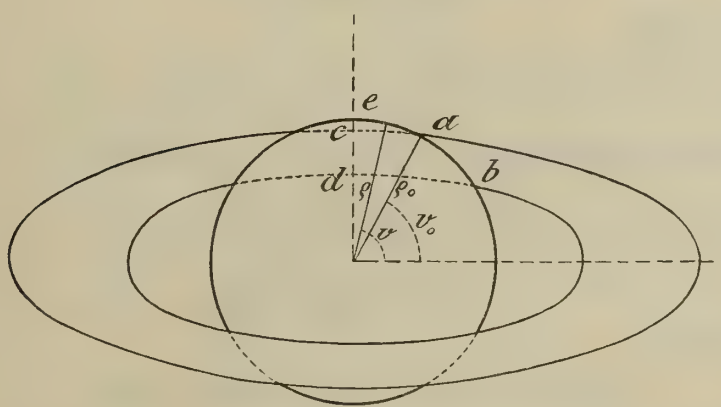
Vorläufig soll auf die Phase und den Schattenwurf keine Rücksicht genommen werden. Es wird also vorausgesetzt, dass Sonne und Erde genau in derselben Richtung stehen.

Zur Berechnung der einzelnen in (3) vorkommenden Grössen bemerken wir zunächst, dass

$$R = \pi(\alpha^2 - \alpha'^2)\sin A$$

Ferner ist (vergl. untenstehende Figur)

$$\tfrac{1}{2}F = (a\,b\,c\,d) = (b\,d\,e) - (a\,c\,e)$$



Bezeichnet man mit ϱ und ϱ_1 die demselben Polarwinkel v zugehörigen Radien in der Ringellipse und in derjenigen, welche die Planetenscheibe darstellt, so ist:

$$2(ace)=\int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}}\varrho_1^2\,dv-\int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}}\varrho^2\,dv=a^2b'^2\int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{b'^2\cos^2v+a^2\sin^2v}-\alpha^2\beta^2\int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{\beta^2\cos^2v+\alpha^2\sin^2v}$$

und zufolge der bekannten Formel:

$$m^2n^2\int\frac{dv}{n^2\cos^2v+m^2\sin^2v}=mn\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m}{n}\operatorname{tg}v\right)$$

$$2(ace)=ab'\cdot\left\{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b'}\operatorname{tg}v_0\right)\right\}-\alpha\beta\cdot\left\{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}v_0\right)\right\}$$

Der Winkel v_0 ist ferner definirt durch die Gleichung:

$$\frac{\cos^2v_0}{a^2}+\frac{\sin^2v_0}{b'^2}=\frac{\cos^2v_0}{\alpha^2}+\frac{\sin^2v_0}{\beta^2},$$

woraus

$$\operatorname{tg}v_0=\frac{b'\beta}{a\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2-a^2}{b'^2-\beta^2}}\qquad(4)$$

Setzt man also

$$\operatorname{tg}f=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2-a^2}{b'^2-\beta^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b'}{a}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2-a^2}{b'^2-\beta^2}}$$

so ergiebt sich:

$$2(ace)=(ab'-\alpha\beta)\frac{\pi}{2}-ab'f+\alpha\beta\varphi$$

In ganz derselben Weise wird man setzen müssen:

$$\operatorname{tg}f'=\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\sqrt{\frac{\alpha'^2-a^2}{b'^2-\beta'^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{b'}{a}\cdot\sqrt{\frac{\alpha'^2-a^2}{b'^2-\beta'^2}}$$

um zu erhalten

$$2(bde)=(ab'-\alpha'\beta')\frac{\pi}{2}-ab'f'+\alpha'\beta'\varphi'$$

und jetzt ergiebt sich:

$$R-F=(\alpha\beta-\alpha'\beta')\frac{\pi}{2}+\alpha\beta\varphi-\alpha'\beta'\varphi'+ab'(f'-f)$$

Nimmt man die Gleichung (1) zu Hülfe, so kann man die Formeln zur Berechnung der im Vorstehenden enthaltenen Hülfsgrössen auch so aufstellen:

$$\mu = \frac{\sqrt{\alpha^2 - a^2}}{b\sqrt{1 + \frac{a^2 e^2 - a^2}{b^2}\sin^2 A}}$$

$$\mu' = \frac{\sqrt{\alpha'^2 - a^2}}{b\sqrt{1 + \frac{a^2 e^2 - \alpha'^2}{b^2}\sin^2 A}}$$

$$\operatorname{tg} f = \mu \sin A \qquad \operatorname{tg} \varphi = \mu\sqrt{1 - e^2\cos^2 A}$$

$$\operatorname{tg} f' = \mu' \sin A \qquad \operatorname{tg} \varphi' = \mu'\sqrt{1 - e^2\cos^2 A}$$

$$R - F = (\alpha^2 - \alpha'^2)\frac{\pi}{2}\sin A + (\alpha^2\varphi - \alpha'^2\varphi')\sin A + a^2\sqrt{1 - e^2\cos^2 A}\cdot(f' - f) \quad (5)$$

Nach diesen Formeln wurden die im Folgenden enthaltenen Zahlen berechnet. Ich führe gleich hier an, dass diesen Rechnungen folgende Werthe zu Grunde gelegt worden sind, welche Mittel aus Beobachtungen von Bessel, Kaiser etc. repräsentiren:

$$\log\frac{b}{a} = 9.94993 - 10$$
$$\log\alpha = 0.35853$$
$$\log\alpha' = 0.18242$$

Die letzteren beiden setzen $a = 1$ voraus. Die α geben die Grenzen des hellen Ringes an; über den sogenannten dunklen Ring soll weiter unten einiges bemerkt werden.

Ich verfolge nun zuerst den Fall, dass die Saturnscheibe nahezu gleichförmig erleuchtet erscheint. Es soll also das zweite der beiden erwähnten photometrischen Grundgesetze zur Anwendung gelangen. Bezeichnet dann $Q(0)$ die Lichtmenge des Saturnsphäroids für $A = 0$, so hat man nach Formel (12) pg. 428

$$Q_S = Q(0)\cdot D\cdot\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2 A}$$

oder wenn die Formel (3a) des Artikels 4 benutzt wird:

$$Q_S = \frac{\pi a b \Gamma}{1 + \lambda}\cdot D\cdot\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2 A}$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass mit jedenfalls ausreichender Genauigkeit gesetzt werden darf [1])

$$Q_F = \frac{F}{ab'\pi} \cdot Q_S = \frac{\Gamma}{1+\lambda} \cdot F \cdot D$$

wodurch Formel (3) sich so gestaltet:

$$Q_B = (R-F)\,\Phi(\sin A) + \frac{\Gamma D}{1+\lambda}\left\{ a\,b\,\pi \cdot \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 A} - F \right\}$$

Setzt man also:

$$X' = \frac{R-F}{a^2}$$

$$Y' = \frac{b}{a}\pi \cdot \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 A} - \frac{F}{a^2}$$

so wird

$$Q_B = a^2\left\{ X'\,\Phi\,(\sin A) + \frac{\Gamma D}{1+\lambda} Y' \right\} \qquad (6)$$

Es wird ferner vortheilhaft sein zu setzen

$$\frac{X'a}{b\pi} = X;\quad \frac{Y'a}{b\pi} = Y;\quad \frac{(1+\lambda)\,\Phi(\sin A)}{\Gamma} = B$$

so dass also

$$Q_B = a\,b\,\pi \cdot \frac{\Gamma}{1+\lambda}\left\{ B\,X + D\,Y \right\}$$

und da

$$Q(0) = \frac{a\,b\,\pi}{1+\lambda}\,\Gamma$$

war, so wird man haben:

$$Q_B = Q(0)\{B\,X + D\,Y\} \qquad (7)$$

Diese Formel gestattet eine höchst einfache Reduction beobachteter Q_B auf verschwundenen Ring. Die Reduction wird namentlich dann einfach, wenn X, Y und D durch Tafeln ein für alle Mal gegeben sind. Solche findet man am Schlusse in Tabelle III. B selbst kann nicht, wie wir sehen werden, als constant gelten. Vielmehr variirt dasselbe in hohem Masse mit dem Phasenwinkel, welche Thatsache den Hauptstützpunkt der vorliegenden Theorie der Beleuchtung des Saturn bildet.

1) Strenge genommen müsste man auch den Umstand berücksichtigen, dass dem angewandten photometrischen Gesetze gemäss eine nicht vollkommen erleuchtete Planetenscheibe nicht in allen Theilen gleich hell erscheint. Dieser Umstand kann aber schon deshalb für die practische Anwendung kaum in Frage kommen, weil Q_F nur einen kleinen Bruchtheil der gesammten Lichtmenge ausmacht.

7.

Wenn es mir auch wahrscheinlich ist, dass die zuletzt gefundene Formel der Wahrheit sehr nahe entspricht, so wird es doch, namentlich auch weil die vorhandenen photometrischen Beobachtungen eine endgiltige Entscheidung noch nicht zulassen, in Anbetracht der in der Einleitung ausgesprochenen Ansichten nicht unnöthig sein, in zweiter Linie auch das Lambert'sche Gesetz auf das Saturnsphäroid anzuwenden.

Das zugehörige Q_S ist in Art. 1 abgeleitet worden. Es erübrigt also noch die Ableitung von Q_F. Ich werde aber zu diesem Zwecke nicht den völlig strengen Ausdruck des Lambert'schen Gesetzes zu Grunde legen, sondern einen genäherten, wodurch die Aufgabe nicht unwesentlich vereinfacht wird. Ich habe übrigens dieselbe Näherung bereits in den beiden oben citirten Aufsätzen über die Photometrie des Saturn in Anwendung gebracht. Betrachten wir zunächst eine voll beleuchtete Kugel mit dem Radius ϱ, welche dem in der sehr grossen Entfernung Δ befindlichen Beobachter als Scheibe vom Radius r erscheint. Auf dieser Scheibe wird nach dem Lambert'schen Gesetze die Helligkeit h in der Mitte am grössten sein und von da bis zum Rande, wo sie $= 0$ wird, gleichmässig abnehmen. Bezeichnet x die scheinbare Winkelentfernung eines Punktes dieser Scheibe von ihrem Mittelpunkte, so wird h proportional sein mit

$$\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{\varrho}\right)^2 \sin^2 x}$$

Da nun für sehr grosse Δ, $r=\frac{\varrho}{\Delta}$ und x ein sehr kleiner Winkel ist, so wird sehr nahe

$$h=\gamma\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} \qquad (1)$$

gesetzt werden können. Für das Ellipsoid soll die analoge Formel angewandt werden, nur soll hier r derjenige Halbmesser der scheinbaren Ellipse sein, auf welchem der durch x bestimmte Punkt liegt. Statt x schreibe ich ϱ, so dass die von einem Flächenelement $d\sigma$ der elliptischen Scheibe der Erde zugesandte Lichtmenge

$$dq=I'd\sigma\sqrt{1-\frac{\varrho^2}{r^2}} \qquad (2)$$

wird. Um eine Uebersicht zu erlangen, wie weit sich die Folgerungen aus (2) unterscheiden von denen, welche aus einer strengen Anwendung des Lambert'schen Gesetzes fliessen, soll die Lichtmenge einer voll erleuchteten Planetenscheibe berechnet werden. Man findet für diese

$$Q' = I' \int_0^{2\pi} dv \int_0^r \varrho\, d\varrho \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}}$$

und da $\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 v}{b'^2}$, wobei die frühere Bezeichnung beibehalten wird, so ergiebt sich sofort

$$Q' = \frac{2}{3} \pi a b' I'$$

Dies ist aber dieselbe Formel, welche bekanntlich Seidel und Zöllner zur Reduction der an Jupiter und Saturn gemachten photometrischen Beobachtungen in Vorschlag gebracht haben. Die Abweichung dieser Formel von der strengen Art 2, (I) gegebenen:

$$Q_L = 2\pi a^2 I' \{ P \cos^2 A + R \sin^2 A \}$$

kann leicht berechnet werden und man sieht dann, dass in der That der begangene Fehler innerhalb der Grösse der Beobachtungsfehler bleibt, indem er im Maximum bis auf etwa $2\frac{1}{2}\,\%$ der gesammten Lichtmenge des Saturnsphäroides steigt. Hier kommt indess nur ein kleiner Bruchtheil dieses Fehlers in Betracht, weil die angegebene Näherung nur zur Berechnung von Q_F dienen soll.

Die Lichtmenge q, welche die Fläche $(a\,c\,e)$ (s. Figur auf pag. 437) der Erde zusendet, wird demnach:

$$q = \frac{\Gamma}{3} \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} dv \,.\, r^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Es ist hierin r_0 der zu dem Winkel v gehörige Halbmesser der äusseren Ringellipse; v_0 hat dieselbe Bedeutung wie in Art. 6. Desgleichen wird, wenn $r_0' v_0'$ die analogen Grössen für den inneren Ringrand bedeuten, die von der Fläche $(b\,d\,e)$ zugesandte Lichtmenge:

$$q' = \frac{\Gamma}{3} \cdot \int_{v_0'}^{\frac{\pi}{2}} dv \cdot r^2 \left(1 - \frac{r_0'^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Und schliesslich ist

$$Q_F = 2(q' - q) \qquad (3)$$

Die Integrale für q und q' lassen sich leicht auf mechanischem Wege berechnen. Ich habe diesen Weg bei der Berechnung der bereits erwähnten Tafel in den A. N. eingeschlagen. Da indessen die zu berechnenden Integrale elliptische sind, ist eine mechanische Berechnung vielleicht nicht practisch, denn in diesem Falle zeigt selbst die bekannte höchst ausgezeichnete Gauss'sche Methode zur näherungsweisen Berechnung von Integralen nur geringe Convergenz. Es wird sich deshalb empfehlen, die Ausdrücke für q und q' auf die üblichen Normalformen elliptischer Integrale zurückzuführen und dann die sehr nützlichen Legendre'schen Tafeln in Anwendung zu bringen.

Nach Art. 6, (4) kann man setzen:

$$m^2 \sin^2 v_0 = \frac{\alpha^2 - a^2}{a^2 \alpha^2}$$

$$m^2 \cos^2 v_0 = \frac{b'^2 - \beta^2}{b'^2 \beta^2}$$

und weil

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 \alpha^2} \cos^2 v = \frac{1}{\beta^2}[1 - \cos^2 A \cos^2 v]$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b'^2} + \frac{b'^2 - a^2}{b'^2 a^2} \cos^2 v = \frac{1}{b'^2}[1 - e^2 \cos^2 A \cos^2 v]$$

$$\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} = m^2(\cos^2 v_0 - \cos^2 v)$$

so lässt sich q so darstellen:

$$q = \frac{\Gamma}{3} m^3 \beta^3 b'^2 \int_{v_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 v_0 - \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2 \cos^2 A \cos^2 v)(1 - \cos^2 A \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}} dv$$

Man erreicht nun die Legendre'schen Normalformen sofort durch die Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2 v_0 - \cos^2 v}{1 - \cos^2 A \cos^2 v} &= \cos^2 v_0 \cos^2 \varphi \\ n = \frac{\cos^2 v_0 \cos^2 A (1 - e^2)}{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0}; \qquad k^2 &= \frac{\cos^2 v_0 \sin^2 A}{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

denn nach einfacher Rechnung ergiebt sich

$$q = \frac{\Gamma}{3} \cdot \frac{m^3 \beta^3 b'^2 \cos^4 v_0}{\sqrt{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \varphi \, d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Man kann diese Formel auch schreiben:

$$q = \frac{\Gamma}{3} \cdot \frac{m^3 \beta^3 b'^2 \cos^4 v_0}{\sqrt{1 - \cos^2 A \cos^2 v_0}} \left\{ \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\left(1 - \frac{n}{1+n} \cos^2 \varphi\right) \sqrt{1 - k^2 \sin \varphi}} + \frac{1 - k^2}{n k^2} K - \frac{1}{n k^2} E \right\} \quad (5)$$

wenn K und E die vollständigen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung mit dem Modulus k bedeuten. Man kann nun sofort die allgemein bekannte Legendre'sche Formel:

$$\sin \gamma \cos \gamma \cdot \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \{ K E(\gamma, k') + (E - K) F(\gamma, k') \}$$

in welcher die gebräuchliche Bezeichnungsweise in Anwendung gebracht ist, benutzen, wenn man in (5) setzt

$$\cos^2 \gamma = \frac{n}{1+n} = \frac{\cos^2 v_0 \cos^2 A (1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 v_0 \cos^2 A}$$

Hierdurch ist die Berechnung von (5) auf elliptische Integrale der 1. und 2. Gattung zurückgeführt und die Benutzung der von Legendre für diese gegebenen Tafeln kann sofort eintreten. Für die im Folgenden ausgeführten Rechnungen war indessen eine weitere Reduction nicht unwichtig, die vorerst noch gegeben werden soll.

Mit Hülfe des in Art. 6 eingeführten Winkels φ wird:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} v_0 = \sin A \operatorname{tg} \varphi; \qquad k' = \sqrt{1-k^2} = \sin\varphi; \qquad k = \cos\varphi \\ n = k^2(1-e^2)\operatorname{cotg}^2 A; \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}\right\} (6)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$X = \frac{\pi}{2} - \cdot\{KE(\gamma,k') + (E-K)F(\gamma,k')\}$$

so wird mit Benutzung der in Art. 6 vorkommenden Relationen:

$$q = \frac{\Gamma}{3}\cdot\frac{(b'^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{b'^2}\cdot a\cdot\left\{\frac{1}{\cos^3\gamma}X + \frac{b'}{n\,a\,k\sin A}(k'^2K - E)\right\}$$

Es lässt sich nun in höchst einfacher Weise die Berechnung sämmtlicher Hülfsgrössen, wenigstens in den Coefficienten von X, K und E vermeiden, wenn man folgende leicht abzuleitende Relationen im Auge behält:

$$\cos\gamma = \frac{(b'^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{b'}; \quad \sin\gamma = \frac{\beta}{b'}; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{b'^2-\beta^2}}{a\cos A\sqrt{1-e^2}}; \quad n = \frac{b'^2-\beta^2}{\beta^2}$$

Hierdurch wird schliesslich:

$$q = \frac{\Gamma}{3}\cdot a^2\sqrt{1-e^2\cos^2 A}\left\{X + \left(\frac{\alpha}{a}\right)^3\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin A\cos A}{1-e^2\cos^2 A}[\sin^2\varphi\,K - E]\right\}$$

und für q' folgt natürlich durch blosse Buchstabenvertauschung der entsprechende Ausdruck.

Alles, was für die numerische Rechnung nöthig ist, wird man jetzt so zusammenstellen können.

Die Winkel φ und φ' sind schon früher berechnet worden. Ferner hat man

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg} A}{\cos\varphi\sqrt{1-e^2}} \qquad M = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^3\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin A\cos A}{1-e^2\cos^2 A}$$

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{\operatorname{tg} A}{\cos\varphi'\sqrt{1-e^2}}$$

$$k = \cos\varphi \qquad k' = \sin\varphi$$

$$k_1 = \cos\varphi' \qquad k_1' = \sin\varphi'$$

$$Z = K E(\gamma, k') + (E - K) F(\gamma, k') \qquad (\text{mod. } k)$$
$$Z' = K_1' E(\gamma', k_1') + (E_1 - K_1) F(\gamma', k_1') \qquad (\text{mod. } k_1)$$
$$Z = \sin^2 \varphi K - E; \quad Z' = \sin^2 \varphi' K_1 - E_1$$

und schliesslich

$$Q_F = \frac{2}{3} \Gamma a^2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 A} \{ Z - Z' + M(Z' - Z) \} \qquad (7)$$

Nach dieser Formel ist in der That die gleich zu erwähnende Tabelle berechnet worden.

Um nun wieder die Gesammtlichtmenge Q_B des ganzen Saturnsystems mit der des Saturnkörpers allein für den Werth 0 des Phasenwinkels α und für $A = 0$, welche $Q(0)$ heissen möge, in Verbindung zu setzen, haben wir einfach die Formeln der Art. 3 und Art. 6, (3) zu berücksichtigen.

Zuerst ist das in letzterer Gleichung vorkommende Q_S: (Art. 3, (IIa))

$$Q_S = Q(0) \cos \alpha . Z(A); \quad Z(A) = 1 + \frac{R - P}{P} \sin^2 A \ ^1)$$
$$Q(0) = 2 \pi a^2 \Gamma . P$$

und demzufolge darf nach Art. 6, (3) und früheren Bemerkungen gesetzt werden:

$$Q_B = Q(0) \left\{ \frac{R - F}{Q(0)} \cdot \Phi(\sin A) + \left(Z(A) - \frac{Q_F}{Q(0)} \right) \cos \alpha \right\}$$

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned} X_L &= \Gamma \frac{R - F}{Q(0)} = \frac{R - F}{2 \pi a^2 P} \\ Y_L &= Z(A) - \frac{Q_F}{Q(0)} \\ \frac{\Phi(\sin A)}{\Gamma} &= B_L \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

so ist schliesslich:

$$Q_B = Q(0) \cdot \{ B_L X_L + Y_L \cos \alpha \} \qquad (II)$$

Die Grössen X_L und Y_L können ein für alle Mal berechnet werden. Dies ist geschehen und man findet das Resultat dieser Rechnung in Tabelle IV zusammengestellt.

1) Es ist wohl keine Verwechselung zwischen den beiden mit R bezeichneten Grössen möglich.

Ich habe diese Tafel, wie schon erwähnt, bereits in No. 2639 der A. N. mitgetheilt. Dieselbe stimmt mit der hier gegebenen bis auf ganz geringfügige Abweichungen völlig überein, obwohl beide mit Hülfe ganz verschiedener Methoden berechnet worden sind. Ich habe indessen a. a. O. in der allgemeinen Formel das Albedoverhältniss $\frac{\mu'}{\mu}$ des Ringes und des Saturnkörpers eingeführt, was aus der Annahme eines ganz bestimmten photometrischen Grundgesetzes folgte. Diese Specialisirung habe ich hier nicht ausgeführt, da hierdurch das nähere Eingehen auf die physikalische Constitution des Ringes erforderlich gewesen wäre und von einem Albedowerth desselben, welcher mit dem fester Substanzen direct vergleichbar ist, insofern nicht mehr die Rede sein kann, als ein solcher Vergleich nur zu Missverständnissen Anlass geben kann. Ausserdem wurde auch, physikalischen Vorstellungen mehr Rechnung tragend, die gleichförmige Beleuchtung nicht mehr aus einer nur dieses Verhalten ausdrückenden Formel gefolgert, sondern aus einem gewissen photometrischen Grundgesetze, welches jedenfalls tiefer begründet erscheint.

8.

Es erübrigt noch den Schattenwurf des Saturn auf den Ring und umgekehrt in Rechnung zu ziehen. Es ist kaum zweifelhaft, dass es der Genauigkeit, mit welcher gegenwärtig derartige photometrische Beobachtungen angestellt werden können, vollständig entsprechend ist, wenn man auf diese Umstände keine Rücksicht nimmt. Wenn trotzdem auf diesen Punkt näher eingegangen werden soll, so geschieht dies nicht sowohl in der Absicht, hierdurch etwa einige Vollständigkeit in der Theorie der Beleuchtung des Saturns zu erreichen, vielmehr deshalb, weil sich, wie ich zeigen werde, im Grossen und Ganzen der Schattenwurf ziemlich einfach berechnen lässt, wenn die im Folgenden enthaltenen Hülfsmittel vorliegen. Ueberdies beträgt doch der hier zu besprechende Einfluss einige Procente der Gesammtlichtmenge und es wäre nicht unmöglich, dass bei weiteren Fortschritten in der practischen Photometrie diese in Frage kämen. Es wird übrigens ohne Zweifel gestattet sein, bei der Behandlung der Aufgabe ziemlich weitgehende Vereinfachungen einzuführen und es soll von dieser Erleichterung in gewissem Sinne Gebrauch gemacht

werden. Vor Allem werde ich nur die Annahme in Betracht ziehen, dass die Saturnscheibe überall gleich hell erscheint, weil dann die Formeln etwas einfacher werden und diese Annahme voraussichtlich der Wahrheit näher liegt, als die Folgerungen aus dem Lambert'schen Gesetze. Ferner werde ich auf die Abplattung des Saturn bei der Ableitung der Schattengrenze nicht durchgehends Rücksicht nehmen, was gewiss vollständig hinreichen wird.

Zuerst soll der Schattenwurf des Ringes auf den Saturnkörper berechnet werden. Der in Betracht zu ziehende Rand des Ringes ist ein Kreis mit dem Radius α. Man lege nun ein Coordinatensystem zu Grunde, wie es schon früher benutzt worden ist, dessen Anfang mit dem Saturncentrum, dessen $x'y'$Ebene mit der Ringebene zusammenfällt und in dessen $x'z'$Ebene sich die Erde befindet. A sei wie früher der Elevationswinkel der Erde, $A'B'C'$ die Richtungswinkel nach der Sonne, so ist die Gleichung des von der Sonne erzeugten Schattencylinders:

$$\left(x' - z' \frac{\cos A'}{\cos C'}\right)^2 + \left(y' - z' \frac{\cos B'}{\cos C'}\right)^2 = \alpha^2$$

Dreht man das Coordinatensystem, so dass die Erde in der neuen X Axe sich befindet und bezeichnet die neuen Coordinaten mit $x\,y\,z$, so ist:

$$x' = x \cos A - z \sin A$$
$$z' = x \sin A + z \cos A$$
$$y' = y$$

Die Gleichung des genannten Cylinders wird dadurch:

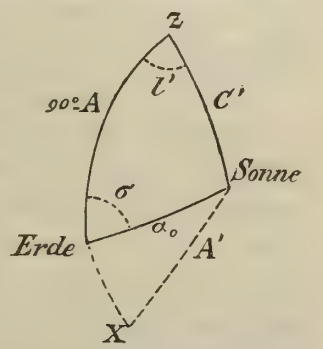
$$\left\{ x\left[\cos A - \sin A \cdot \frac{\cos A'}{\cos C'}\right] - z\left[\sin A + \cos A \cdot \frac{\cos A'}{\cos C'}\right] \right\}^2 + \left[y - \frac{\cos B'}{\cos C'}(x \sin A + z \cos A)\right]^2 = \alpha^2 \quad (1)$$

Der Durchschnitt dieses Cylinders mit dem Saturnsphäroide:

$$\frac{y^2}{a^2} + \left(\frac{x \cos A - z \sin A}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \sin A + z \cos A}{b}\right)^2 = 1$$

ist die Schattengrenze des Ringes auf dem Saturn. Wird aus beiden Gleichungen x eliminirt, so erhält man die Gleichung der Projection

dieser Curve in der YZEbene, also derjenigen Curve, welche der Erde als Schattengrenze erscheint. Bei Ausführung dieser Elimination soll nun angenommen werden, dass der Winkel α_0 (Winkel am Saturn im Dreiecke Sonne—Erde—Saturn) so klein ist, dass seine zweite Potenz fortgelassen werden kann und ferner soll für den Planeten eine Kugel mit dem Radius a substituirt werden. Gebraucht man dann die Bezeichnungen, wie sie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich sind, so ergiebt sich



$$\sin\alpha_0\cos\sigma = \cos C'\cos A - \sin A\cos A'$$

$$\cos\alpha_0 = \cos C'\sin A + \cos A\cos A'$$

und (1) kann geschrieben werden:

$$(x\sin\alpha_0\cos\sigma - z\cos\alpha_0)^2 + [y\cos C' - \cos B'(x\sin A + z\cos A)]^2 = a^2\cos^2 C' \quad (2)$$

Wegen des Folgenden scheint es bequemer $-z$ statt z zu setzen d. h. die ZAxe des Coordinatensystems auf der südlichen Seite der Ringebene anzunehmen, wenn A den Elevationswinkel der Erde nach der positiven Seite gerechnet bedeutet. Es ist weiter klar, dass wir, ohne die Allgemeinheit zu gefährden, A stets als positiv annehmen können.

Zunächst soll aber die etwas verwickelte Elimination nicht ausgeführt werden, vielmehr setzen wir aus Gründen, die weiter unten besprochen werden, an Stelle der Projection der eigentlichen Schattengrenze die Durchschnittscurve zwischen dem Cylinder (1) und der YZEbene. Wird also in (2) $x = 0$ gesetzt und lässt man die höheren Potenzen von α_0 fort, so wird

$$z^2 + y^2\cos^2 C' + 2yz\cos A\sin C'\cos C'\sin l' = a^2\cos^2 C' \quad (3)$$

und diese Curve soll vorläufig als die genannte Schattengrenze gelten.

Es ist das zugleich die Gleichung der Schattengrenze in der scheinbaren Figur, wenn α den Ringradius in dem entsprechenden Masse ausgedrückt bedeutet. Die YAxe des in dieser Weise aufgefassten Coordinatensystemes liegt also im Aequator der Saturnscheibe, die ZAxe nach Süden zu. In Bezug auf dasselbe System ist aber nach den im Früheren durchweg festgehaltenen Bezeichnungen die Gleichung der Begrenzung der Planetenscheibe:

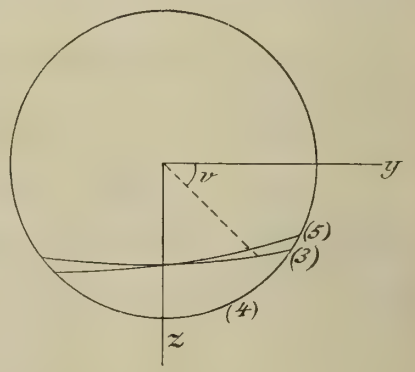
$$z^2 + b'^2\cdot\frac{y^2}{a^2} = b'^2 \quad (4)$$

und diejenige der Ellipse, welche die Ringbegrenzung darstellt:

$$z^2 + y^2 \sin^2 A = a^2 \sin^2 A \qquad (5)$$

Das vom Ringe beschattete Flächenstück der Saturnscheibe, welches in Abzug gebracht werden muss, ist demnach begrenzt von den 3 Ellipsen (3), (4) und (5).

Sind r und r' die zu dem Winkel v gehörenden Radii-vectores der beiden Curven (5) und (3), so handelt es sich um die Fläche S, welche von (3) (4) und (5) begrenzt ist und welche von der Erde aus gesehen als beschattet erscheint. Letztere Bedingung lässt sich (wenn man nur den Fall der Figur, welche einem positiven A entspricht, als typisch gelten lässt) ausdrücken durch



$$r' \gtrless r$$

Das obere Zeichen gilt, wenn auf der Seite des äusseren Ringrandes der Schatten erscheint, das untere wenn dies auf der Seite des inneren Ringrandes geschieht. Im Uebrigen wird es in jedem Falle erlaubt sein, auf den inneren Ringrand keine Rücksicht zu nehmen. Denn hier werden durch den dunklen Ring die Verhältnisse so modificirt, dass der ganze Einfluss dieses Theiles des Schattenwurfes vollständig verdeckt wird. Bezeichnet man nun mit v_0 und v_1 die Werthe von v welche die gesuchte Fläche begrenzen, so wird, weil die beschattete Fläche sehr schmal sein wird, äusserst nahe sein:

$$2S = \int_{v_0}^{v_1} dv(r'^2 - r^2)$$

Die Berechnung dieses Integrales soll wiederum mit Benutzung der erlaubten Vernachlässigungen ausgeführt werden. Da

$$z = r \sin v$$

$$y = r \cos v$$

so ergiebt sich aus den obigen Gleichungen sofort:

$$r'^2 = \frac{\alpha^2 \cos^2 C'}{\sin^2 v + \cos^2 v \cos^2 C' + 2\, l' \sin v \cos v \sin C' \cos C' \cos A}$$

$$r^2 = \frac{\alpha^2 \sin^2 A}{\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A}$$

Der Winkel $90^0 - C'$ ist offenbar nur wenig von A verschieden. Setzt man demgemäss

$$90^0 - C' = A + \delta A$$

so wird mit Vernachlässigung höherer Potenzen von δA und l':

$$2\,S = 2\,\alpha^2 \sin A \cos A \times$$

$$\left\{ \delta A \int_{v_0}^{v_1} \frac{\sin^2 v\, dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} - l' \sin^2 A \cos A \int_{v_0}^{v_1} \frac{\sin v \cos v\, dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} \right\} \qquad (6a)$$

und da bekanntlich

$$\int \frac{\sin^2 v\, dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} = -\frac{\sin v \cos v}{2(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)} + \frac{1}{2 \sin A} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} v}{\sin A}\right) = \mathfrak{A}(v)$$

$$-\cos^2 A \int \frac{\sin v \cos v\, dv}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} = +\frac{1}{2(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)} = \mathfrak{B}(v)$$

so wird

$$S = \alpha^2 \sin A \cos A \,.\, [\mathfrak{A}(v_1) - \mathfrak{A}(v_0)]\, \delta A + \alpha^2 l' \sin^3 A \,.\, [\mathfrak{B}(v_1) - \mathfrak{B}(v_0)]$$

Um hierin die richtigen Werthe für v_1 und v_0 einsetzen zu können, müssen die verschiedenen möglichen Fälle auseinander gehalten werden.

1. Fall: die Curven (3) und (5) schneiden sich auf der Planetenscheibe nicht. Hier ist den Entwickelungen des Art. 6 zufolge:

$$\operatorname{tg} v_0 = \sin A \operatorname{tg} \varphi; \quad v_1 = \pi - v_0$$

und man sieht sofort, dass $\mathfrak{B}(v_1) = \mathfrak{B}(v_0)$. Ferner ist

$$\mathfrak{A}(v_1) = +\frac{\sin 2\varphi}{4 \sin A} + \frac{\pi - \varphi}{2 \sin A}$$

$$\mathfrak{A}(v_0) = -\frac{\sin 2\varphi}{4 \sin A} + \frac{\varphi}{2 \sin A}$$

$$\mathfrak{B}(v_1) = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 A}{2 \sin^2 A}$$

wodurch wird:

$$\mathfrak{A}(v_1) - \mathfrak{A}(v_0) = \frac{\sin 2\varphi + \pi - 2\varphi}{2 \sin A}$$

Führt man also folgende Hülfsgrössen ein:

$$\Sigma_0 = \frac{\alpha^2}{2} \cos A \cdot (\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi)$$

$$\Sigma_1 = \frac{\alpha^2}{2} \cos A \cdot [\pi - (\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi)]$$

$$\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_0$$

so wird schliesslich:

$$S = \Sigma . \delta A \qquad (6)$$

Aus dieser Formel folgt sofort auch, welcher der beiden Ringränder den Schatten wirft; denn der Ausdruck für S muss positiv sein.

2. Fall: Die Ellipsen (3) und (5) schneiden sich auf der Planetenscheibe. Zur Erledigung dieses Falles muss der Durchschnittspunct aufgesucht werden. Derselbe ist aber durch die Bedingung $r' = r$ gegeben. Es gilt also für ihn:

$$\operatorname{tg} v = \frac{l' \sin^2 A \cos A}{\delta A} \qquad (7)$$

wie eine Betrachtung der rechten Seite der Gleichung (6a) ergiebt.

Man sieht übrigens aus derselben Gleichung, dass die geforderte Bedingung $r' > r$ erfüllt ist wenn:

$$\delta A \operatorname{tg} v > l' \sin^2 A \cos A$$

Setzt man diesen Bemerkungen gemäss:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l' \sin A \cos A}{\delta A} &= \operatorname{tg} \psi \; (v < \psi < 180^0) \\ \operatorname{tg} v_2 &= \operatorname{tg} \psi \sin A \end{aligned}\right\} \qquad (8a)$$

so wird man sofort ersehen können, ob Fall 1 oder 2 stattfindet. Liegt v_2 nicht zwischen v_0 und v_1, wo v_0 und v_1 die bei Fall 1 berechneten Winkel sind, so ist Formel (6) anzuwenden. Ist aber $v_0 < v_2 < v_1$, so kann auf folgende Weise verfahren werden.

Bezeichnet man mit $2\,S(v_0)$, $2\,S(v_1)$ und $2\,S(v_2)$ die Werthe der rechten Seite von (6a), wenn für v resp. v_0, v_1 oder v_2 in die Integralwerthe eingesetzt werden, so ist:

$$\left.\begin{aligned} S &= S(v_1) - S(v_2) \\ \text{oder} \quad S &= S(v_2) - S(v_0) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

je nachdem der erste oder zweite Werth positiv wird[1]). Man kann nun, wenn man ausser den zur Formirung von (6) gebrauchten Grössen Σ noch einführt:

$$V = \frac{\alpha^2}{2} \sin A [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 A] = \frac{\alpha^2}{2} \sin A \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\cos v_0}\right)^2$$

sofort schreiben:

$$\left.\begin{aligned} S(v_1) &= \Sigma_1 . \delta A + l' V \\ S(v_0) &= \Sigma_0 . \delta A + l' V \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass nach leichter Rechnung sich ergiebt

$$S(v_2) = \frac{\alpha^2}{2} \cos A \cdot \delta A \cdot \{\psi + \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg} \psi\} \qquad (9a)$$

Durch die Formeln (6) bis (9a) ist die Aufgabe in einer höchst einfachen Form gelöst, wenn für die vorkommenden Grössen, so weit dies angeht, Tabellen berechnet werden. Man findet solche am Schlusse unter Va und Vb. Dort sind alle Winkel φ, v, ferner die Grössen Σ_0, Σ_1 und Σ gegeben und zwar auch für den inneren Rand; alle auf diesen sich beziehenden Buchstaben sind mit einem Strich versehen. Ich habe in Tabelle Va noch einige andere Grössen mit angeführt, welche in den früheren Entwicklungen vorgekommen sind.

Es erübrigt nun noch, zu zeigen, wie die strenge Lösung der gestellten Aufgabe mit der soeben durchgeführten zusammenhängt. Zu diesem Zwecke werde ich jetzt die erstere vollständig mittheilen, wenngleich das Bedürfniss nach diesen strengeren, aber auch complicirteren Formeln in der Praxis wohl nur äusserst selten auftreten wird. Die Projection der wirklichen Schattencurve ergiebt sich, wie oben erwähnt, durch Elimination von x aus der Gleichung (2), nachdem in ihr $-z$ statt $+z$ geschrieben worden ist, und der Gleichung der Saturnkugel. die im vorliegenden Falle

$$x = +\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$$

1) Für den inneren Ringrand findet das umgekehrte statt d. h. es ist dasjenige S zu wählen, welches negativ wird, diesem aber natürlich am Schlusse das positive Vorzeichen zu ertheilen.

heisst. Beachtet man, dass α_0, $90 - B'$, l' kleine Grössen der ersten Ordnung sind und lässt man die Glieder zweiter Ordnung fort, so ergiebt die genannte Elimination für die Gleichung der Schattencurve:

$$y^2 \cos^2 C' + z^2 + 2\,y\,z \cos A \sin C' \cos C' \sin l'$$

$$- 2\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\{y \sin A \cos B' \cos C' - z \sin \alpha_0 \cos \sigma\} = a^2 \cos^2 C'$$

Führt man δA ein und vernachlässigt immer die zweiten Potenzen von l' und δA, so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$y^2 \cos^2 C' + z^2 + 2\,y\,z \sin A \cos^2 A \,.\, l'$$

$$= a^2 \cos^2 C' - 2\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\{z \,.\, \delta A - y \sin^2 A \cos A \,.\, l'\} \qquad (10)$$

Wird für den Augenblick

$$m = \cos^2 v \cos^2 C' + \sin^2 v + 2 \sin v \cos v \sin A \cos^2 A \,.\, l'$$

gesetzt und der früher gebrauchten Bezeichnung zufolge

$$y = r' \cos v$$

$$z = r' \sin v$$

so wird

$$m\,r'^2 = a^2 \cos^2 C' - 2\,r'\sqrt{a^2 - r'^2}[\delta A \,.\, \sin v - l' \sin^2 A \cos A \cos v]$$

Eine leichte Entwicklung giebt:

$$r'^2 = \frac{a^2 \cos^2 C'}{m} - \frac{2\,a \sin A \sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (a^2 - a^2) \sin^2 A}}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} \times$$

$$\{\delta A \cdot \sin v - l' \sin^2 A \cos A \cos v\}$$

und hieraus

$$r'^2 - r^2 = \frac{2\,a^2 \sin A \left[\cos A \sin v - \frac{1}{a}\sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (a^2 - a^2) \sin^2 A}\right]}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2} \times$$

$$(\sin v \cdot \delta A - \sin^2 A \cos A \cos v \,.\, l')$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann nur für $a = a$ verschwinden. Daraus folgt, dass $r = r'$ wenn $v = v_2$ wobei

$$\operatorname{tg} v_2 = \frac{l' \sin^2 A \cos A}{\delta A}$$

Vergleicht man hiermit (8a), so sieht man, dass v_2 dieselbe Bedeutung hat wie früher. Der strenge Ausdruck für die vom Ringe beschattete und zugleich sichtbare Fläche S der Saturnkugel ist also

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}(r'^2 - r^2)\,dv \qquad (11)$$

wo u_0 und u_1 dieselben Grenzen sind, wie sie bei der früheren Aufgabe ausführlich bestimmt wurden. Durch die dort entwickelten Vorschriften dürfen also in jedem Falle u_0 und u_1 als bekannt vorausgesetzt werden.

Setzt man nun

$$s(v) = \int \frac{\sin v \cdot dv \sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (a^2 - a^2)\sin^2 A}}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2}$$

$$c(v) = \int \frac{\cos v \cdot dv \sqrt{a^2 \sin^2 v \cos^2 A - (a^2 - a^2)\sin^2 A}}{(\sin^2 v + \cos^2 v \sin^2 A)^2}$$

und behält im übrigen die auf pag. 451 eingeführte Bezeichnung bei, so wird

$$\left.\begin{aligned} S = \alpha^2 \delta A \left[\sin A \cos A\, \mathfrak{A}(v) - \frac{1}{\alpha}\sin A . s(v)\right]_{u_0}^{u_1} \\ + \alpha^2 l' \left[\sin^3 A\, \mathfrak{B}(v) + \sin^3 A \frac{\cos A}{\alpha} c(v)\right]_{u_0}^{u_1} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Dieses ist die strenge Auflösung der gestellten Aufgabe. Die Winkel u_0 und u_1 liegen naturgemäss zwischen 0 und 180^0. Bezeichnet nun ε einen positiven echten Bruch, so ist:

$$[s(v)]_{u_0}^{u_1} = \varepsilon \sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A} \cdot [\mathfrak{A}(v)]_{u_0}^{u_1}$$

und ebenso ist leicht ersichtlich, dass obwohl $\cos v$ innerhalb der Integrationsgrenzen sein Zeichen wechseln kann, sich die Gleichung aufstellen lässt:

$$\left[c(v)\right]_{u_0}^{u_1} = -\varepsilon_1 \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}}{\cos^2 A} \cdot \left[\mathfrak{B}(v)\right]_{u_0}^{u_1}$$

wo ε_1 ebenfalls ein positiver echter Bruch ist. Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} S = \alpha^2 \sin A \cos A . \delta A \left[\mathfrak{A}(u_1) - \mathfrak{A}(u_0)\right]\left[1 - \varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}}{\alpha \cos A}\right] \\ + \alpha^2 \sin^3 A . l' \left[\mathfrak{B}(u_1) - \mathfrak{B}(u_0)\right]\left[1 - \varepsilon_1 \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2 \sin^2 A}}{\alpha \cos A}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Aus dieser Gleichung für S folgt, dass die einfacheren Formen (6) und (8) für dieselbe Grösse zu Ueberschlagsrechnungen recht tauglich sind, denn die Factoren der beiden Grössen δA und l' erscheinen in den letzteren grösser als sie in Wirklichkeit sind. Aus diesem Grunde genügen (6) und (8), um sich davon zu überzeugen, dass es bei dem gegenwärtigen Stande der practischen Photometrie nicht nöthig sein wird, die strengen Formeln (12) anzuwenden. Sollte dies aber wünschenswerth sein, so ist eine Rechnung nach ihnen unschwer auszuführen. Man könnte auch hier Hülfstafeln construiren, ähnlich denen, welche bereits Verwendung gefunden haben. Ich habe aber aus den erwähnten Gründen davon abgesehen. Für alle Fälle wird es nicht unnöthig sein, zu erwähnen, dass die allgemeinen Integrale $s(v)$ und $c(v)$ in geschlossener Form ausführbar sind.

Das Integral $s(v)$ wird durch die Substitution:

$$\cos\psi = \frac{a\cos v\cos A}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 A}}$$

auf ein bekannte Form zurückgeführt. Man erhält so:

$$s(v) = \frac{a^2 - a^2\sin^2 A}{2\cos A}\cdot\left\{-\frac{a\sin\psi\cos\psi}{a^2\sin^2 A + \sin^2\psi\,(a^2 - a^2\sin^2 A)} + \frac{1}{a\sin A}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\operatorname{tg}\psi}{a\sin A}\right)\right\} \quad (14)$$

Setzt man weiter ganz ähnlich:

$$\xi = \frac{\sin v\cos A}{\sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v\sin^2 A}}$$

so erhält man leicht:

$$c(v) = \frac{a}{2\sin^2 A\cos A}\cdot\left\{\xi\sqrt{\xi^2 - \frac{a^2 - a^2}{a^2}} - \frac{a^2 - a^2}{a^2} - \log\operatorname{nat}\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - \frac{a^2 - a^2}{a^2}}\right)\right\} \quad (15)$$

9.

In ganz ähnlicher Weise kann man auch den Schattenwurf des Saturnkörpers auf den Ring in Betracht ziehen.

Das beschattete Stück σ des Ringes, welches von dem sichtbaren Ringtheile in Abzug zu bringen ist, wird begrenzt von 4 Curvenstücken, welche mit I, II, III und IV bezeichnet werden mögen. I sei die Curve, als welche sich die Begrenzung des Saturnkörpers projicirt, II die Schattengrenze auf dem Ringe, III der äussere und IV der innere Ringrand. Ich lege wieder

das am Anfange des vorigen Art. eingeführte Coordinatensystem zu Grunde, nur mit der Aenderung, dass als negative Seite der X Axe diejenige genommen ist, welche in der Richtung vom Planeten nach der Erde hinzeigt, und behalte alle übrigen Bezeichnungen bei. Dann geben die Regeln der analytischen Geometrie für die Gleichungen dieser Curven:

$$\text{I} \quad \left(\frac{x^2+y^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\sin^2 A}{b^2}\right)-\left(\frac{x\cos A}{a^2}\right)^2=0$$

$$\text{II} \quad \left(\frac{x^2+y^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{\cos^2 A'+\cos^2 B'}{a^2}+\frac{\cos^2 C'}{b^2}\right)-\left(\frac{x\cos A'-y\cos B'}{a^2}\right)^2=0$$

$$\text{III} \quad x^2+y^2=\alpha^2$$

$$\text{IV} \quad x^2+y^2=\alpha'^2$$

Führt man hierin folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$c=-\frac{\cos A}{\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 A}};\quad c_1=-\frac{\cos A'}{\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos^2 C'}};\quad d_1=\frac{\cos B'}{\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos^2 C'}} \qquad (1)$$

so kann man die obigen Gleichungen einfacher so schreiben:

$$\text{I} \quad x^2+y^2-a^2-c^2x^2=0$$

$$\text{II} \quad x^2+y^2-a^2-(c_1x-d_1y)^2=0$$

$$\text{III} \quad x^2+y^2-\alpha^2=0$$

$$\text{IV} \quad x^2+y^2-\alpha'^2=0$$

Führt man Polarcoordinaten ein und bezeichnet die zu demselben Winkel v zugehörigen Radii-vectores in I und II mit ϱ_1 und ϱ_2, so gehen die beiden ersten Gleichungen, da in der ersten

$$x=\varrho_1\sin v$$

$$y=\varrho_1\cos v$$

und in der zweiten

$$x=\varrho_2\sin v$$

$$y=\varrho_2\cos v$$

gesetzt werden muss, über in:

$$\varrho_1^2-a^2-c^2\varrho_1^2\sin^2 v=0$$

$$\varrho_2^2-a^2-\varrho_2^2(c_1\sin v-d_1\cos v)^2=0$$

Setzt man weiter, wie bereits früher geschehen,

$$\cos A' = \sin C' \cos l'$$

$$\cos B' = \sin C' \sin l'$$

und ausserdem:

$$\frac{\sin C'}{\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos^2 C'}} = m \qquad (2)$$

so erhält man

$$\varrho_1^{\,2} = \frac{a^2}{1-c^2\sin^2 v}$$

$$\varrho_2^{\,2} = \frac{a^2}{1-m^2\sin^2(v-l')}$$

Die gesuchte Fläche wird nun:

$$2\sigma = \int (\varrho_2^{\,2} - \varrho_1^{\,2})\, dv$$

wo die Integration über alle beschatteten und zugleich sichtbaren Theile des Ringes auszudehnen ist. Letztere Bedingung heisst offenbar $\varrho_2 > \varrho_1$.

Es soll zunächst die allgemeine Integration unter den früher benutzten vereinfachenden Umständen ausgeführt werden, während die Einführung der Grenzen später erfolgen soll. Wie im vorigen Artikel werde also wieder

$$90 - C' = A + \delta A$$

gesetzt und sowohl δA als auch l' als äusserst klein betrachtet.

Zufolge (1) und (2) hat man

$$1+m^2\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2 C'} = \frac{a^2}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 A}\left(1-\frac{2(a^2-b^2)\sin A\cos A.\delta A}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 A}\right)$$

$$1+c^2\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 A}$$

d. h. also:

$$m^2 = c^2 - 2\frac{a^2}{b^2}\frac{\sin A}{\cos^3 A}\cdot\delta A\cdot c^4$$

Substituirt man dies im Ausdruck für ϱ_2^2 und entwickelt, so erhält man nach einfacher Rechnung:

$$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = -2a^2c^2 \cdot \left\{ \frac{\sin v \cos v}{(1-c^2\sin^2 v)^2} l' + \frac{a^2c^2}{b^2} \frac{\sin A}{\cos^3 A} \cdot \delta A \cdot \frac{\sin^2 v}{(1-c^2\sin^2 v)^2} \right\} \quad (3)$$

Bezeichnet man also:

$$\mathfrak{A}(v) = -2c^2 \int \frac{\sin v \cos v \, dv}{(1-c^2\sin^2 v)^2} = -\frac{1}{(1-c^2\sin^2 v)}$$

$$\mathfrak{B}(v) = -2 \int \frac{\sin^2 v \, dv}{(1-c^2\sin^2 v)^2} = \frac{\sin v \cos v}{(1-c^2)(1-c^2\sin^2 v)} - \frac{1}{(1-c^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} v \sqrt{1-c^2})$$

so wird

$$2\sigma = 2\sigma(v_1) - 2\sigma(v_0) = a^2 l' [\mathfrak{A}(v_1) - \mathfrak{A}(v_0)] + \frac{a^4c^4}{b^2} \frac{\sin A}{\cos^3 A} \delta A . [\mathfrak{B}(v_1) - \mathfrak{B}(v_0)] \quad (4)$$

wo v_0 und v_1 die beiden Integrationsgrenzen sind, deren Bestimmung später erfolgen soll. Die beiden Ellipsen (I) und (II) schneiden sich im Allgemeinen in 4 Puncten. Bezeichnet man mit v^* das einem solchen Durchschnittspuncte zugehörige v, so ist dasselbe aus der Bedingung $\varrho_2 = \varrho_1$ abzuleiten. Aus (3) ergiebt sich nun zunächst, dass jedenfalls die Werthe $v^* = 0$ und $v^* = 180^0$ den gestellten Bedingungen genügen d. h. also dass die beiden Ellipsen denselben in der Y Axe gelegenen Durchmesser haben. Die andern zwei Werthe von v^* ergeben sich durch Nullsetzen von (3):

$$\operatorname{tg} v^* = -\frac{b^2}{a^2c^2} \cdot \frac{\cos^3 A \cdot l'}{\sin A \cdot \delta A}$$

Es wird sich empfehlen, diese Gleichung durch Einführung eines Winkels f^*

$$\operatorname{tg} f^* = -\frac{b}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2-b^2}{b^2} \sin^2 A} \cdot \frac{\cos A \cdot l'}{\delta A} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 A}{c} \cdot \frac{l'}{\delta A}$$

umzuformen, indem man dann hat

$$\operatorname{tg} v^* = +\frac{b}{ac} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \operatorname{tg} f^*$$

Man kann noch den in Art (6) gebrauchten scheinbaren polaren Halbmesser des Saturn einführen. Es war

$$b' = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 A} = b\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2 A} = \frac{b\cos A}{c}$$

wodurch nun wird:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} f^* &= -\frac{b'}{a}\cdot\cos A\cdot\frac{l'}{\delta A} \\ \operatorname{tg} v^* &= +\frac{b'}{a\sin A}\cdot\operatorname{tg} f^* \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die Bedingung $\varrho_2 > \varrho_1$ gestaltet sich zufolge (3) so:

$$\sin v\cos v\cdot l' + \frac{a^2}{b'^2}\operatorname{tg} A\sin^2 v\cdot\delta A < 0 \qquad (6)$$

Schliesslich brauchen wir noch die Werthe des Winkels v für die Durchschnittspunkte der Ellipsen III und IV mit I, welche mit v_{III} und v_{IV} bezeichnet werden sollen. Man findet sofort, wenn noch

$$\beta = \alpha\sin A,\quad \beta' = \alpha'\sin A$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tg} v_{III} = \frac{b'}{a}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2 - a^2}{b'^2 - \beta^2}}$$

$$\operatorname{tg} v_{IV} = \frac{b'}{a}\sqrt{\frac{\alpha'^2 - a^2}{b'^2 - \beta^2}}$$

In Artikel (6) kamen diese Ausdrücke bereits vor und wurden zur Berechnung von Formel (5) benutzt. Danach ist:

$$\operatorname{tg} v_{III} = \operatorname{tg}\varphi;\quad \operatorname{tg} v_{IV} = \operatorname{tg}\varphi' \qquad (7)$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man nun sofort in jedem Falle entscheiden, ob v^* zwischen $v_{III} = \varphi$ und $v_{IV} = \varphi'$ liegt oder nicht. Die rechte Seite von (4) bezeichnen wir für die unbestimmt gelassenen Integrationsgrenzen mit $2\sigma(v)$ so dass also:

$$2\sigma(v) = a^2 l'\cdot\mathfrak{A}(v) + \frac{a^4 c^4}{b^2}\cdot\frac{\sin A}{\cos^3 A}\cdot\delta A\cdot\mathfrak{B}(v)$$

Wenn man hierin den Werth von c einsetzt, so kann man schreiben:

$$\sigma(v) = -l'\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{b'^2}{\cos^2 v\left\{b'^2 + a^2\sin^2 A\operatorname{tg}^2 v\right\}}$$

$$+\frac{\delta A}{2}\cdot\frac{a^3 b^2}{b'^3}\cos A\left\{\frac{b'}{a\sin A}\cdot\frac{b'^2\operatorname{tg} v}{b'^2 + a^2\sin^2 A\operatorname{tg}^2 v} - \frac{b'^2}{a^2\sin^2 A}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\sin A}{b'}\operatorname{tg} v\right)\right\}$$

Um alle in der folgenden Zusammenstellung gebrauchten Grössen beisammen zu haben, sei an die Relationen des Art. 6 erinnert:

$$\operatorname{tg} f = \frac{a \sin A}{b'} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg} f' = \frac{a \sin A}{b'} \operatorname{tg} \varphi'$$

woraus folgt:

$$b'^2 + a^2 \sin^2 A \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b'^2}{\cos^2 f}$$

$$b'^2 + a^2 \sin^2 A \operatorname{tg}^2 \varphi' = \frac{b'^2}{\cos^2 f'}$$

Ebenso leicht leitet man ab:

$$\frac{\cos^2 f}{\cos^2 \varphi} = \frac{\alpha^2}{a^2}; \qquad \frac{\cos^2 f'}{\cos^2 \varphi'} = \frac{\alpha'^2}{a^2}$$

Schliesslich werde zur Abkürzung eingeführt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b'}\right)^2 b^2 \operatorname{cotg} A \operatorname{tg} \varphi \cos^2 f \qquad \lambda_1' = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b'}\right)^2 b^2 \operatorname{cotg} A \operatorname{tg} \varphi' \cos^2 f'$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{a}{b'} \frac{b^2 \cos A}{\sin^2 A} \cdot f \qquad \lambda_2' = \frac{1}{2} \frac{a}{b'} \frac{b^2 \cos A}{\sin^2 A} \cdot f'$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{a}{b'} \frac{b^2 \cos A}{\sin^2 A} \cdot \pi$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnungen kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma(v_{III}) = \sigma(\varphi) &= -l' \frac{\alpha^2}{2} + \delta A (\lambda_1 - \lambda_2) \\
\sigma(180^0 - v_{III}) = \sigma(180^0 \quad \varphi) &= -l' \frac{\alpha^2}{2} - \delta A (\lambda_1 - \lambda_2 + \mu) \\
\sigma(v_{IV}) = \sigma(\varphi') &= -l' \frac{\alpha'^2}{2} + \delta A (\lambda_1' - \lambda_2') \\
\sigma(180^0 - v_{IV}) = \sigma(180^0 - \varphi') &= -l' \frac{\alpha'^2}{2} - \delta A (\lambda_1' - \lambda_2' + \mu)
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Zur Berechnung von $\sigma(v^*)$ bemerken wir, dass nach Gleichung (5):

$$\operatorname{tg} f^* = -\frac{b'}{a} \frac{l' \cos A}{\delta A}$$

$$\operatorname{tg} v^* = \frac{b'}{a \sin A} \operatorname{tg} f^*$$

Setzt man also

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b'}\right)^2 b^2 \operatorname{cotg} A \operatorname{tg} v^* \cos^2 f^*$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b'}\right)^{\frac{b^2 \cos A}{\sin^2 A}} \cdot f^*$$

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b'}\right)^{\frac{b^2 \cos A}{\sin^2 A}} \left\{\sin f^* \cos f^* - f^*\right\}$$

so hat man:

$$\sigma(v^*) = -l' \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 f^*}{\cos^2 v^*} + \delta A (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) \qquad (9)$$

Durch diese formalen Entwickelungen sind wir nun in die Lage versetzt, die verschiedenen Fälle, welche beim Schattenwurf des Saturnkörpers auf den Ring stattfinden, einzeln zu discutiren und die betreffenden Formeln für σ anzuschreiben.

Wegen der Symmetrie, welche in der ganzen Erscheinung stattfindet, können wir l' und A mit beliebigen Zeichen nehmen, nur müssen für diese die Integrationsgrenzen bestimmt werden.

Ich nehme nun in den folgenden Skizzen, welche die verschiedenen Fälle veranschaulichen sollen,

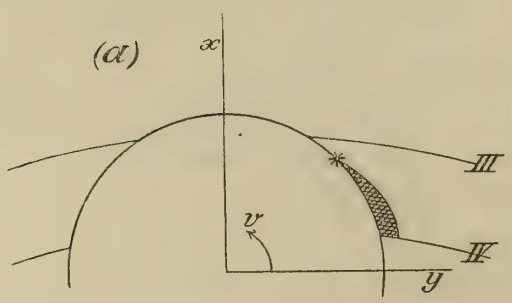
l' negativ und A positiv

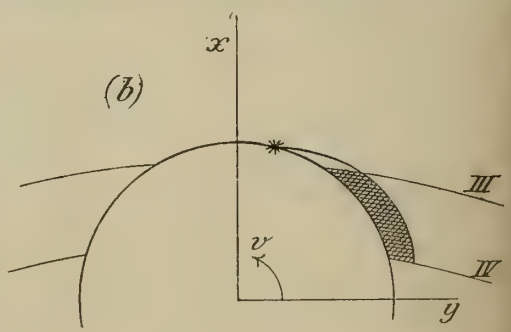
an. Alle vorkommenden Winkel v, f und φ liegen dann in den ersten beiden Quadranten und wachsen in der Figur von der positiven Y Axe in der Richtung des Pfeiles.

Unter diesen Umständen sind nun offenbar 4 Fälle zu unterscheiden, welche durch die untenstehenden Figuren (a), (b), (c) und (d) illustrirt werden sollen.

a) v^* liegt zwischen v_{IV} und v_{III}. In diesem Falle wird

$$\sigma = \sigma(v^*) - \sigma(v_{IV})$$



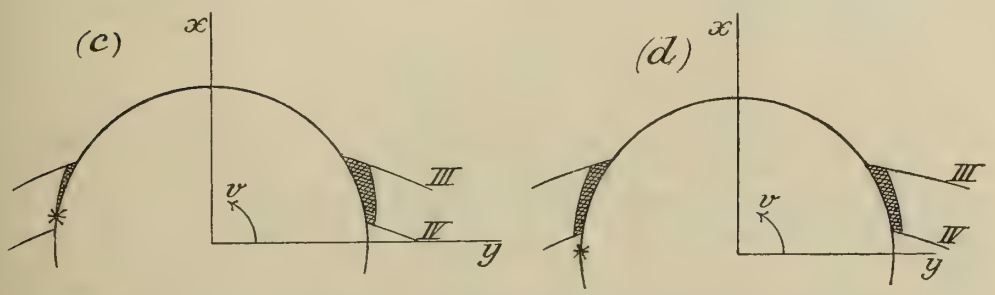


b) v^* liegt zwischen v_{III} und $180^0 - v_{III}$. Dann wird:

$$\sigma = \sigma(v_{III}) - \sigma(v_{IV})$$

c) v^* liegt zwischen $180^0 - v_{III}$ und $180^0 - v_{IV}$. Hier ist

$$\sigma = \sigma(v_{III}) - \sigma(v_{IV}) + \sigma(v^*) - \sigma(180^0 - v_{III})$$



d) v^* ist $> 180^0 - v_{IV}$. Die zugehörige Figur (d) lässt in diesem Falle sofort ersehen, dass:

$$\sigma = \sigma(v_{III}) - \sigma(v_{IV}) + \sigma(180^0 - v_{IV}) - \sigma(180^0 - v_{III})$$

Es wäre noch hinzuzufügen, dass die Ringbegrenzung III die Curve I ganz umschliessen kann. Dann wird es stets ausreichend sein, $v_{III} = 90^0$ zu setzen. Mit Hülfe der oben gefundenen Werthe von $\sigma(v_{III})$ etc. kann man nun schreiben: (l' stets negativ genommen)

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \sigma = +l'\frac{\alpha'^2}{2} + \sigma(v^*) - \delta A(\lambda_1' - \lambda_2')\\
&\text{b)}\quad \sigma = -l'\left(\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2}\right) + \delta A[\lambda_1 - \lambda_2 - (\lambda_1' - \lambda_2')]\\
&\text{c)}\quad \sigma = \sigma(v^*) + l'\frac{\alpha'^2}{2} + \delta A[2(\lambda_1 - \lambda_2) + \mu - (\lambda_1' - \lambda_2')]\\
&\text{d)}\quad \sigma = 2\,\delta A[\lambda_1 - \lambda_2 - (\lambda_1' - \lambda_2')]
\end{aligned}\right\} (10)$$

Mit diesen Formeln ist die ganze Aufgabe absolvirt.

Der grösseren Deutlichkeit wegen sollen nun die in den beiden letzten Artikeln gewonnen Formeln in gebrauchsfertiger Gestalt zusammengestellt und die Anwendung der hierauf sich beziehenden Tabellen erklärt werden.

Der Schattenwurf verursacht, dass den Grössen

$$X,\ Y,\ X_L,\ Y_L$$

der Artikel (6) und (7) die Correctionen

$$-\Delta X,\ -\Delta Y,\ -\Delta X_L,\ -\Delta Y_L$$

zuzufügen sind.

Zunächst ergiebt sich sofort:

$$\left.\begin{aligned} \Delta Y &= +\frac{S}{a\,b\,\pi} \\ \Delta X &= +\frac{\sin A}{a\,b\,\pi}\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

während man wohl niemals Veranlassung finden dürfte, ΔX_L und ΔY_L berechnen zu müssen. Im Uebrigen findet man leicht:

$$\Delta X_L = \Delta X \cdot \frac{b}{2\,a\,P}$$

Die Tabelle (Va) giebt nun die Numeri und Logarithmen folgender Grössen:

$$\lambda(a) = (\lambda_1' - \lambda_2')\,c$$
$$\lambda(b) = (\lambda_1 - \lambda_2)\,c - (\lambda_1' - \lambda_2')\,c$$
$$\lambda(c) = 2\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,c - (\lambda_1' - \lambda_2')\,c + \mu\,c$$

wo

$$c = \frac{\sin A}{a\,b \,.\, 180}$$

Dann ist nach (10) und (11)

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\ \Delta X &= +l'\frac{\alpha'^2 c}{2} - \delta A \,.\, \lambda(a) + c\,\sigma(v^*) \\ \text{b)}\ \Delta X &= -l'\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{2}\cdot c + \delta A \cdot \lambda(b) \\ \text{c)}\ \Delta X &= +l'\frac{\alpha'^2 c}{2} + \delta A \,.\, \lambda(c) + c\,\sigma(v^*) \\ \text{d)}\ \Delta X &= +2\,\delta A \,.\, \lambda(b) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Die Tabellen sind so eingerichtet, dass l' und δA in Graden und deren Bruchtheilen und ersteres immer negativ angenommen werden muss.

Hierzu tritt noch Gleichung (9), deren Berechnung nicht erspart werden kann ohne Tabellen, die unverhältnissmässig ausgedehnt sein müssten.

Als Beispiel für die Anwendung vorstehender Formeln mögen folgende Zahlen dienen.

Während der Opposition 1884—85 stand Saturn so, dass A nach der gewöhnlichen Art der Zählung negativ war. Wir müssen es hier aber positiv ansetzen und l' negativ, weil die Formeln unter diesen Voraussetzungen gelten. Es ist nun

		A	$90^0 - C'$	l'	δA
1884 Dec.	14.	$26^0.65$	$26^0.81$	$-0^0.96$	$+0^0.16$
1885 Jan.	3.	26.72	26.81	−2.88	+0.09
	23.	26.79	26.81	−5.02	+0.02
Febr.	12.	26.86	26.81	−6.46	−0.05

Ich finde nun für v^* $84^0.3$, $88^0.9$, $89^0.9$, $90^0.3$ und man sieht sofort, dass nach Belieben Fall (a) oder (c) genommen werden kann, da $v_{III} = 90^0$. Dass in der That beide Fälle genau dieselben Zahlen geben, sieht man sofort. Mit Hülfe der Tabelle Vc ergeben sich nun für die genannten Zeiten die 4 zugehörigen ΔX:

+0.002
+0.007
+0.013
+0.017

Da für $A = 26^0.75$, welches der Mittelwerth der obigen A ist, nach Tabelle III $X = +1.376$, so sieht man, dass die Correction ΔX nicht merklich sein wird, weil sie im Maximum nur wenig mehr als 1 Procent der Lichtmenge des Ringes allein ausmacht.

Was den Schattenwurf des Ringes auf den Saturnkörper betrifft, so kommt derselbe im Vorliegenden nicht in Frage. Für die 3 ersten Zeiten ist der Schatten der inneren Ringbegrenzung verdeckt und der des äusseren fällt ausserhalb des Saturnkörpers. Im letzten Zeitpunkt würde allerdings die innere Ringbegrenzung einen Schatten erzeugen. Dieser ist aber im vorliegenden Falle gewiss unmerklich. Auch wurde schon erwähnt, dass es wohl stets unnütze Mühe wäre, den Schattenwurf der inneren Ringbegrenzung in Rechnung zu ziehen und zwar wegen des sogenannten dunklen Ringes.

10.

Es dürfte nicht unangemessen sein, über den Einfluss des dunklen Ringes, der zuletzt zur Sprache gekommen ist, einige Bemerkungen zu machen. Auf dieses Gebilde wurde man in weiteren Kreisen durch die Beschreibungen, welche Bond Ende der vierziger Jahre davon machte, aufmerksam, obwohl kaum bezweifelt werden kann, dass dieses selbst in kleineren Fernröhren leicht sichtbare Object schon weit früher gesehen worden ist. Die ersten Messungen an dem dunklen Ringe scheint Galle gemacht zu haben. Dieselben datiren aus den Jahren 1838 und 1839[1]).

Bezeichnet α'' den Radius der inneren Begrenzung des dunklen Ringes, so ergiebt sich, wenn der Aequatoreal-Halbmesser des Saturn $=1$ gesetzt wird, im Mittel aus Galle's Messungen:

$$\log \alpha'' = 0.0916$$

Bond giebt als Resultat seiner Bestimmungen[2])

$$\log \alpha'' = 0.1010$$

so dass man der Wahrheit sehr nahe kommen wird, wenn man

$$\log \alpha'' = 0.0963$$

annimmt.

Der dunkle Ring verdeckt nun einen Theil F der Saturnscheibe, der nach Formel (5) des Art. (6) leicht berechnet werden kann. Man hat dort nur zu setzen:

$$\log \alpha = 0.1824, \quad \log \alpha' = 0.0963$$

Hier kommt es nur darauf an, überschlagsweise den ungefähren Einfluss des dunklen Ringes kennen zu lernen. Ich habe, da F mit $\sin A$ wächst, für den grössten Werth von A, nämlich 30^0, die Rechnung durchgeführt und finde

$$f' = 28^0_.95; \quad \varphi' = 45^0_.49$$

während nach Tabelle Va

$$f = 48^0_.02 \quad \varphi = 63^0_.93$$

ist. Hieraus ergiebt sich

$$\log F = 9.368 - 10$$

---

1) Astron. Nachr. No. 756.

2) Annals of the Observatory of the Harvard College II part 1, pag. 107.

Der Logarithmus der ganzen scheinbaren Fläche, welche die Saturnscheibe und der helle Ring einnehmen, ist ($a = 1$ gesetzt) 0.854. Es beträgt also F nur 0.033 der ganzen Fläche und wenn man, was beiläufig der Wirklichkeit entsprechen dürfte, annimmt, dass alle Theile der ganzen Figur nahezu gleich hell sind, so würde sich die Lichtmenge um circa 3% im Maximum durch den dunklen Ring verkleinern. Von diesen 3% kommt nur ein Bruchtheil in Betracht. Zuerst ist es sicher, dass der dunkle Ring durchscheinend ist und einen nicht unmerklichen Theil der von der dahinter liegenden Saturnoberfläche ausgehenden Lichtmenge durchgehen lässt. Sodann strahlt der ganze sogenannte dunkle Ring, eben weil er sichtbar ist, eine gewisse Lichtmenge selbst aus. Beide Umstände zusammen werden nur einen kleinen Theil der genannten 3 Procente wirksam sein lassen. Ja es ist recht gut möglich, dass die Wirkung des ersten Umstandes durch den zweiten mehr als compensirt wird, so dass der dunkle Ring eine kleine Vermehrung der gesammten Lichtmenge verursacht. In jedem Falle scheint es nicht nöthig, bei einer Photometrie des Saturn auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen. Sollte dies aber wünschenswerth erscheinen, so sind im Vorhergehenden alle Mittel enthalten, welche eine dahinzielende Rechnung ermöglichen. Auch für das vom dunklen Ringe durchgelassene Licht des Saturnkörpers wird man Berechnungen anstellen können, die sich sehr leicht mit Hülfe der im Folgenden enthaltenen Betrachtungen ergeben. Ich gehe aber, weil die Praxis vorderhand dazu noch nicht auffordert, auf diesen Gegenstand nicht weiter ein.

11.

Ich gehe nun zur Betrachtung des photometrischen Verhaltens des Ringes über, insofern hierbei die physische Beschaffenheit desselben in Frage kommt. Es wird sich also darum handeln, die in Art. 6 eingeführte Function Φ näher zu bestimmen. Die Grundlage dieser Untersuchung ist bereits in der Einleitung erörtert worden. Es erübrigt nur noch die Vorstellungen, auf welchen die folgenden Entwicklungen beruhen, näher zu präcisiren. Es sollen also folgende Annahmen gemacht werden:

Der Saturnring besteht aus einem Schwarm kleiner Kugeln, die in sehr grosser Anzahl den cylindrischen Raum des Ringes einnehmen.

Ueber das Gesetz, nach welchem jede dieser Kugeln das Licht zurückwirft, braucht man so lange keine Annahme zu machen, als man voraussetzt, dass die Kugeln der Erde immer voll erleuchtet erscheinen. In diesem letzteren Umstande dürfte indess kaum eine Beschränkung erblickt werden, denn Erde und Sonne erscheinen vom Saturn aus in einer gegenseitigen Entfernung von höchstens $6\frac{1}{2}$ Grad und die Phase wird demgemäss in keinem Falle einen merklichen Einfluss ausüben können.

Es sei nun dq' die Lichtmenge, welche ein unendlich kleines Element $d\varepsilon$ einer der den Ring bildenden und im Innern desselben gelegenen Kugeln, der Erde zusenden würde, wenn es von einer der anderen Kugeln weder beschattet noch verdeckt wäre. Nun kann aber beides eintreten und es fragt sich, wie gross im Mittel die Lichtmenge dq eines solchen Elementes ist, wenn sehr viele solcher Elemente in Betracht gezogen werden. Der Radius einer der kleinen Kugeln sei ϱ, H die Höhe des cylindrischen Ringes, N die Anzahl der Kugeln, welche den Ring bilden, schliesslich h die Tiefe des Elementes $d\varepsilon$ von der oberen Ringebene an gerechnet.

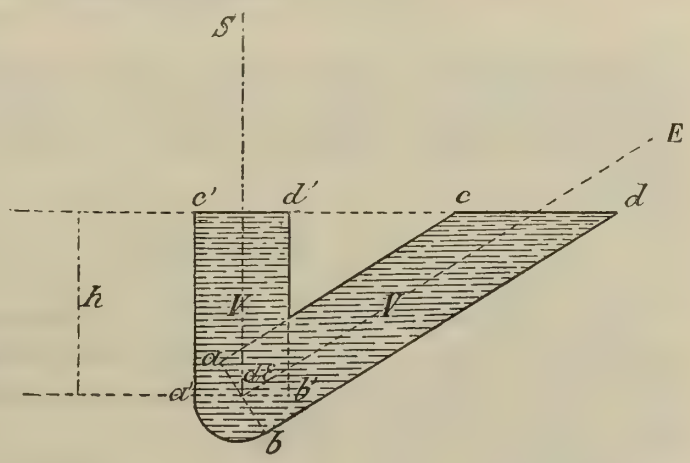
Legt man durch $d\varepsilon$ zwei Grade $(d\varepsilon, E)$ und $(d\varepsilon, S)$, von denen die erste nach der Erde, die zweite nach der Sonne gerichtet ist, so wird jede Kugel, deren Mittelpunct von jeder der beiden Geraden weiter absteht als um die Strecke ϱ [1]), das Element $d\varepsilon$ weder beschatten noch verdecken, und jede Kugel, welche diesen Bedingungen nicht genügt, wird verursachen, dass $d\varepsilon$ der Erde gar kein Licht zusendet. Bezeichnet p die Anzahl der Fälle, in welchen die zuerst erwähnte Möglichkeit stattfindet und p' die Anzahl der Fälle des Gegentheils, so sendet das Element $d\varepsilon$ in p Fällen die Lichtmenge dq', in p' Fällen die Lichtmenge 0 der Erde zu. Der Mittelwerth aller dieser Lichtmengen ist also:

$$dq = dq' \cdot \frac{p}{p+p'} = w \cdot dq' \qquad (1)$$

Wird nun, was geschehen soll, angenommen, dass die Kugeln durch Zufall innerhalb des Ringes vertheilt sind, so ist w die Wahrscheinlichkeit dafür, dass N Kugeln innerhalb des Volumens R so liegen, dass der

1) Dies gilt strenge, wenn man die beiden Geraden in $d\varepsilon$ endigen lässt und nicht darüber hinaus verlängert.

Mittelpunct jeder derselben um mehr, als die Strecke ϱ beträgt, von den genannten beiden Graden absteht. Mit andern Worten heisst das: die Mittelpuncte sämmtlicher Kugeln müssen innerhalb eines gewissen Raumes V liegen. Dieser Raum wird begrenzt 1) durch die obere Ringebene, 2) durch einen geraden Kreiscylinder mit dem Radius ϱ, dessen Axe die Gerade $(d\varepsilon, E)$ ist, 3) durch einen ebensolchen Cylinder mit der Axe $(d\varepsilon, S)$, 4) durch eine Kugelfläche mit dem Radius ϱ und dem Mittelpuncte in $d\varepsilon$. Diese 4 Flächen durchsetzen sich gegenseitig; es ist aber ohne weiteres klar, von welcher Fläche in jedem Puncte das Volumen V begrenzt werden soll (vergl. nebenstehende Figur).



Da nun ϱ, wenn von den der Oberfläche des Ringes äusserst nahen Theilen abgesehen wird, gegen h sehr klein sein soll, so wird w offenbar für alle Elemente einer kleinen Kugel äusserst nahe denselben Werth haben und die Lichtmenge q, welche eine solche Kugel der Erde zusendet, wird sein

$$q = w \cdot q',$$

wenn q' die Lichtmenge ist, welche dieselbe Kugel zusenden würde, falls sie ganz frei läge.

w ist offenbar eine Funktion von h. Die Anzahl aller Kugeln, die einer Schicht angehören, welche in einer Tiefe h, von der oberen Ringfläche gerechnet, liegt und die Dicke dh besitzt, wird, da bei zufälliger Vertheilung einer grossen Zahl von Kugeln innerhalb des Ringes eine nahe gleichförmige Vertheilung mit überaus grosser Wahrscheinlichkeit folgt, sein

$$\frac{N}{H} \cdot dh$$

Eine solche Schicht wird also die Lichtmenge

$$wq'\frac{N}{H}\cdot dh$$

der Erde zusenden und der ganze Ring die Lichtquantität:

$$Q = q'\frac{N}{H}\int_0^H w\cdot dh \qquad (2)$$

q' ist so lange nicht bekannt, als es nicht das Gesetz ist, nach welchem jede einzelne Kugel das Licht zurückstrahlt. Jedenfalls wird es aber nur vom Phasenwinkel α abhängen können, so dass $q' = I'f(\alpha)$ und demzufolge

$$Q = I'f(\alpha)\frac{N}{H}\int_0^H w\cdot dh \qquad (3)$$

Diese Formel enthält allgemein die Grundlage für eine Photometrie staubförmiger Massen. Die Modification dieser Formel für den Fall einer nicht gleichförmigen Dichtigkeit der einzelnen Schichten übergehe ich, da dieselbe sich von selbst ergiebt.

Im Falle des Saturnringes ist, wie schon öfters erwähnt, $f(\alpha)$ als constant zu betrachten, wodurch alles Hypothetische in der Formel (3) verschwindet.

Die erste Aufgabe, die sich nun darbietet, ist die Bestimmung von w als Funktion von h. Es sind $N-1$ Kugeln in dem Raume R zufällig vertheilt und w ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Mittelpunkte aller ausserhalb des Raumes V oder also innerhalb des Raumes $R-V$ liegen. Nach bekannten Sätzen ist

$$w = w_1\cdot w_2\cdot w_3\cdot\cdot w_{N-1}$$

wo w_1 die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass eine Kugel die gestellte Bedingung erfüllt, w_2 die Wahrscheinlichkeit, dass dies für eine zweite Kugel geschieht, nachdem bereits der Mittelpunct einer Kugel im Raume $R-V$ sich befindet u. s. f. Nun ist offenbar

$$w_1 = 1 - \frac{V}{R}$$

Liegt aber der Mittelpunct einer Kugel bereits im Raume $R-V$, so ist für den Mittelpunct einer zweiten Kugel nur noch der Raum $R-k$, wo

$$k = \frac{32}{3} \cdot \varrho^3 \pi$$

verfügbar. Die erste Kugel kann aber theilweise im Raume V liegen. Ist demnach ε_1' ein positiver echter Bruch, der übrigens ausserordentlich klein sein wird, so wird demnach

$$w_2 = \frac{R - k - V + \varepsilon_1' k}{R - k} = 1 - \frac{V - \varepsilon_1' k}{R - k}$$

Nehmen wir nun allgemein an, dass bereits $m - 1$ Kugelcentren im Raume $R - V$ sich befinden, so werden diese Kugeln zum Theil einander so nahe liegen können, dass zwischen diese keine neue Kugel treten kann. Man findet dann, da sich die Räume k zum Theil decken können, dass für den Mittelpunct einer $m$ten Kugel nur noch der Raum $R - (m-1)\,\varepsilon_{m-1} \cdot k$ verfügbar ist, wo ε_m einen echten Bruch bedeutet. Ein Theil dieser Kugeln k liegt nun weiter so, dass sie in den Raum V hineinragen und hieraus ergiebt sich, dass

$$w_m = \frac{R - (m-1)\,\varepsilon_{m-1} k - V + (m-1)\,\varepsilon'_{m-1} k}{R - (m-1)\,\varepsilon_{m-1} k}$$

wo ε'_{m-1} ebenfalls einen echten Bruch und zwar einen äusserst kleinen wenn $\frac{V}{R}$ es ist, bedeutet. Auf diese Weise findet man:

$$w = \left(1 - \frac{V}{R}\right)\left(1 - \frac{V - \varepsilon_1' k}{R - k}\right)\left(1 - \frac{V - 2\,\varepsilon_2' k}{R - 2\,\varepsilon_2 k}\right)\left(1 - \frac{V - (N-2)\,\varepsilon'_{N-2} k}{R - (N-2)\,\varepsilon_{N-2} k}\right) \qquad (4)$$

Man weiss also, dass die $\varepsilon_1' \varepsilon_2'$ etc. sehr kleine Brüche sind, dagegen die $\varepsilon_2 \varepsilon_3$ etc. für kleine Indices sich nur äusserst wenig von der Einheit unterscheiden, welche Differenz aber für grössere Indices zunimmt. Die ersteren Grössen sind ferner noch abhängig von $\frac{V}{R}$, während die letzteren als constant betrachtet werden dürfen.

So leicht sich die Formel (4) aufstellen liess, so schwierig dürfte es sein, den expliciten Ausdruck für w, in welchem die einzelnen ε bestimmt erscheinen, zu erlangen[1]). Dies wäre aber nothwendig, wenn das be-

1) Diese Aufgabe hat viel Aehnlichkeit mit der Beantwortung der bisher noch völlig offenen Frage nach dem Vorkommen einer bestimmten Anzahl von optischen Doppelsternen bei einer gegebenen Anzahl zufällig am Himmel vertheilter Sterne. Die bisher in dieser Richtung gemachten Versuche dürften nicht geeignet sein, die Beantwortung dieser Frage anzubahnen.

trachtete System discreter Massen sehr dicht wäre. Diese Annahme scheint indess nicht wahrscheinlich und daraus ergiebt sich die Möglichkeit, wenigstens einen Näherungsausdruck für w abzuleiten. Bei sehr dünn vertheilter Materie ist offenbar nahezu:

$$w = \left(1 - \frac{V}{R}\right)^{N-1}$$

und es wird hier, wenn die zweite Potenz von $\frac{V}{R}$ gegen die erste vernachlässigt wird

$$w = e^{-(N-1)\cdot\frac{V}{R}} \qquad (5)$$

Will man so weit gehende Vernachlässigungen nicht machen, so wird es nicht möglich, ohne die strenge Lösung der obigen Aufgabe zu besitzen, eine völlig einwurfsfreie Formel aufzustellen. Man kann indessen zeigen, dass man auch im allgemeinen Falle unter gewissen Annahmen wieder auf eine ganz ähnliche Formel wie (5) geführt wird.

Die einzelnen ε_m' sind, wie leicht zu sehen, noch von $\frac{V}{R}$ abhängig, ferner verschwinden sie, wenn $\frac{V}{R} = 0$ wird. Sind also diese Grössen nach Potenzen von $\frac{V}{R}$ entwickelbar, so wird

$$\varepsilon'_m = \gamma_m^1 \frac{V}{R} + \gamma_m^2 \left(\frac{V}{R}\right)^2 + \cdots$$

Es wird nun offenbar für gewisse nicht zu dichte Massenvertheilungen diese Reihe näherungsweise durch ihr erstes Glied dargestellt werden können. Wird diese, allerdings nicht streng bewiesene, Annahme zugelassen, so wird man schreiben können:

$$V - m\varepsilon'_m k = V\cdot\varepsilon_m^0$$

wo ε_m^0 ein positiver echter Bruch ist, der nicht näher bestimmbar ist, der aber für nicht dichte Massenanhäufungen innerhalb des Saturnringes nicht wesentlich von der Einheit verschieden sein kann.

Hiernach wird, wenn wir nun noch für $N-2$, N schreiben, welche Substitution für grosse N ganz gleichgültig ist:

$$w = \prod_{m=0}^{N}\left(1 - \frac{V\varepsilon_m^0}{R - m\varepsilon_m k}\right)$$

Unter denselben Voraussetzungen ist aber jedes Glied des erwähnten Productes wenig von Eins verschieden und man wird durch Mitnahme nur des grössten Gliedes der betreffenden Reihenentwickelung sofort erhalten:

$$\log w = -V \sum_{m=0}^{N} \left(\frac{\varepsilon_m{}^0}{R - m\,\varepsilon_m k} \right)$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe sind alle positiv. Ist demnach η ein positiver echter Bruch, so wird, da angenommen werden soll, dass $R > m\,k$:

$$\log w = -\frac{V}{R}\,\eta \sum_{m=0}^{N} \left(\frac{1}{1 - m\,\frac{k}{R}} \right)$$

worin $\frac{k}{R} = \delta$ äusserst klein ist. Es folgt daraus, dass die rechts stehende Summe näherungsweise dargestellt wird durch

$$-\frac{1}{\delta} \int_0^{N\delta} \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{\delta} \cdot \log(1 - N\delta)$$

Bezeichnet man demnach

$$-\frac{\log(1 - N\delta)}{\delta} \cdot \eta = n\,N$$

so wird

$$w = e^{-nN \cdot \frac{V}{R}} \qquad (6)$$

und man wird für kleine Werthe von $N\delta$ hinzufügen dürfen, dass n nicht viel grösser als η sein wird.

Das auseinandergesetzte Verfahren giebt für die Dichtigkeit der Massenvertheilung im Saturnringe eine untere Grenze. Wird nämlich durch die Beobachtungen

$$n\,N = N_0$$

bestimmt, so kann daraus geschlossen werden, dass

$$-\frac{\log(1 - N\delta)}{\delta} > N_0$$

oder was unter selbstverständlichen Voraussetzungen auf dasselbe hinauskommt:

$$N > N_0$$

Diese Unsicherheit wird sich in der Praxis nicht sehr geltend machen; es wird sich nämlich in der Folge zeigen, dass kaum daran gedacht werden kann, aus den bisherigen photometrischen Beobachtungen des Saturn auch nur einen beiläufigen Werth von nN abzuleiten.

Setzt man (6) in die Formel (3) ein, so ergiebt sich endlich:

$$Q = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{H} \int_0^H e^{-\frac{\nu}{R} nN} \cdot dh \qquad (7)$$

Ehe ich diese allgemeine Formel vornehme, will ich den Fall der genauen Opposition des Saturn behandeln. Es soll darunter der Fall verstanden werden, in welchem Sonne und Erde vom Saturn aus gesehen genau in derselben Richtung stehen. Incidenz- und Emanationswinkel sind hier beide gleich und zwar $= i$ und ferner ist $\alpha = 0$. Es wird dann, mit Vernachlässigung der äusserst kleinen Halbkugel, welche sich an den Kreiscylinder, der hier den Raum V begrenzt, ansetzt

$$V = \varrho^2 \pi \cdot \frac{h}{\cos i}$$

Setzt man also

$$\mu^2 = nN \cdot \frac{H}{R} \varrho^2 \pi$$

so ist

$$Q = \Gamma f(0) \frac{N}{H} \int_0^H e^{-\frac{\mu^2}{\cos i} \cdot \frac{h}{H}} \cdot dh$$

also:

$$Q = \frac{\Gamma f(0) N}{\mu^2} \cdot \cos i \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{\cos i}}\right)$$

Bezeichnet man ferner mit K das Volumen aller den Saturnring bildenden Kugeln zusammengenommen, so ist ($n = 1$ gesetzt)

$$\mu^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{K}{R} \cdot \frac{H}{\varrho}$$

wodurch μ^2 eine leicht verständliche Bedeutung erhält. Der helle Theil des Saturnringes scheint nun für diejenigen Werthe von i welche in Frage kommen, undurchsichtig zu sein, d. h. es ist für ihn

$$e^{-\frac{\mu^2}{\cos}}$$

eine verschwindend kleine Grösse; danach stellt sich jetzt Q so dar:

$$Q = \gamma \,.\, \cos i$$

wo γ eine Constante ist. Diese Formel habe ich bereits in dem oben citirten Aufsatze in der V. S. annoncirt.

Noch ein zweiter Fall lässt sich sehr einfach erledigen, nämlich der, dass der Phasenwinkel α nicht klein ist. Es ist klar, dass dann der den beiden Cylindern gemeinschaftliche Theil von V gegenüber dem Inhalte dieser Cylinder verschwindet und dass dann also, wieder den kleinen von der Kugel begrenzten Theil vernachlässigt, sehr nahe ist

$$V = \varrho^2 \pi h \left(\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon \cos i}\right)$$

wo i und ε Incidenz- und Emanationswinkel bedeuten. Jetzt ergiebt sich

$$Q = \frac{\Gamma N f(\alpha)}{\mu^2} \cdot \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}\left[1 - e^{-\mu^2 \cdot \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}}\right]$$

und da das zweite Glied als verschwindend klein gelten darf:

$$Q = \frac{\Gamma N}{\mu^2} \cdot f(\alpha) \cdot \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \qquad (8)$$

eine Formel, deren Einfachheit und Aehnlichkeit mit dem im ersten Abschnitte zur Anwendung gelangten photometrischen Grundgesetze bemerkenswerth sein dürfte.

12.

Um den Fall, der beim Saturnringe der wichtigste ist, wo nämlich α stets einen kleinen zwischen 0 und $6\frac{1}{2}$ Grad liegenden Winkel bedeutet, zu verfolgen, muss nun V berechnet werden. Es bezeichne V_0 den Inhalt des nach der Erde gerichteten Cylinders (a, b, c, d) (vergl. die Figur auf pag. 469), V_1 den des nach der Sonne gerichteten (a', b', c', d).

K das von der Kugel begrenzte Stück $(a', b, d\varepsilon)$ und schliesslich G das beiden Cylindern gemeinschaftliche Stück $(a, d\varepsilon, b')$, so ist

$$V = V_0 + V_1 + K - G$$

Sofort ergiebt sich, dass

$$K = \tfrac{2}{3}\varrho^3(\pi - \alpha)$$

welche Grösse gegenüber V_0 und V_1 zu vernachlässigen ist, und jedenfalls genügend nahe:

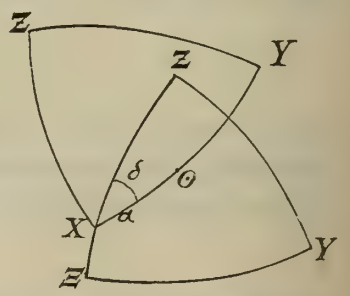
$$\left.\begin{aligned} V_0 &= \varrho^2\pi \cdot \frac{h}{\cos\varepsilon} \\ V_1 &= \varrho^2\pi \cdot \frac{h}{\cos i} \end{aligned}\right\}$$

so dass nur noch die Bestimmung von G erübrigt.

A und A' sollen die Elevationswinkel der Erde und Sonne über der Ringebene bedeuten. Es werde ferner ein Coordinatensystem so gelegt: der Anfang desselben liege im Elemente $d\varepsilon$, die ΞY Ebene parallel zur Ringebene, die Z Axe senkrecht darauf und in der ΞZ Ebene die Richtung nach der Erde. In Bezug auf dieses System ist die Gleichung der oberen Ringebene

$$\zeta = h$$

Es werde ein zweites Coordinatensystem XYZ mit demselben Anfang eingeführt, dessen positive X Axe nach der Erde zeigt und in dessen XY Ebene die Sonne liegt; dann ist, wenn die Bezeichnungen nach der nebenstehenden Figur gewählt werden:



$$\zeta = x\sin A + y\cos A\cos\delta + z\cos A\sin\delta$$

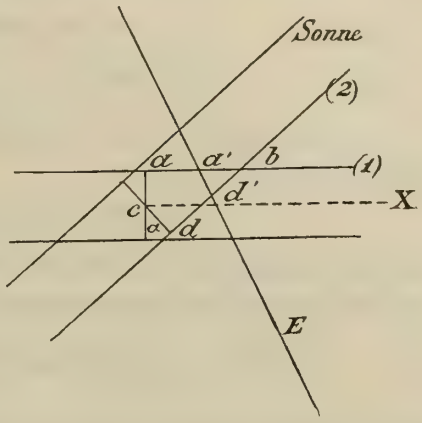
und die Gleichung der Ringebene wird, auf dieses System bezogen:

$$h = x\sin A + y\cos A\cos\delta + z\cos A\sin\delta \qquad (1)$$

während die Gleichungen der beiden nach der Erde resp. Sonne gerichteten Kreiscylinder sind:

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 &= \varrho^2 \\ (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + z^2 &= \varrho^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Lässt man nun die ganze räumliche Figur durch eine Ebene $Z=\zeta$ schneiden, so wird aus G das Viereck (vgl. die nebenstehende Figur, in welcher c die Projection des Coordinatenanfanges) $abcd$ herausgeschnitten und es ist



$$G=2\int_0^{\varrho}\overline{ab}\cdot\overline{ac}\,d\zeta$$

Man hat aber

$$\overline{ac}=+\sqrt{\varrho^2-\zeta^2}$$

während der Punct b der Durchschnittspunct der beiden Geraden:

$$y=+\sqrt{\varrho^2-\zeta^2}\quad\text{und}\quad x\sin\alpha=y\cos\alpha+\sqrt{\varrho^2-\zeta^2}$$

ist. Dadurch ergiebt sich sofort:

$$\overline{ab}\cdot\sin\alpha=(1+\cos\alpha)\sqrt{\varrho^2-\zeta^2}$$

und daher

$$G=2\frac{(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}\int_0^{\varrho}(\varrho^2-\zeta^2)\,d\zeta=\frac{4}{3}\cdot\frac{(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}\varrho^3 \qquad (3)$$

Diese Gleichung gilt nun offenbar nur so lange, als G nicht von der Ebene, deren Gleichung durch (1) gegeben ist, geschnitten wird, denn es kommen nur die innerhalb des Ringes gelegenen Theile in Frage. Geschieht dies, so muss man statt G

$$G-\Sigma$$

nehmen, wo G durch (3) definirt ist und Σ das Volumen des Körpers bedeutet, dessen Durchschnitt mit der Ebene $z=\zeta$ das Dreieck $a'b\,d'$ ist. Nennt man σ den Flächeninhalt des Dreiecks $a'b\,d'$, so ist:

$$\Sigma=\int\sigma\cdot d\zeta$$

wo die Integration auf alle Theile für welche σ reell und positiv bleibt, auszudehnen ist. Das genannte Dreieck wird eingeschlossen von den Geraden 1), 2) und E) deren Gleichungen:

$$1) \quad y = +\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2}$$

$$2) \quad x \sin\alpha - y\cos\alpha = +\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2}$$

$$E) \quad x\sin A + y\cos A\cos\delta = h - \zeta\cos A\sin\delta$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Durchschnittspunktes d' mit x_1 und y_1 so wird:

$$2\sigma = (\overline{ab} - \overline{aa'})(\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - y_1)$$

$\overline{ab}$ ist bereits oben berechnet worden, während $\overline{aa'}$ nichts anderes als die xCoordinate des Durchschnittspunctes von 1) und E) ist. Man findet so:

$$\overline{aa'} = \frac{1}{\sin A}\left\{h - \cos A\cos\delta\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - \zeta\cos A\sin\delta\right\}$$

und ebenso leicht ergiebt sich für y_1:

$$y_1\{\cos\alpha\sin A + \sin\alpha\cos A\cos\delta\} = h\sin\alpha - \zeta\sin\alpha\cos A\sin\delta - \sin A\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2}$$

Der Klammerausdruck links ist aber $-\sin A'$. Setzt man dies alles in die Formel für 2σ ein, so findet man schliesslich:

$$2\sigma = \frac{1}{\sin\alpha\sin A\sin A'}\left[(\sin A + \sin A')\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - (h - \zeta\cos A\sin\delta)\sin\alpha\right]^2$$

Die Integration ist dem Obigen zufolge auf alle Werthe von ζ auszudehnen, für welche 2σ positiv bleibt. Die Grenzen ζ_1 sind demnach durch die beiden Wurzeln der Gleichung gegeben, welche ensteht, wenn man die letzte Klammergrösse Null setzt. Es soll übrigens, zur Vermeidung von Verwickelungen, gleich hier eine sich von selbst darbietende Vereinfachung eintreten[1]). Es ist klar, dass ζ stets $< \varrho$ sein muss, während h gegen ϱ auch schon im früheren als sehr gross betrachtet worden ist. Es wird also $h - \zeta\cos A\sin\delta$ immer sehr nahe $= h$ sein nnd es wird jetzt einfacher:

$$2\sigma = \frac{1}{\sin\alpha\sin A\sin A'}\left[(\sin A + \sin A')\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - h\sin\alpha\right]^2$$

Die Integrationsgrenzen sind die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$\zeta_1^2 = \varrho^2 - \frac{h^2\sin^2\alpha}{(\sin A + \sin A')^2} \qquad (4)$$

1) Vergleiche über diesen Punct den Nachtrag.

und zur weiteren Reduction soll, was stets erlaubt ist, gesetzt werden:

$$\frac{h \sin \alpha}{\sin A + \sin A'} = \varrho \sin \varphi$$

woraus folgt:

$$\zeta_1^2 = \varrho^2 \cos^2 \varphi$$

Führt man nun das Integral

$$\Sigma = \int_{-\zeta_1}^{+\zeta_1} \sigma \, d\zeta$$

aus, so findet sich:

$$\Sigma = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \varrho^3 \left[\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \varphi \right] \qquad (5)$$

und nach den obigen Auseinandersetzungen:

$$V = V_0 + V_1 + \Sigma - G$$

worin G aus (3) zu nehmen ist. Es war weiter

$$V_0 + V_1 = \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}$$

und weil $i = 90^0 - A'$, $\varepsilon = 90^0 - A$ zu setzen ist:

$$V_0 + V_1 = \varrho^2 \pi \cdot \frac{h (\sin A + \sin A')}{\sin A \sin A'} = \varrho^3 \pi \cdot \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \sin \varphi$$

Hiermit ergiebt sich schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} V = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \varrho^3 \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right\} \\ - \frac{4}{3} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot \varrho^3 \end{aligned} \right\} \qquad (6)$$

Dies ist der Ausdruck für V, so lange das Volumen G durch die Ebene E geschnitten wird oder so lange:

$$h \leqq \frac{\varrho (\sin A + \sin A')}{\sin \alpha} = h_1$$

Für grössere h ist, wie erwähnt, $\Sigma = 0$ zu setzen und es wird dann:

$$V = V_2 = \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'} \varrho^2 \pi h - \frac{4}{3} \frac{\varrho^3 (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}$$

Die Formel (7) des vorigen Artikels angewandt, ergiebt also:

$$Q = I'f(\alpha) \cdot \frac{N}{H}\left\{\varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\frac{N}{R}V} \cdot \cos\varphi \, d\varphi + \int_{h_1}^{H} e^{-n\frac{N}{R}V_2} dh\right\} \quad (7)$$

Das zweite Integral kann sofort ausgeführt werden. Man findet für dasselbe

$$\frac{\sin A \sin A'}{n\frac{N}{R}\varrho^2\pi(\sin A + \sin A')} \; e^{+\frac{4}{3}n\frac{N}{R}\frac{\varrho^3(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}} \cdot \left\{e^{-mh_1} - e^{-mH}\right\}$$

wenn für den Augenblick zur Abkürzung

$$m = n\frac{N}{R}\varrho^2\pi\frac{(\sin A + \sin A')}{\sin A \sin A'}$$

gesetzt wird. Man wird, aus den oben angeführten Gründen, voraussichtlich wieder e^{-mH} wegen verschwindender Kleinheit unterdrücken dürfen, so dass der letzte Ausdruck wird:

$$\frac{\sin A \sin A'}{n\frac{N}{R}\varrho^2\pi(\sin A + \sin A')} \; e^{-n\frac{N}{R}\frac{\varrho^3\pi}{\sin\alpha}\left[\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A'} - \frac{4}{3}\frac{(1+\cos\alpha)}{\pi}\right]} \quad (7a)$$

Die Gleichung (7) löst die gestellte Aufgabe strenge. Für eine practische Anwendung sind indessen noch sehr wesentliche Vereinfachungen am Platze. Der Winkel α ist, wie wir wissen, klein. Wir wollen die zweite Potenz von α bereits als unmerklich fortlassen. Dann ist

$$1 + \cos\alpha = 2$$

Setzt man dann $A' = A + \delta A$, so ist offenbar δA von demselben Range wie α, da es nur einen Bruchtheil von ihm ausmacht. Lässt man aber die zweite Potenz von δA fort, so wird

$$(\sin A + \sin A')^2 = 4\sin A\,[\sin A + \cos A \,.\, \delta A]$$

und

$$\sin A \sin A' = \sin A\,[\sin A + \cos A \,.\, \delta A]$$

das heisst:

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A'} = 4$$

Die Gleichung (6) wird also:

$$V = \frac{\varrho^3}{\sin\alpha}\left\{4\cos\varphi - \frac{4}{3}\cos^3\varphi + (2\pi + 4\varphi)\sin\varphi - \frac{8}{3}\right\}$$

Es wurde bereits im letzten Artikel die Bezeichnung

$$k = \frac{3\,2}{3} \cdot \varrho^3 \pi$$

eingeführt. Setzt man nun noch:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi}\left\{\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\sin\varphi - \frac{2}{3}\right\} \qquad (8)$$

so wird:

$$V = \frac{k}{\sin\alpha} \cdot \Phi$$

Ferner gebrauchen wir die bereits benutzte Bezeichnung:

$$\frac{k}{R} = \delta$$

Setzt man dann für den auftretenden constanten Factor

$$\varrho f(\alpha) \frac{N}{H} \Gamma$$

einfach Γ, weil $f(\alpha)$ nur äusserst wenig variirt, so wird nach (7)

$$Q = \Gamma \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin\alpha}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n N \delta}{\sin\alpha} \cdot \Phi} \cdot \cos\varphi\, d\varphi + \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{n N \delta} \cdot e^{-\frac{n N \delta}{8\pi \sin\alpha}(3\pi - 2)}\right\}$$

Zur numerischen Rechnung wird es vielleicht bequemer sein, dieses Resultat so zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n N \delta}{\sin\alpha} = x\,; \qquad I' = \frac{\Gamma}{n N \delta} \\ &\mathfrak{A} = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\Phi} \cdot \cos\varphi\, d\varphi \\ &\mathfrak{B} = \frac{8}{3} \cdot e^{-x\frac{3\pi - 2}{8\pi}}; \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \\ &Q = I'(\sin A + \sin A').\mathfrak{C} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich, dass die gemachten Annahmen über die Constitution des Saturnringes zu dem Resultate führen, dass seine Lichtintensität mit dem Winkel α variirt. Wir werden finden, dass nach der Theorie diese Variation sehr bedeutend sein muss und dass dem durch

die Beobachtungen nicht widersprochen wird. Herr Dr. Müller in Potsdam ist zuerst durch seine photometrischen Beobachtungen auf diese Lichtvariation aufmerksam geworden. Dieselbe dürfte eine äusserst gewichtige Stütze für die Richtigkeit der Maxwell-Hirn'schen Ansicht abgeben.

13.

Ehe man zur Anwendung der gewonnenen Formeln schreiten kann, muss gezeigt werden, wie das Integral

$$\mathfrak{A} = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\Phi} \cos\varphi \cdot d\varphi$$

für beliebige positive Werthe von x numerisch berechnet werden kann. Für nicht zu grosse Werthe von x wird man die Rechnung am besten auf mechanischem Wege, etwa nach der ausgezeichneten von Gauss gegebenen Methode, ausführen. Ich habe dies in der That für $x = 0$ bis $x = 100$ gethan und es erschien hier, da der Werth von $\mathfrak{A}$ doch nur auf 3 höchstens 4 Stellen genau gefordert wird, ausreichend folgendes Verfahren einzuschlagen. Bis $x = 30$ wurden nach der Gauss'schen Methode zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ 6 Ordinaten eingeschaltet. Von da bis $x = 100$ wurde das ganze Integral in die beiden Integrale mit den Grenzen 0 uud $\frac{\pi}{4}$ resp. $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ zerlegt und jedes mit Hülfe von 6 Ordinaten berechnet. Von da ab würde eine mechanische Berechnung deshalb auf Schwierigkeiten stossen, weil nur diejenigen Werthe der Funktion unter dem Integralzeichen merkliche Beiträge liefern, welche kleinen Werthen von φ entsprechen. Es ist deshalb vortheilhafter, für grosse Werthe von x eine Reihenentwickelung für $\mathfrak{A}$ aufzusuchen, die nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitet. Diese Entwickelung ist im Folgenden soweit ausgeführt, dass durch sie $\mathfrak{A}$ für $x > 100$ auf etwa 4 Stellen genau gefunden wird.

Für $x = \infty$ erreicht $\mathfrak{A}$ den Grenzwerth $\frac{16}{3}$. Diesem Grenzwerth strebt es aber sehr langsam zu, so dass selbst für $x = 10000$ noch das erste Glied der nachfolgenden Reihe nicht völlig unmerklich ist.

Da Φ mit zunehmendem φ fortwährend wächst, so ist

$$x\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\Phi}\cos\varphi\, d\varphi < x\, e^{-x\Phi_1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

wenn Φ_1 der Werth von Φ für $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ist, also $\Phi_1=0.1896$. Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber $=0.0000002$ für $x=100$ und kann also unbedenklich vernachlässigt werden. Mithin kann man für so grosse Werthe von x setzen:

$$\mathfrak{A}=x\int_0^{\sigma} e^{-x\Phi}\cos\varphi\, d\varphi\,; \qquad \sigma<\frac{\pi}{4}$$

Dadurch ist aber erreicht, dass in den folgenden Entwickelungen sonst auftretende Unendlichkeiten ausgeschlossen bleiben. Differentiirt man die Gleichung (8) des vorigen Artikels nach φ und setzt

$$y=\frac{\pi}{2}+\varphi+\sin\varphi\cos\varphi=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{1}{X} \qquad (1)$$

so wird:

$$\cos\varphi\, d\varphi = X\, d\Phi$$

und demzufolge

$$\mathfrak{A}=x\int_0^{\Sigma} e^{-x\Phi}\, X\, d\Phi\,,$$

wo Σ der Werth von Φ für $\varphi=\sigma$ ist.

Durch wiederholte Integration nach Theilen findet man:

$$\mathfrak{A}=\left\{e^{-x\Phi}\left[X+\frac{1}{x}\cdot\frac{dX}{d\Phi}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2X}{d\Phi^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}\cdot\frac{d^nX}{d\Phi^n}\right]\right\}_{\varphi=\sigma}^{\varphi=0}$$

$$+\frac{1}{x^n}\int_0^{\Sigma} e^{-x\Phi}\cdot\frac{d^{n+1}X}{d\Phi^{n+1}}\cdot d\Phi$$

Das letzte Glied hat aber nach einem bekannten Satze den Werth:

$$R_n=-\frac{1}{x^n}\left[\left(\frac{d^nX}{d\Phi^n}\right)_{\varphi=0}-\left(\frac{d^nX}{d\Phi^n}\right)_{\varphi=\vartheta\sigma}\right]$$

wo ϑ einen nicht näher angebbaren positiven echten Bruch bedeutet.

Da nun weiter σ so gewählt worden ist, dass für diesen Werth $e^{-x\Phi}$ als verschwindend klein zu betrachten ist, so wird also:

$$\mathfrak{A} = (X)_0 + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{dX}{d\Phi}\right)_0 + \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{d^2X}{d\Phi^2}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{x^n}\cdot\left(\frac{d^nX}{d\Phi^n}\right)_0 + R_n \qquad (2)$$

Es erübrigt nur noch die Coefficienten in (2) wirklich zu bestimmen. Hierbei soll bis zu $n = 5$ gegangen werden, was für $x \geqq 120$, auf welche diese Formel wirklich angewandt worden ist, genügt, um im ungünstigsten Falle $\mathfrak{A}$ bis auf etwa eine Einheit der 4. Stelle genau zu erhalten.

Man findet nun leicht:

$$\frac{d\varphi}{d\Phi} = \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{1}{y\cos\varphi}; \qquad \frac{dy}{d\Phi} = \frac{16\pi\cos\varphi}{3y}$$

und hiermit:

$$\frac{dX}{d\Phi} = -2\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2\frac{\cos\varphi}{y^3}$$

$$\frac{d^2X}{d\Phi^2} = 2\left(\frac{8\pi}{3}\right)^3\left\{\frac{1}{y^4}\operatorname{tg}\varphi + \frac{6\cos^2\varphi}{y^5}\right\}$$

$$\frac{d^3X}{d\Phi^3} = 2\left(\frac{8\pi}{3}\right)^4\left\{\frac{1}{y^5\cos^3\varphi} - \frac{20\sin\varphi}{y^6} - \frac{60\cos^3\varphi}{y^7}\right\}$$

$$\frac{d^4X}{d\Phi^4} = 2\left(\frac{8\pi}{3}\right)^5\left\{\frac{3\sin\varphi}{y^6\cos^5\varphi} - \frac{(10+20\cos^2\varphi)}{y^7\cos^2\varphi} + \frac{420\sin\varphi\cos\varphi}{y^8} + \frac{840\cos^4\varphi}{y^9}\right\}$$

$$\frac{d^5X}{d\Phi^5} = 2\left(\frac{8\pi}{3}\right)^6\left\{\frac{1}{y^7}\left[\frac{3}{\cos^5\varphi} + \frac{15\sin^2\varphi}{\cos^7\varphi}\right] - \frac{1}{y^8}\cdot\frac{56\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{1}{y^9}\cdot\frac{280\,(4\cos^2\varphi - 1)}{\cos\varphi}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{y^{10}}\,10080\sin\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{y^{11}}\,15120\cos^5\varphi\right\}$$

für $\varphi = 0$ wird $y = \frac{\pi}{2}$ und die Werthe der Differentialquotienten sind:

$$\left(\frac{dX}{d\Phi}\right)_0 = -\frac{16}{3}\left(\frac{64}{3\pi}\right); \qquad \left(\frac{d^3X}{d\Phi^3}\right)_0 = -\left(80 - \frac{\pi^2}{3}\right)\left(\frac{64}{3\pi}\right)^3$$

$$\left(\frac{d^2X}{d\Phi^2}\right)_0 = +16\left(\frac{64}{3\pi}\right)^2; \qquad \left(\frac{d^4X}{d\Phi^4}\right)_0 = +(560 - 5\pi^2)\left(\frac{64}{3\pi}\right)^4$$

$$\left(\frac{d^5X}{d\Phi^5}\right)_0 = -\left(\frac{64}{3\pi}\right)^5\left\{5040 - 70\pi^2 - \frac{\pi^4}{16}\right\}$$

Setzt man nun noch

$$x = 100\,\xi$$

so erhält man nach Berechnung der numerischen Werthe der Coefficienten:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} = 5.3333 &- \frac{1}{\xi}(0.36217) \\ &+ \frac{1}{\xi^2}(0.07378) - \frac{1}{\xi^3}(0.02402) + \frac{1}{\xi^4}(0.01086) - \frac{1}{\xi^5}(0.00627)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Diese Reihe giebt z. B. für $x = 100$ also $\xi = 1$, $\mathfrak{A} = 5.0255$ und man weiss, dass der wahre Werth grösser ist, während die mechanische Quadratur $\mathfrak{A} = 5.0283$ ergab. Was das Restglied betrifft, so lässt sich leicht zeigen, dass dasselbe kleiner als das letzte mitgenommene Glied ist und das entgegengesetzte Zeichen hat. Man sieht dies auch sofort ein, wenn man den Verlauf von $-\frac{d^5 X}{d\Phi^5}$ für verschiedene φ in Betracht zieht. So ist der Logarithmus dieses Ausdruckes für $\varphi = 0^0, 10^0, 20^0, 30^0, 40^0$ und 45^0 resp.:

$$7.797,\ 6.887,\ 6.137,\ 5.515,\ 4.985,\ 4.641$$

und es folgt hieraus, dass innerhalb der in Betracht gezogenen Grenzen $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 45^0$, $-\frac{d^5 X}{d\Phi^5}$ stets positiv ist und im Allgemeinen abnimmt.

Mit Hülfe der Reihe (3) wurde nun das Integral $\mathfrak{A}$ in angemessenen Intervallen von $x = 120$ bis $x = 10000$ berechnet. Das Resultat dieser Berechnung findet man in Tabelle VI zusammengestellt. Ich habe in derselben gleich $\log\left(\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}\right)$ angesetzt (vergl. Formel (9) des vorigen Art.). Mit Hülfe dieser Tabelle kann sehr leicht die folgende Tabelle VII gebildet werden. Dieselbe giebt den Logarithmus der Grösse $M = \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(\alpha)}$. Es war nach dem vorigen Artikel

$$x = \frac{n N \delta}{\sin \alpha}$$

Nimmt man nun für $n N \delta$ die Werthe 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 und 0.5 und für α die bei Saturn vorkommenden $\alpha = 0$ bis $\alpha = 6^0.5$, so kann man für jedes α und einen angenommenen Werth von $n N \delta$ sofort aus Tabelle VII $\log M$ entnehmen.

Schon aus den Werthen dieser Tafel ersieht man, welche bedeutende Schwankungen in der Helligkeit des Saturnringes eintreten und dass diese Schwankungen, welche die Helligkeit des Ringes beinahe verdoppeln, so gross sind, dass man sich wundern muss, dass sie nicht schon früher beobachtet worden sind. Wir werden sehen, dass die neueren Beobachtungen der Theorie durchaus nicht widersprechen. Zugleich aber ergiebt eine Betrachtung der Tabelle VII, dass es gegenwärtig schwerlich gelingen wird die Grösse $nN\delta$ auch nur näherungsweise zu bestimmen. Die Zahlenwerthe zeigen für alle $nN\delta$ nahezu dasselbe Verhalten für die Werthe von $\alpha > 1^0.0$ und nur für kleinere α ist eine grössere Verschiedenheit im Wachsthum des M bemerkbar. Es wird also, wenn überhaupt die Genauigkeit der Beobachtungen für diese Zwecke ausreichend sein sollte, was gegenwärtig noch zweifelhaft ist, nothwendig werden, darauf zu achten den Saturn möglichst oft bei kleinen α zu beobachten.

14.

Es musste für mich von der grössten Wichtigkeit sein, die vorstehende Theorie der Beleuchtung des Saturn an den Resultaten photometrischer Beobachtungen zu prüfen. Namentlich erschien es wichtig, nachzusehen, ob sich in den letzteren wirklich der sehr erhebliche Einfluss, den die Phase auf die Beleuchtung des Ringes nach der auseinandergesetzten Theorie ausübt in dem geforderten Grade zeigt. Herr Dr. G. Müller hat schon früher (A. N. Nr. 2631) bemerkt, dass seine Beobachtungen mit einiger Sicherheit anzeigen, dass die Helligkeit des Saturnsystems „60 Tage vor der Opposition 81 Procent und 60 Tage nach der Opposition 87 Procent von der Oppositionshelligkeit beträgt." Um nun der Frage rücksichtlich meiner Theorie etwas näher zu treten, habe ich Herrn Dr. Müller ersucht, mir aus dem reichen Schatz seiner Saturnbeobachtungen eine passende Auswahl mitzutheilen und dieser Bitte hat derselbe in der freundlichsten Weise, für die ich ihm aufrichtig dankbar bin, entsprochen.

Meine Absicht konnte es und kann es nicht sein, die Saturn-Beobachtungen des Herrn Dr. Müller vollständig zu bearbeiten. Hierzu halte ich mich nicht für berechtigt und ich habe dieselben deshalb nur dazu

benutzt zu zeigen, dass sich schon bei ungefährer Rechnung nach meiner Theorie eine Vereinigung der Beobachtungsresultate erzielen lässt, die wenig grössere Abweichungen, als die Beobachtungsfehler in diesem Falle betragen, übrig lassen.

Aus den mir von Herrn Dr. Müller mitgetheilten Zahlen habe ich Mittelwerthe gebildet, welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Es bedeutet hierin Q_B die gemessene Lichtquantität des Saturnsystems dividirt durch die Lichtquantität, welche Capella uns zusendet, bereits reducirt auf die mittlere Opposition. Ich füge gleich die zugehörigen A, A' und α bei, welche übrigens möglicherweise in einer endgiltigen Reduction um Kleinigkeiten sich ändern werden.

Nr.	Anzahl	$\log Q_B$	A	A'	α	$\log Q(0)$	$\log Q_L(0)$
				1878.			
1	3	9.728	4°.89	2°.48	5°.43	9.692	9.698
2	4	9.802	3 .20	3 .40	0 .33	9.737	9.744
3	2	9.768	2 .02	3 .98	3 .87	9.731	9.735
4	3	9.701	1 .78	4 .22	4 .99	9.662	9.666
				1879.			
5	2	9.831	10.47	7.91	6.05	9.732	9.742
6	2	9.818	10.44	8.08	5.65	717	727
7	2	9.844	9.96	8.50	3.83	733	745
8	3	9.886	8.87	9.01	0.54	734	747
9	3	9.851	8.00	9.42	2.83	737	748
10	2	9.791	7.51	10.14	5.87	690	700
				1881 — 1882.			
11	2	9.934	20.00	18.52	5.09	9.715	9.720
12	2	9.992	19.66	18.93	3.04	756	763
13	3	0.018	18.71	19.40	1.45	758	767
14	3	9.945	18.34	20.25	6.08	735	741
				1883 — 1884.			
15	3	0.118	25.61	25.77	0.66	9.730	9.739
16	2	0.049	25.39	25.95	3.69	733	738
17	3	0.013	25.67	26.23	6.00	712	716
18	2	0.026	26.00	26.33	5.02	714	719
				1884 — 1885.			
19	4	0.009	26.53	26.79	4.61	9.688	9.693
20	4	0.047	26.55	26.80	3.69	716	721
21	5	0.079	26.63	26.82	1.03	692	701
22	4	0.045	26.77	26.83	3.72	712	718
23	4	0.029	26.97	26.81	5.66	710	715

1885—1886.

Nr.	Anzahl	$\log Q_B$	A	A'	α	$\log Q(0)$	$\log Q_L(0)$
24	2	0.102	25°.78	26°.17	1°.94	9.753	9.761
25	4	0.113	26 .01	26 .10	0 .48	709	719
26	3	0.109	26 .24	26 .04	1 .93	756	764
27	3	0.031	26 .48	25 .94	4 .23	710	715
28	3	0.022	26 .60	25 .85	5 .44	709	714
29	3	0.044	26 .64	25 .81	5 .87	734	739
30	3	0-036	26 .67	25 .77	6 .14	728	732
31	3	9.996	26 .60	25 .66	6 .01	688	693

1886—1887.

32	2	9.977	23.01	23.95	3.41	9.694	9.696
33	2	0.087	23.66	23.73	0.12	696	706
34	2	0.069	24.04	23.58	1.85	750	755
35	2	0.031	24.54	23.33	4.66	745	748
36	3	9.992	24.67	23.19	5.70	713	715

Nach Formel (9) Art. 12, kann man die vom Ringe ausgehende Lichtmenge proportional mit

$$\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \sin A \frac{\mathfrak{C}(\alpha)}{\mathfrak{C}(\infty)}$$

oder, was nach der in Tabelle VI und VII angewandten Bezeichnung dasselbe ist, proportional mit

$$\frac{\sin A(\sin A + \sin A')}{M \sin A}$$

setzen. Nun erscheint nur ein Theil des Ringes unverdeckt, dessen scheinbare Fläche in den Art. 6 und 7 mit X proportional gesetzt worden ist. Die vom Ringe ausgehende Lichtmenge ist demzufolge proportional mit

$$\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{X}{M}$$

Im Sinne der Formel (7) Art. 6 ist also

$$B = I' \frac{(\sin A + \sin A')}{\sin A} \cdot \frac{1}{M}$$

zu setzen und ganz ähnlich wenn für den Saturnkörper das Lambert'sche Gesetz angenommen wird nach Formel (II) des Art. (7)

$$B_\lambda = I'_\lambda \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{1}{M}$$

wo I'' und I_λ' Constanten sind, deren Zusammensetzung sich leicht angeben liesse, worauf einzugehen indessen vorläufig keine Veranlassung vorliegt. Die beiden citirten Formeln der Art. (6) und (7) wären nun auf die mitgetheilten Zahlen anzuwenden. Hierzu wäre es nothwendig, auch $nN\delta$ als Unbekannte einzuführen und aus der Gesammtheit der gegebenen Q_B mit zu bestimmen. Ich habe indessen eine solche Bestimmung nicht ausgeführt, weil mir dieselbe aus dem vorliegenden Material, wie schon erwähnt, kaum erreichbar erschien. Sollte dies bei einer genaueren Bearbeitung der Beobachtungen ausführbar erscheinen, so wird man am besten für zwei verschiedene Werthe von $nN\delta$ die Rechnung durchführen und auf diese Weise die Differential-Quotienten in den aufzustellenden Bedingungsgleichungen numerisch ableiten. Im Uebrigen wird es wohl kaum nöthig sein, auf die Art und Weise, wie ein strengeres Ausgleichungsverfahren, als das hier eingeschlagene, in Anwendung zu kommen hat, näher einzugehen, weil Vorschriften für die Lösung solcher Aufgaben allgemein bekannt sind. Ich habe mich durch einige Versuche davon überzeugt, dass der Werth

$$nN\delta = 0.3$$

recht gut den benutzten Beobachtungen entspricht, wenigstens so gut, als sich bei einer ersten und provisorischen Anwendung der entwickelten Formeln nur erwarten lässt. Es ist also die folgende Rechnung mit diesem Werthe ausgeführt worden. Ich habe noch zu erwähnen, dass auf den Schattenwurf keine Rücksicht genommen worden ist, weil sein Einfluss ohne Frage gegenüber andern Umständen ganz zu vernachlässigen sein dürfte.

Rechnet man zunächst nach der Formel 7 Art. 6 (gleichförmige Beleuchtung) so giebt jedes beobachtete Q_B eine Bedingungsgleichung von der Form

$$Q_B = ax + by \qquad (1)$$

wenn

$$x = I''\,Q(0);\ y = Q(0);\ a = \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{X}{M};\quad b = D\,.\,Y$$

gesetzt wird. Man kann also $Q(0)$ d. i. die auf verschwindenden Ring reducirte Lichtmenge des Saturn und die Constante I'' daraus berechnen. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hätte sich freilich nicht auf die Aufstellung der Bedingungsgleichungen (1), vielmehr einem in der Photometrie allgemein üblichen und auch nicht unbegründeten Gebrauche gemäss auf

$$\log Q_B = \log (a\,x + b\,y)$$

zu beziehen. Es ist leicht die erforderlichen linearen Differentialgleichungen durch Differentiation aufzustellen, sobald Näherungswerthe von x und y bekannt sind. Ich habe bei dem provisorischen Character der folgenden Rechnung davon abgesehen und die Unbekannten x und y aus allen vorliegenden 36 Mitteln, alle mit gleichem Gewichte, genauer bestimmt. Die Coefficienten a und b ergeben sich mit Hülfe der Tabellen III und VII fast ohne alle Rechnung. Die 36 Bedingungsgleichungen waren, wenn die Logarithmen der Coefficienten angesetzt werden und hierbei stets die Charakteristik -10 fortgelassen wird:

[9.011] x +	[9.975] y =	[9.728]
9.143	9.986	9.802
8.949	9.985	9.768
8.931	9.989	9.701
9.421	9.953	9.831
9.417	9.954	9.818
9.441	9.957	9.844
9.558	9.963	9.886
9.435	9.965	9.851
9.391	9.964	9.791
9.756	9.938	9.934
9.789	9.940	9.992
9.837	9.940	0.018
9.740	9.936	9.945
0.041	9.965	0.118
9.921	9.962	0.049
9.895	9.961	0.013
9.911	9.965	0.026
9.926	9.968	0.009
9.943	9.969	0.047
0.035	9.972	0.079
9.944	9.971	0.045
9.920	9.970	0.029
9.974	9.966	0.102
0.065	9.968	0.113
9.980	9.968	0.109
9.925	9.968	0.031
9.910	9.968	0.022
9.905	9.968	0.044
9.903	9.967	0.036
9.902	9.967	9.996
9.876	9.947	9.977
0.053	9.952	0.082
9.933	9.954	0.069
9.872	9.955	0.031
9.859	9.955	9.992

Hieraus die Normalgleichungen

$$19.396\,x + 21.865\,y = 25.587$$

$$21.865\,x + 30.353\,y = 31.843$$

woraus

$$\log x = 9.8616 \quad \log Q(0) = 9.7206$$

$$\log y = 9.7206 \quad \log I'' = 0.1411$$

Mit diesem I'' wurde nun aus jedem beobachteten Q_B das zugehörige $Q(0)$ berechnet. Man findet diese Werthe in der Zusammenstellung pag. 487 und 488 eingetragen.

Der mittlere Fehler einer Beobachtung ergiebt sich im Logarithmus von Q zu ± 0.038 resp. ± 0.039 wenn die Quadrate resp. die ersten Potenzen der Fehler zu Grunde gelegt werden. Nimmt man ferner aus den einzelnen $Q(0)$, welche derselben Opposition zugehören, die Mittel, so entsprechen den Mittelwerthen der einzelnen A folgende $\log Q(0)$:

A	$\log Q(0)$
3^0	9.706
9	724
19	741
25	722
26	703
26	723
24	720

Ein offenkundiger Gang in diesen Zahlen scheint nicht vorhanden zu sein. Was den m. F. betrifft, so ist derselbe freilich nicht sehr klein. Zum Theil fällt diese Erscheinung der Ausgleichung zur Last und wird der m. Fehler gewiss verkleinert werden können, wenn die Logarithmen der Q_B, nicht sie selbst, nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden und $nN\delta$ in die Ausgleichung einbezogen wird. Dadurch wird indessen nur eine kleine Verminderung der Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler herbeigeführt werden können, wie eine nähere Ansicht der obigen Zahlen ergeben dürfte. Es scheinen mir aber verschiedene Umstände vorhanden zu sein, welche eine vielleicht sonst erzielbare Uebereinstimmung zwischen den einzelnen photometrischen Beobachtungen gerade bei Saturn nicht herbeizuführen erlauben werden.

Zunächst wird die von der Oberfläche des Planeten ausgesandte Lichtmenge nicht unmerkliche Variationen zeigen, infolge der Rotation in Verbindung mit der Thatsache, dass nicht alle Theile der Planetenscheibe dieselbe Albedo haben und ausserdem kleine Veränderungen in ihrer Leuchtkraft aufweisen. Dann aber ist die Dichtigkeitsvertheilung innerhalb des Ringes möglicherweise Veränderungen unterworfen, die ohne Frage Einfluss auf seine Leuchtkraft ausüben können. Diese Variationen brauchen gar nicht unbedeutend zu sein und können gewiss innerhalb weniger Tage vor sich gehen.

Auf ganz dieselbe Weise habe ich noch die Voraussetzung verfolgt, dass für den Saturnkörper das Lambert'sche Gesetz gültig ist. Man kann dann für Q_B wieder die Form (1) aufstellen, nur tritt überall der Index L auf, so dass:

$$x = I_L' Q_L(0); \quad y = Q_L(0); \quad a = \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{X_L}{M}; \quad b = Y_L \cos a$$

wird und die Tafel IV in Anwendung tritt. Da im Uebrigen die Rechnung ganz analog der vorhin auseinandergesetzten war, so wird es genügen, das Resultat der provisorischen Ausgleichung anzuführen. Es ergab sich:

$$\log I_L' = 0.1108; \quad \log Q_L(0) = 9.7271$$

Mit diesen Constanten erhält man denn aus jeder einzelnen Beobachtung ein zugehöriges $Q'(0)$, welches bereits in der Zusammenstellung auf pag. 487 und 488 steht. Ordnet man die erhaltenen Werthe (zu Mitteln zusammengezogen) in derselben Weise wie früher, so ergiebt sich

A	$\log Q_L(0)$
3^0	9.711
9	735
19	748
25	728
26	710
26	730
24	724

und der mittlere Fehler einer Beobachtung zu ± 0.039 resp. ± 0.041, je nachdem mit den Quadraten oder ersten Potenzen der übrigbleibenden Fehler gerechnet wird.

In der That folgt aus der Gegenüberstellung der beiden Zahlenreihen, dass gegenwärtig mit einiger Sicherheit nicht entschieden werden kann, welches der beiden photometrischen Grundgesetze für die Saturnscheibe sich den Beobachtungen mehr anschmiegt. Der verschwindend kleine Vortheil, den das neue Gesetz zu bieten scheint, dürfte wohl kaum in's Gewicht fallen. Im Uebrigen war dieses Resultat wohl vorauszusehen. Dagegen genügt auch hier ein Blick auf die benutzte Beobachtungsreihe um zu erkennen, dass die vorliegende Theorie der Beleuchtung des Saturnringes im Wesentlichen den Beobachtungen entspricht, dass ohne Rücksichtsnahme auf sie ganz unerlaubte Schwankungen in der Lichtstärke des Saturnsystemes auftreten und dass die noch übrigbleibenden Abweichungen zum Theil wenigstens nicht durch eine bessere Bestimmung der auftretenden Constanten weggeschafft werden kann.

Fasst man Alles zusammen, so darf man behaupten, dass die Maxwell-Hirn'sche Hypothese über die Constitution des Saturnringes in den vorhandenen photometrischen Beobachtungen eine neue und nicht unwichtige Stütze erhalten hat und dieser Umstand dürfte den photometrischen Saturnbeobachtungen eine ganz besondere Wichtigkeit verschaffen.

Nachtrag.

Die Ableitung der Formel (9) Art. 12 beruht auf einer Vernachlässigung (vergl. pag. 478) deren Einfluss nun noch untersucht werden soll. Es ist von vorneherein klar, dass dieser, wenn überhaupt, nur dann in Betracht kommen kann, wenn zu gleicher Zeit der Winkel α verhältnissmässig gross und der Elevationswinkel A klein ist. Der letztere Umstand verursacht aber, dass Variationen in der vom Saturnring ausgesandten Lichtmenge in sehr verkleinertem Massstabe auf die Gesammtlichtmenge des ganzen Systems einwirken, ganz abgesehen davon, dass man für sehr kleine A der Formel (9) ohnehin nur eine bedingte Gültigkeit wird zusprechen dürfen. Infolge dieser Ueberlegungen erscheint die abgeleitete Formel völlig legitim und es würde kaum Veranlassung gegeben sein, eine strengere abzuleiten. Indessen zeigt sich merkwürdiger Weise, dass die auf pag. 478 eingeführte Vereinfachung das

Resultat nicht wesentlich vereinfacht und dass man ohne sie zu einer Formel gelangt, die bis auf einen äusserst einfachen Factor mit (9) identisch ist. Da diese Formel, wenn sie sich auch im Sinne der Praxis von (9) gar nicht unterscheidet, doch ohne Frage den Vorzug verdient, weil sie auf Grund der allgemeinen Annahmen völlig streng abgeleitet ist, so soll dieselbe mitgetheilt werden. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{h \sin \alpha}{\sin A + \sin A'} = h_0; \quad \frac{\cos A \sin \delta}{\sin A + \sin A'} \sin \alpha = \gamma$$

so kann der strenge Ausdruck für 2σ (pag. 478) geschrieben werden:

$$2\sigma = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \left[\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} - (h_0 - \gamma \zeta) \right]^2 \qquad (1)$$

Das zu berechnende Volumen Σ wird dann:

$$\Sigma = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sigma \, d\zeta \qquad (2)$$

wo ζ_1 und ζ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 - \zeta^2 = (h_0 - \gamma \zeta)^2$$

Solange diese Gleichung reelle Wurzeln hat, darf

$$h_0 = \varrho \sin \varphi \sqrt{1 + \gamma^2}$$

gesetzt werden und es ergiebt sich sofort:

$$\zeta_1 = \frac{\varrho}{\sqrt{1+\gamma^2}} (\gamma \sin \varphi - \cos \varphi)$$

$$\zeta_2 = \frac{\varrho}{\sqrt{1+\gamma^2}} (\gamma \sin \varphi + \cos \varphi)$$

Führt man mit Hülfe von (1) in (2) die unbestimmte Integration aus, so findet man leicht:

$$\int \sigma \, d\zeta = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \left\{ \tfrac{1}{2} \zeta (\varrho^2 + h_0^2) - \frac{1}{6} (1 - \gamma^2) \zeta^3 - \tfrac{1}{2} h_0 \gamma \zeta^2 \right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{3} \gamma (\varrho^2 - \zeta^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{h_0}{2} \varrho^2 \arcsin \frac{\zeta}{\varrho} - \frac{h_0 \zeta}{2} \sqrt{\varrho^2 - \zeta^2} \right\}$$

Es werde nun gesetzt

$$\gamma = \operatorname{tg} \mu \tag{3}$$

wodurch sich die einfachen Gleichungen ergeben:

$$\zeta_1 = -\varrho \cos(\varphi + \mu)$$

$$\zeta_2 = \varrho \cos(\varphi - \mu)$$

$$h_0 = \frac{\varrho}{\cos \mu} \sin \varphi$$

Dies in den Werth des unbestimmten Integrales eingesetzt giebt nach einiger Zwischenrechnung:

$$\Sigma = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \cdot \frac{\varrho^3}{\cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \tfrac{1}{3} \cos^3 \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \varphi \right\} \tag{4}$$

Diese Formel ist der strenge Ausdruck der Näherungsformel (5) pag. 479. Werden die dort gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, so ist jetzt:

$$V_0 + V_1 = \varrho^2 \pi h \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'} = \frac{\varrho^3 \pi (\sin A + \sin A')^2 \sin \varphi}{\sin \alpha \sin A \sin A' \cos \mu}$$

und

$$V = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \cdot \frac{\varrho^3}{\cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \tfrac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right\}$$

$$- \frac{4}{3} \varrho^3 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Dieser Werth von V ist anzuwenden, solange $h < h_1$, wo h_1 dasjenige h ist, für welches $\zeta_1 = \zeta_2$ wird. Für grössere h tritt an die Stelle von V dasselbe V_2, welches pag. 479 angegeben ist. Nun wird $\zeta_1 = \zeta_2$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und also:

$$h_1 = \varrho \frac{(\sin A + \sin A')}{\sin \alpha \cos \mu}$$

und die Formel (7) pag. 480 wird jetzt:

$$Q = l' f(\alpha) \frac{N}{H} \left\{ \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha \cos \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n \frac{N}{R} V} \cos \varphi \, d\varphi + \int_{h_1}^{H} e^{-\frac{n N}{R} V_2} dh \right\}$$

Das zweite Integral in diesem Ausdrucke findet man ganz ebenso wie früher gleich

$$\frac{\sin A \sin A'}{n\frac{N}{R}\varrho^2\pi(\sin A+\sin A')}\; e^{-n\frac{N\varrho^3\pi}{R\sin\alpha}\cdot\left\{\frac{(\sin A+\sin A')^2}{\sin A\sin A'\cos\mu}-\frac{4(1+\cos\alpha)}{3\pi}\right\}}$$

Wird wieder die zweite Potenz von $A'-A$ gegenüber der Einheit vernachlässigt, so wird:

$$V=\frac{4\varrho^3}{\sin\alpha\cos\mu}\left\{\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi+\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi-\frac{2}{3}\cos\mu\right\}$$

und wenn die frühere Bezeichnung:

$$\frac{32\varrho^3\pi}{3R}=\delta$$

benutzt und ausserdem gesetzt wird:

$$\Phi_1=\frac{3}{8\pi\cos\mu}\left\{\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi+\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi-\frac{2}{3}\cos\mu\right\}$$

$$=\left(\Phi+\frac{1}{2\pi}\sin^2\frac{\mu}{2}\right)\frac{1}{\cos\mu}$$

so erhält man:

$$Q=I'\frac{\sin A+\sin A'}{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{\cos\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{nN\delta\Phi_1}{\sin\alpha}}\cos\varphi\,d\varphi+\frac{8\sin\alpha}{3nN\delta}e^{-\frac{nN\delta(3\pi-2\cos\mu)}{8\pi\sin\alpha\cos\mu}}\right\}$$

Wird jetzt x eingeführt durch die Gleichung

$$x=\frac{nN\delta}{\sin\alpha\cos\mu} \tag{5}$$

und behält man im Uebrigen die Bedeutung der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welche in Formel (9) pag. 481 vorkommen, bei, setzt also:

$$\mathfrak{A}=x\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x\Phi_1}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\mathfrak{B}=\frac{8}{3}e^{-x\frac{3\pi-2}{8\pi}};\qquad \mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$$

so wird schliesslich

$$Q=I'(\sin A+\sin A')\,\mathfrak{C}\,.\,e^{-\frac{x}{2\pi}\sin^2\frac{\mu}{2}} \tag{6}$$

Dies ist also der strenge Ausdruck, welcher beinahe ebenso leicht zu berechnen ist, wie (9) pag. 481. Derselbe unterscheidet sich von dem letzteren nur durch den Factor

$$e^{-\frac{x}{2\pi}\sin^2\frac{\mu}{2}}$$

welcher, wie schon erwähnt, in allen Fällen der Praxis sich von der Einheit so wenig unterscheidet, dass diese Differenz unbedenklich vernachlässigt werden kann. Aus diesem Grunde habe ich auch den genannten Factor bei der Berechnung der oben mitgetheilten Beobachtungen nicht angebracht. Dass man aber bei einer scharfen Reduction dies trotzdem nicht versäumen wird, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

Anhang.

In den vorstehenden Entwickelungen kommen die Polarcoordinaten der Sonne und Erde in Bezug auf den Aequator eines Planeten vor. Da diese Winkel beinahe überall auftreten, wo es sich um die physische Eigenschaft der Planeten handelt, so wird es vielleicht nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie mit Hülfe gewisser Tabellen die Kenntniss dieser Polarcoordinaten leicht erlangt werden kann. Auch in diesem Punkte soll insofern bloss auf die Planeten Jupiter und Saturn Rücksicht genommen werden, als für sie allein die nothwendigen Tafeln mitgetheilt werden. Ein augenblickliches Bedürfniss hat allerdings nicht zur Aufstellung derselben aufgefordert, weil sich seit einiger Zeit Herr Dr. Marth der dankenswerthen Mühe unterzieht, alljährlich in den „Monthly Notices" nebst anderen Angaben auch die genannten Polarcoordinaten im Voraus zu berechnen. Es wird indessen doch die Mittheilung der beifolgenden Tafeln nicht ganz nutzlos sein, weil sie dort, wo die Vorausberechnungen des Herrn Marth nicht zur Hand sind, wesentliche Dienste leisten können.

Die Aufgabe, die sich für die vorliegenden Zwecke darbietet, ist so einfach, dass sie an sich wohl kaum einer weiteren Auseinandersetzung bedürftig ist. Ich muss aber mittheilen, wie die Berechnung der Hülfstafeln erfolgt ist.

Es bezeichnen i und Ω Neigung und Knotenlänge des betreffenden Planetenaequators auf der Ecliptik, β und λ heliocentrische Breite und Länge des Planeten (welche die astronomischen Ephemeriden, so u. A. das Berliner Jahrbuch, geben). Legt man nun durch den Mittelpunkt des Planeten eine zur Ecliptik parallele Ebene, so wird in Bezug auf diese $-\beta$ und $180^0+\lambda$ Breite und Länge der Sonne, vom Planeten aus gesehen, sein. Ist dann weiter A die Breite der Sonne über dem Planetenaequator und l die Länge der Sonne gezählt auf dem Aequator und zwar vom aufsteigenden Knoten desselben auf der Ecliptik, so hat man sofort:

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= -\cos i \sin\beta + \sin i \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) \\ \cos A \cos l &= -\cos\beta \cos(\lambda - \Omega) \\ \cos A \sin l &= -\sin i \sin\beta - \cos i \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Diese einfachen Gleichungen können nun in der Form geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= (\mathrm{I}) + (1) \\ \cos A \cos l &= (\mathrm{II}) + (2) \\ \cos A \sin l &= (\mathrm{III}) + (3) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

worin

$$(\mathrm{I}) = \sin i \sin(\lambda - \Omega); \quad (1) = -2\sin\frac{\beta}{2}\left\{\cos\frac{\beta}{2}\cos i + \sin\frac{\beta}{2}\sin i \sin(\lambda - \Omega)\right\}$$

$$(\mathrm{II}) = -\cos(\lambda - \Omega); \quad (2) = 2\sin^2\frac{\beta}{2}\cos(\lambda - \Omega)$$

$$(\mathrm{III}) = -\cos i \sin(\lambda - \Omega); \; (3) = -2\sin\frac{\beta}{2}\left\{\cos\frac{\beta}{2}\cos i - \sin\frac{\beta}{2}\cos i \sin(\lambda - \Omega)\right\}$$

Der Vortheil dieser Zerlegung besteht darin, dass die Symbole (1), (2) und (3), welche von den 2 Argumenten β und λ abhängen, bei Jupiter und Saturn sehr kleine Grössen sind und ihre Berechnung demzufolge in weiteren Intervallen ausgeführt werden darf, als dies mit den ursprünglichen Gleichungen der Fall gewesen wäre.

Die Tafeln VIII und IX für Saturn wurden direct nach Formeln (2) berechnet, während für Jupiter, infolge des sehr kleinen Werthes, den i bei diesem Planeten hat, weitgehende und leicht ersichtliche Vereinfachungen möglich waren. Die diesbezüglichen Tafeln X und XI werden wohl keiner weiteren Erklärung bedürfen. Ich habe nur zu erwähnen, dass den grössten Theil der Rechnungen für die Tafeln VIII und IX Herr E. Anding und für die Tabellen X und XI Herr List ausgeführt hat. Ausserdem hat mich Herr List bei der Berechnung der übrigen Tabellen wesentlich unterstützt, während Herr Anding die Freundlichkeit hatte mir bei dem Correcturlesen der vorliegenden Abhandlung behülflich zu sein und bei dieser Gelegenheit die grosse Mühe nicht scheute, die vorkommenden Formeln durchzurechnen und zu revidiren.

Offenbar ist es ausreichend, für das Argument $\lambda - \Omega$ sich auf das Intervall 0^0 bis 90^0 zu beschränken. Denn bezeichnet man die Werthe von A und l, welche von den Argumenten $x = \lambda - \Omega$ und β abhängen, mit $A(x, \beta)$ und $l(x, \beta)$ so ergiebt die Formel (1) sofort:

$$\left.\begin{aligned} A(180^0 + x, \beta) &= -A(x, -\beta) \\ l(180^0 + x, \beta) &= 180^0 + l(x, -\beta) \\ A(180^0 - x, \beta) &= A(x, \beta) \\ l(180^0 - x, \beta) &= 180^0 - l(x, \beta) \\ A(-x, \beta) &= -A(x, -\beta) \\ l(-x, \beta) &= -l(x, -\beta) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Schliesslich habe ich noch zu erwähnen, welche numerische Daten den Tabellen zu Grunde liegen.

Für Jupiter wurden die von Damoiseau gefundenen Zahlen angenommen, wie sie in Houzeau's „Vademecum" angeführt werden. Bezeichnet N' die Distanz des aufsteigenden Knoten des Jupiteraequators auf der Jupiterbahn gezählt in der letzteren und vom aufsteigenden Knoten dieser über der jeweiligen Ecliptik, Ω' den aufsteigenden Knoten der Jupiterbahn, i' die Neigung des Jupiteraequators gegen die Bahn dieses Planeten und J' die Neigung der Jupiterbahn gegen die Ecliptik, so ist nach der angeführten Quelle:

$$\begin{aligned} N' + \Omega' &= 313^0 21' 55'' + 49.''8\,(t - 1750) \\ i' &= 3^0 4' 5'' \quad\quad + 0.''022\,(t - 1750) \end{aligned}$$

Nach Leverrier hat man aber:

$$\begin{aligned} \Omega' &= 98^0 56' 17.''0 + 36.''382\,(t - 1850) \\ J' &= 1^0 18' 41.''4 \; - \; 0.''205\,(t - 1850) \end{aligned}$$

Aus diesen Zahlen habe ich für die Neigung i und Knoten Ω des Jupiteraequators in Bezug auf die jeweilige Ecliptik gefunden:

$$\left.\begin{aligned} i &= 2^0 8.'81 \quad + 0.'0065\,(t - 1850) \\ \Omega' &= 335^0 40.'54 + 0.'821\;(t - 1850) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Diese Elemente unterscheiden sich nur wenig von denen, welche Marth seinen angeführten Vorausberechnungen zu Grunde gelegt hat, und diese scheinen auch jetzt noch den Beobachtungen[1]) völlig zu genügen. Für Saturn wurden die bekannten Bessel'schen Werthe angenommen:

$$\left.\begin{aligned} i &= 28^0\,10.'75 \quad - 0.'0059\,(t - 1800) \\ \Omega &= 166^0\,53.'15 + 0.'7744\,(t - 1800) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Zur Erleichterung ist (4) und (5) in der Hülfstafel XII für verschiedene Werthe von t angeführt.

Den mitgetheilten Tafeln ist für Jupiter

$$i = 2^0\,9.'00$$

und für Saturn

$$i = 28^0\,10.'22$$

zu Grunde gelegt worden. Diese Werthe werden für lange Zeiten in den meisten Fällen völlig genügen. Will man indessen auf die Veränderlichkeit von i Rücksicht nehmen, so ergiebt sich aus (1) durch einfache Differentiation:

$$\delta A = -\sin l \,.\, \delta i$$

$$\delta l = +\operatorname{tg} A \cos l \,.\, \delta i$$

Aus denselben Tafeln VIII bis XII können offenbar auch die Coordinaten A' und l' der Erde in Bezug auf den Planetenaequator entnommen werden, wenn man nur statt der heliocentrischen Coordinaten λ und β des Planeten dessen geocentrische λ' und β' als Argumente wählt. Diese letzteren wird man, falls sie aus vorhandenen Ephemeriden nicht entnommen werden können, mit völlig hinreichender Genauigkeit aus den heliocentrischen Coordinaten mit Hülfe der Formeln berechnen können:

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta' &= \frac{r}{\Delta} \cdot \sin\beta \\ \sin(\lambda' - \lambda) &= \frac{R}{\Delta} \cdot \frac{\sin(\lambda - L)}{\cos\beta'} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wo r, Δ, R, heliocentrische resp. geocentrische Entfernung des Planeten, und Entfernung Sonne — Erde bedeuten und L die heliocentrische Erdlänge ist.

---

1) Lohse in: Publicationen des Observatoriums in Potsdam, Band III, pg. 20 etc.

Beispiel.

Es werden die Erdcoordinaten in Bezug auf den Saturnaequator für 1872, Jan. 21. 0^h m. B. Z. gesucht.

Das Jahrbuch giebt auf das m. Aequinoctium des Datums bezogen:

$$\log R = 9.9931 \quad L = 120^0\,47.'7$$
$$\log \Delta = 1.0407 \quad \lambda = 282\ 48.7 \qquad \Omega = 167^0\,49.'0$$
$$\log r = 1.0018 \quad \beta = +0\ 25.4$$

Die Anwendung der Formel (6) giebt:

$$\beta' = +0^0\,23.'2; \quad \lambda' - \lambda = 1^0\,35.'1; \quad \lambda' - \Omega = 116^0\,34.'8$$

während man aus den Tafeln VIII und IX erhält

$$A = 24^0\,35.'9; \quad l = 299^0\,28.'7$$

Das Berliner Jahrbuch giebt übereinstimmend mit diesen Zahlen:

$$A = 24^0\,36.'0; \quad l = 299^0\,28.'6$$

Druckfehler:

pag. 411 Zeile 14 v. u. lies der XY und ΞZ Ebene statt den beiderseitigen xy Ebenen.

„ 414 „ 5 v. u.: Die obere Grenze des ersten Integrales ist $\frac{\pi}{2}$ nicht π.

„ 417 In den Formeln (1) lies 1 statt l.

„ „ In Formel (Ia) lies a^2 statt a^2.

Tafeln.

I.

(vergl. pag. 418 und 421).

$\frac{a}{b}$	$\log P$	$\log R$
1.04	9.5023 −10	9.5296 −10
1.05	9.4973 50	9.5312 16
1.06	9.4924 49	9.5328 16
1.07	9.4874 50	9.5344 16
1.08	9.4825 49	9.5359 15
1.09	9.4777 48	9.5374 15
1.10	9.4728 49	9.5389 15
1.11	9.4680 48	9.5404 15
1.12	9.4633 47	9.5418 14
1.13	9.4586 47	9.5432 14
1.14	9.4539 47	9.5446 14

A	$\log Z$	$\log Z(A)$	$\log\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 A}$
0^0	9.4623 −10	0.0000	0.0000
2	9.4624	0.0001	0.0001
4	9.4627	0.0004	0.0003
6	9.4632	0.0009	0.0006
8	9.4640	0.0017	0.0011
10	9.4649	0.0026	0.0017
12	9.4661	0.0038	0.0024
14	9.4674	0.0051	0.0033
16	9.4689	0.0066	0.0042
18	9.4706	0.0083	0.0053
20	9.4724	0.0101	0.0065
22	9.4744	0.0121	0.0078
24	9.4766	0.0143	0.0091
26	9.4788	0.0165	0.0106
28	9.4812	0.0189	0.0121
30	9.4837	0.0214	0.0136

II.

(vergl. pag. 427).

α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.	α	D	I. Diff.
0^0	1.0000		30^0	0.8594		60^0	0.6198		90^0	0.3768		120^0	0.1760		150^0	0.0453	
		4			72			84			76			56			30
1	0.9996		31	0.8522		61	0.6115		91	0.3692		121	0.1704		151	0.0423	
		10			73			84			75			55			28
2	0.9986		32	0.8449		62	0.6031		92	0 3617		122	0.1649		152	0.0395	
		16			74			84			75			54			28
3	0.9970		33	0.8375		63	0.5947		93	0.3542		123	0.1595		153	0.0367	
		19			74			83			74			54			26
4	0.9951		34	0.8301		64	0.5864		94	0.3468		124	0.1541		154	0.0341	
		24			75			84			73			53			26
5	0.9927		35	0 8226		65	0.5780		95	0.3395		125	0.1488		155	0.0315	
		27			76			83			74			52			24
6	0.9900		36	0.8150		66	0.5697		96	0.3321		126	0.1436		156	0.0291	
		30			77			84			72			51			24
7	0.9870		37	0.8073		67	0.5613		97	0.3249		127	0 1385		157	0.0267	
		34			77			83			72			50			23
8	0.9836		38	0.7996		68	0.5530		98	0 3177		128	0.1335		158	0.0244	
		36			78			83			71			50			21
9	0.9800		39	0.7918		69	0.5447		99	0.3106		129	0.1285		159	0.0223	
		39			78			83			71			48			21
10	0.9761		40	0.7840		70	0.5364		100	0.3035		130	0.1237		160	0.0202	
		41			79			82			70			48			19
11	0.9720		41	0.7761		71	0.5282		101	0.2965		131	0.1189		161	0.0183	
		44			80			83			70			47			19
12	0.9676		42	0.7681		72	0.5199		102	0.2895		132	0.1142		162	0.0164	
		46			80			82			68			46			18
13	0.9630		43	0 7601		73	0.5117		103	0.2827		133	0.1096		163	0.0146	
		48			80			82			69			45			17
14	0.9582		44	0 7521		74	0.5035		104	0.2758		134	0.1051		164	0.0129	
		50			81			82			67			44			15
15	0.9532		45	0.7440		75	0 4953		105	0.2691		135	0.1007		165	0.0114	
		52			81			81			67			44			15
16	0.9480		46	0.7359		76	0.4872		106	0.2624		136	0.0963		166	0.0099	
		54			82			82			67			42			13
17	0.9426		47	0.7277		77	0.4790		107	0.2557		137	0.0921		167	0.0086	
		56			82			80			65			42			13
18	0.9370		48	0.7195		78	0.4710		108	0.2492		138	0.0879		168	0.0073	
		57			82			81			65			40			12
19	0.9313		49	0.7113		79	0 4629		109	0.2427		139	0.0839		169	0.0061	
		59			82			80			64			40			10
20	0.9254		50	0.7031		80	0.4549		110	0.2363		140	0.0799		170	0.0051	
		60			82			80			64			39			10
21	0.9194		51	0.6949		81	0.4469		111	0.2299		141	0.0760		171	0.0041	
		62			83			80			63			38			9
22	0.9132		52	0.6866		82	0.4389		112	0.2236		142	0.0722		172	0.0032	
		63			83			79			62			37			7
23	0.9069		53	0.6783		83	0.4310		113	0.2174		143	0.0685		173	0.0025	
		65			83			79			61			36			7
24	0.9004		54	0.6700		84	0.4231		114	0.2113		144	0.0649		174	0.0018	
		65			84			78			61			35			6
25	0.8939		55	0.6616		85	0.4153		115	0.2052		145	0.0614		175	0 0012	
		67			83			78			60			34			4
26	0.8872		56	0.6533		86	0.4075		116	0.1992		146	0.0580		176	0.0008	
		68			84			77			59			33			3
27	0.8804		57	0.6449		87	0.3998		117	0.1933		147	0.0547		177	0.0005	
		69			83			78			58			33			3
28	0.8735		58	0.6366		88	0.3920		118	0.1875		148	0.0514		178	0.0002	
		70			84			76			58			31			2
29	0.8665		59	0.6282		89	0.3844		119	0.1817		149	0.0483		179	0.0000	
		71			84			76			57			30			0
30	0.8594		60	0.6198		90	0.3768		120	0.1760		150	0.0453		180	0.0000	

III.

Saturn (vergl. pag. 440.)

A	$\log X$	X	$\log Y$	Y
0^0	$-\infty$	0.000 ^{47}	0.0000 ^{44}	1.000 ^{10}
1	8.6694	0.047 ^{46}	9.9956 ^{43}	0.990 ^{10}
2	8.9705	0.093 ^{47}	9.9913 ^{43}	0.980 ^{10}
3	9.1469	0.140 ^{47}	9.9870 ^{43}	0.970 ^{9}
4	9.2719	0.187 ^{47}	9.9827 ^{42}	0.961 ^{9}
5	9.3691	0.234 ^{47}	9.9785 ^{42}	0.952 ^{9}
6	9.4486	0.281 ^{47}	9.9743 ^{40}	0.943 ^{9}
7	9.5160	0.328 ^{48}	9.9703 ^{39}	0.934 ^{8}
8	9.5745	0.376 ^{47}	9.9664 ^{37}	0.926 ^{8}
9	9.6262	0.423 ^{48}	9.9627 ^{36}	0.918 ^{8}
10	9.6726	0.471 ^{48}	9.9591 ^{34}	0 910 ^{7}
11	9.7147	0.519 ^{48}	9.9557 ^{31}	0.903 ^{6}
12	9.7533	0.567 ^{48}	9.9526 ^{29}	0.897 ^{6}
13	9.7890	0 615 ^{49}	9.9497 ^{25}	0.891 ^{6}
14	9.8223	0 664 ^{49}	9 9472 ^{23}	0.885 ^{4}
15	9.8533	0.713 ^{50}	9.9449 ^{18}	0.881 ^{4}
16	9.8827	0.763 ^{51}	9.9431 ^{13}	0.877 ^{2}
17	9.9105	0.814 ^{51}	9.9418 ^{9}	0.875 ^{2}
18	9.9469	0.865 ^{52}	9.9409 ^{2}	0.873 ^{1}
19	9.9623	0.917 ^{53}	9.9407 ^{4}	0.872 ^{1}
20	9.9866	0.970 ^{54}	9.9411 ^{12}	0.873 ^{3}
21	0.0102	1.024 ^{56}	9.9423 ^{22}	0.876 ^{4}
22	0.0332	1.080 ^{58}	9.9445 ^{37}	0.880 ^{7}
23	0.0560	1.138 ^{63}	9.9482 ^{62}	0.887 ^{13}
24	0.0796	1.201 ^{64}	9.9544 ^{69}	0.900 ^{15}
25	0.1022	1.265 ^{64}	9.9613 ^{65}	0.915 ^{13}
26	0.1234	1.329 ^{62}	9.9678 ^{62}	0.928 ^{14}
27	0.1433	1.391 ^{61}	9 9740 ^{60}	0.942 ^{13}
28	0.1621	1.452 ^{61}	9.9800 ^{56}	0.955 ^{13}
29	0.1799	1.513 ^{60}	9.9856 ^{54}	0.968 ^{12}
30	0.1966	1.573	9.9910	0.980

α	D	$\log D$
0^0	1.0000	0.0000
1	0.9996	9.9998
2	0.9986	9.9994
3	0.9970	9.9987
4	0.9951	9.9979
5	0.9927	9.9968
6	0.9900	9.9956
7	0.9870	9.9943

IV.

Saturn (vergl. pag. 446.)

A	$\log X_L$	X_L	$\log Y_L$	Y_L
0^0	$-\infty$	0.000	0.0000	1.000
		72	52	12
1	8.8560	0.072	9.9948	0.988
		72	51	11
2	9.1571	0.144	9.9897	0.977
		72	51	12
3	9.3335	0.216	9.9846	0.965
		71	50	11
4	9.4585	0.287	9.9796	0.954
		72	47	10
5	9.5557	0.359	9.9749	0.944
		73	46	10
6	9.6352	0.432	9.9703	0.934
		72	43	9
7	9.7026	0.504	9.9660	0.925
		73	39	9
8	9.7611	0.577	9.9621	0.916
		73	36	7
9	9.8128	0.650	9.9585	0.909
		73	32	7
10	9.8592	0.723	9.9553	0.902
		74	26	5
11	9.9013	0.797	9.9527	0.897
		74	21	5
12	9.9399	0.871	9.9506	0.892
		74	17	3
13	9.9756	0.945	9.9489	0.889
		76	9	2
14	0.0089	1.021	9.9480	0.887
		75	5	1
15	0.0399	1.096	9.9475	0.886
		77	3	1
16	0.0693	1.173	9.9478	0.887
		78	11	2
17	0.0971	1.251	9.9489	0.889
		78	19	4
18	0.1235	1.329	9.9508	0.893
		80	26	5
19	0.1489	1.409	9.9534	0.898
		81	33	7
20	0.1732	1.490	9.9567	0.905
		83	43	9
21	0.1968	1.573	9.9610	0.914
		86	50	11
22	0.2199	1.659	9.9660	0.925
		89	60	13
23	0.2126	1.748	9.9720	0.938
		98	66	14
24	0.2662	1.846	9.9786	0.952
		98	61	13
25	0.2888	1.944	9.9847	0.965
		98	58	13
26	0.3100	2.042	9.9905	0.978
		95	54	12
27	0.3299	2.137	9.9959	0.990
		95	51	12
28	0.3487	2.232	0.0010	1.002
		93	48	11
29	0.3665	2.325	0.0058	1.013
		92	43	10
30	0.3832	2.417	0.0101	1.023

α	$\log \cos \alpha$
0	0.0000
1	9.9999
2	9.9997
3	9.9994
4	9.9989
5	9.9983
6	9.9976
7	9.9968

Va.

(vergl. pag. 453).

A	$\log b'$	φ	f	v	φ'	f'	v'	$\log c = \log\left(\frac{\sin A}{a\, b\, 180}\right)$	A
0^0	9.9499	$64^0\ 1.'4$	$0^0\ 0.'1$	$0^0\ 0.'0$	$48^0\ 55.'6$	$0^0\ 0.'0$	$0^0\ 0.'0$	$-\infty$	0^0
		$_0\ 1.4$	$_2\ 18.2$	$_2\ 3.2$	$_{0.8}$	$_1\ 17.'3$	$_1\ 8.9$		
1	9.9499	64 2.8	2 18.3	2 3.2	48 56.4	1 17.3	1 8.9	6.0367	1
		$_0\ 4.0$	$_2\ 18.5$	$_2\ 3.6$	$_{2.4}$	$_1\ 17.3$	$_1\ 8.9$		
2	9.9500	64 6.8	4 36.8	4 6.8	48 58.6	2 34.6	2 17.8	6.3376	2
		$_0\ 6.9$	$_2\ 19.2$	$_2\ 4.4$	$_{3.8}$	$_1\ 17.5$	$_1\ 9.2$		
3	9.9501	64 13.7	6 56.0	6 11.2	49 2.4	3 52.1	3 27.0	6.5136	3
		$_0\ 9.6$	$_2\ 20.2$	$_2\ 5.6$	$_{5.4}$	$_1\ 17.9$	$_1\ 9.5$		
4	9.9502	64 23.3	9 16.2	8 16.8	49 7.8	5 10.0	4 36.5	6.6384	4
		$_0\ 12.4$	$_2\ 21.3$	$_2\ 7.1$	$_{6.8}$	$_1\ 18.1$	$_1\ 10.0$		
5	9.9504	64 35.7	11 37.5	10 23.9	49 14.6	6 28.1	5 46.5	6.7351	5
		$_0\ 15.4$	$_2\ 23.1$	$_2\ 9.2$	$_{8.5}$	$_1\ 18.6$	$_1\ 10.5$		
6	9.9505	64 51.1	14 0.6	12 33.1	49 23.1	7 46.7	6 57.0	6.8140	6
		$_0\ 18.4$	$_2\ 25.1$	$_2\ 11.8$	$_{10.0}$	$_1\ 19.1$	$_1\ 11.1$		
7	9.9508	65 9.5	16 25.7	14 44.9	49 33.1	9 5.8	8 8.1	6.8807	7
		$_0\ 21.6$	$_2\ 27.5$	$_2\ 14.8$	$_{11.7}$	$_1\ 19.8$	$_1\ 11.9$		
8	9.9510	65 31.1	18 53.2	16 59.7	49 44.8	10 25.6	9 20.0	6.9383	8
		$_0\ 24.9$	$_2\ 30.5$	$_2\ 18.5$	$_{13.3}$	$_1\ 20.5$	$_1\ 12.9$		
9	9.9513	65 56.0	21 23.7	19 18.2	49 58.1	11 46.1	10 32.9	6.9891	9
		$_0\ 28.4$	$_2\ 34.0$	$_2\ 22.8$	$_{15.0}$	$_1\ 21.3$	$_1\ 13.9$		
10	9.9516	66 24.4	23 57.7	21 41.0	50 13.1	13 7.4	11 46.8	7.0345	10
		$_0\ 32.2$	$_2\ 38.1$	$_2\ 27.7$	$_{16.8}$	$_1\ 22.3$	$_1\ 15.1$		
11	9.9520	66 56.6	26 35.8	24 8.7	50 29.9	14 29.7	13 1.9	7.0754	11
		$_0\ 36.3$	$_2\ 43.0$	$_2\ 33.8$	$_{18.5}$	$_1\ 23.4$	$_1\ 16.4$		
12	9.9524	67 32.9	29 18.8	26 42.5	50 48.4	15 53.1	14 18.3	7.1127	12
		$_0\ 40.7$	$_2\ 48.7$	$_2\ 40.7$	$_{20.4}$	$_1\ 24.5$	$_1\ 17.9$		
13	9.9528	68 13.6	32 7.5	29 23.2	51 8.8	17 17.6	15 36.2	7.1469	13
		$_0\ 45.7$	$_2\ 55.4$	$_2\ 49.0$	$_{22.4}$	$_1\ 26.0$	$_1\ 19.5$		
14	9.9532	68 59.3	35 2.9	32 12.2	51 31.2	18 43.6	16 55.7	7.1785	14
		$_0\ 51.2$	$_3\ 3.7$	$_2\ 58.8$	$_{24.4}$	$_1\ 27.4$	$_1\ 21.3$		
15	9.9537	69 50.5	38 6.6	35 11.0	51 55.6	20 11.0	18 17.0	7.2078	15
		$_0\ 57.5$	$_3\ 13.5$	$_3\ 10.7$	$_{26.4}$	$_1\ 29.1$	$_1\ 23.3$		
16	9.9542	70 48.0	41 20.1	38 21.7	52 22.0	21 40.1	19 40.3	7.2351	16
		$_1\ 4.9$	$_3\ 25.7$	$_3\ 25.2$	$_{28.7}$	$_1\ 30.9$	$_1\ 25.6$		
17	9.9547	71 52.9	44 45.8	41 46.9	52 50.7	23 11.0	21 5.9	7.2607	17
		$_1\ 13.8$	$_3\ 41.2$	$_3\ 43.5$	$_{31.0}$	$_1\ 32.9$	$_1\ 27.9$		
18	9.9552	73 6.7	48 27.0	45 30.4	53 21.7	24 43.9	22 33.8	7.2848	18
		$_1\ 24.9$	$_4\ 1.5$	$_4\ 7.2$	$_{33.5}$	$_1\ 35.2$	$_1\ 30.7$		
19	9.9558	74 31.6	52 28.5	49 37.6	53 55.2	26 19.1	24 4.5	7.3074	19
		$_1\ 39.5$	$_4\ 29.3$	$_4\ 39.6$	$_{36.1}$	$_1\ 37.7$	$_1\ 33.6$		
20	9.9564	76 11.1	56 57.8	54 17.2	54 31.3	27 56.8	25 38.1	7.3288	20
		$_2\ 0.4$	$_5\ 11.0$	$_5\ 27.4$	$_{38.9}$	$_1\ 40.5$	$_1\ 36.9$		
21	9.9570	78 11.8	62 8.8	59 44.6	55 10.2	29 37.3	27 15.0	7.3491	21
		$_2\ 34.9$	$_6\ 22.6$	$_6\ 48.9$	$_{41.9}$	$_1\ 43.6$	$_1\ 40.5$		
22	9.9577	80 46.4	68 31.4	66 33.5	55 52.1	31 20.9	28 55.5	7.3684	22
		$_3\ 56.8$	$_9\ 20.8$	$_{10}\ 8.2$	$_{45.1}$	$_1\ 47.0$	$_1\ 44.6$		
23	9.9584	84 43.2	77 52.2	76 41.7	56 37.2	33 7.9	30 40.1	7.3867	23
					$_{48.6}$	$_1\ 50.9$	$_1\ 49.1$		
24	9.9591	90 0.0	90 0.0	90 0.0	57 25.8	34 58.8	32 29.2	7.4041	24
					$_{52.5}$	$_1\ 55.2$	$_1\ 54.1$		
25	9.9598	90 0.0	90 0.0	90 0.0	58 18.3	36 54.0	34 23.3	7.4207	25
					$_{56.7}$	$_2\ 0.2$	$_1\ 59.7$		
26	9.9605	90 0.0	90 0.0	90 0.0	59 15.0	38 54.2	36 23.0	7.4366	26
					$_{61.5}$	$_2\ 5.9$	$_2\ 6.3$		
27	9.9612	90 0.0	90 0.0	90 0.0	60 16.5	41 0.1	38 29.3	7.4518	27
					$_{66.7}$	$_2\ 12.3$	$_2\ 13.6$		
28	9.9620	90 0.0	90 0.0	90 0.0	61 23.2	43 12.4	40 42.9	7.4664	28
					$_{72.9}$	$_2\ 20.0$	$_2\ 22.3$		
29	9.9628	90 0.0	90 0.0	90 0.0	62 36.1	45 32.4	45 5.2	7.4804	29
					$_{79.8}$	$_2\ 28.9$	$_2\ 32.3$		
30	9.9636	90 0.0	90 0.0	90 0.0	63 55.9	48 1.3	45 37.5	7.4938	30

$\log \frac{a^2}{2} = 0.41603$ $\log \frac{a'^2}{2} = 0.06381$ $\log \frac{a^2 - a'^2}{2} = 0.16079$ $\log b = 9.94993$ $a = 1$

V b.

(vergl. pag. 453).

A	$\log \Sigma_0$	$\log \Sigma_1$	$\log \Sigma$	$\log V$	$\log \Sigma_0'$	$\log \Sigma_1'$	$\log \Sigma'$	$\log V'$	A
0^0	8.0704 $^{3}_{-10}$	8.5943 $^{2}_{-10}$	8.4398 $^{5}_{-10}$	$-\infty$	7.413 $^{0}_{-10}$	8.3031 $^{1}_{-10}$	8.2432 $^{2}_{-10}$	$-\infty$	0^0
1	8.0707 ^{9}	8.5941 ^{6}	8.4393 ^{11}	5.735 $^{301}_{-10}$	7.413 ^{1}	8.3030 ^{4}	8.2430 ^{5}	5.736	1
2	8.0716 ^{15}	8.5935 ^{10}	8.4382 ^{21}	6.036 ^{175}	7.414 ^{1}	8.3026 ^{6}	8.2425 ^{9}	6.036 ^{176}	2
3	8.0731 ^{21}	8.5925 ^{14}	8.4361 ^{29}	6.211 ^{124}	7.415 ^{2}	8.3020 ^{8}	8.2416 ^{12}	6.212 ^{124}	3
4	8.0752	8.5911	8.4332	6.335	7.417	8.3012	8.2404	6.336	4
	27	18	39	95	2	12	16	97	
5	8.0779 ^{34}	8.5893 ^{23}	8.4293 ^{47}	6.430 ^{77}	7.419 ^{2}	8.3000 ^{13}	8.2388 ^{19}	6.433 ^{78}	5
6	8.0813 ^{40}	8.5870 ^{27}	8.4246 ^{58}	6.507 ^{65}	7.421 ^{3}	8.2987 ^{16}	8.2369 ^{23}	6.511 ^{66}	6
7	8.0853 ^{46}	8.5843 ^{31}	8.4188 ^{68}	6.572 ^{55}	7.424 ^{3}	8.2971 ^{19}	8.2346 ^{27}	6.577 ^{56}	7
8	8.0899 ^{54}	8.5812 ^{36}	8.4120 ^{79}	6.627 ^{48}	7.427 ^{4}	8.2952 ^{21}	8.2319 ^{30}	6.633 ^{50}	8
9	8.0953	8.5776	8.4041	6.675	7.431	8.2931	8.2289	6.683	9
	60	42	93	42	4	24	35	44	
10	8.1013 ^{69}	8.5734 ^{46}	8.3918 ^{106}	6.717 ^{38}	7.435 ^{5}	8.2907 ^{27}	8.2254 ^{39}	6.727 ^{40}	10
11	8.1082 ^{76}	8.5688 ^{53}	8.3842 ^{124}	6.755 ^{33}	7.440 ^{5}	8.2880 ^{29}	8.2215 ^{43}	6.767 ^{36}	11
12	8.1158 ^{84}	8.5635 ^{59}	8.3718 ^{140}	6.788 ^{30}	7.445 ^{6}	8.2851 ^{33}	8.2172 ^{47}	6.803 ^{33}	12
13	8.1242 ^{95}	8.5576 ^{67}	8.3578 ^{163}	6.818 ^{27}	7.451 ^{6}	8.2818 ^{35}	8.2125 ^{53}	6.836 ^{29}	13
14	8.1337	8.5509	8.3415	6.845	7.457	8.2783	8.2072	6.865	14
	104	74	189	25	7	38	57	28	
15	8.1441 ^{115}	8.5435 ^{84}	8.3226 ^{221}	6.870 ^{22}	7.464 ^{7}	8.2745 ^{41}	8.2015 ^{62}	6.893 ^{25}	15
16	8.1556 ^{129}	8.5351 ^{95}	8.3005 ^{262}	6.892 ^{20}	7.471 ^{8}	8.2704 ^{45}	8.1953 ^{68}	6.918 ^{24}	16
17	8.1685 ^{144}	8.5256 ^{107}	8.2743 ^{316}	6.912 ^{19}	7.479 ^{8}	8.2659 ^{48}	8.1885 ^{74}	6.942 ^{22}	17
18	8.1829 ^{163}	8.5149 ^{125}	8.2427 ^{391}	6.931 ^{16}	7.487 ^{9}	8.2611 ^{51}	8.1811 ^{81}	6.964 ^{21}	18
19	8.1992	8.5024	8.2036	6.947	7.496	8.2560	8.1730	6.985	19
	187	146	504	15	9	56	87	19	
20	8.2179 ^{221}	8.4878 ^{179}	8.1532 ^{702}	6.962 ^{13}	7.505 ^{10}	8.2504 ^{59}	8.1643 ^{95}	7.004 ^{18}	20
21	8.2400 ^{277}	8.4699 ^{232}	8.0830 ^{1076}	6.975 ^{12}	7.515 ^{11}	8.2445 ^{64}	8.1548 ^{104}	7.022 ^{16}	21
22	8.2677 ^{407}	8.4467 ^{361}	7.9754 ^{2432}	6.987 ^{11}	7.526 ^{11}	8.2381 ^{68}	8.1444 ^{113}	7.038 ^{16}	22
23	8.3084 ^{502}	8.4106 ^{529}	7.7322	6.998 ^{32}	7.537 ^{13}	8.2313 ^{73}	8.1331 ^{123}	7.054 ^{15}	23
24	8.3586	8.3586	$-\infty$	7.030	7.550	8.2240	8.1208	7.069	24
	42	42		48	12	78	136	14	
25	8.3544 ^{44}	8.3544 ^{44}	$-\infty$	7.078 ^{48}	7.562 ^{14}	8.2162 ^{85}	8.1072 ^{150}	7.083 ^{13}	25
26	8.3500 ^{45}	8.3500 ^{45}	$-\infty$	7.126 ^{45}	7.576 ^{15}	8.2077 ^{91}	8.0922 ^{165}	7.096 ^{12}	26
27	8.3455 ^{47}	8.3455 ^{47}	$-\infty$	7.171 ^{43}	7.591 ^{15}	8.1986 ^{98}	8.0757 ^{185}	7.108 ^{11}	27
28	8.3408 ^{49}	8.3408 ^{49}	$-\infty$	7.214 ^{41}	7.606 ^{17}	8.1888 ^{107}	8.0572 ^{208}	7.119 ^{11}	28
29	8.3359 ^{51}	8.3359 ^{51}	$-\infty$	7.255 ^{39}	7.623 ^{17}	8.1781 ^{117}	8.0364 ^{236}	7.130 ^{10}	29
30	8.3308	8.3308	$-\infty$	7.294	7.640	8.1664	8.0128	7.140	30

V c.

(vergl. pag. 464).

	$\lambda(a)$	$\log\lambda(a)$	$\lambda(b)$	$\log\lambda(b)$	$\lambda(c)$	$\log\lambda(c)$	A
0^0	−0.0000		−0.0000	−	+	∞	0^0
1	0	4.21_n-10	0	4.60_n-10	+0.4999	9.6989−10	1
2	0	4.66	0	5.34	0.2498	9.3976	2
3	0	5.00	1	5.72	0.1663	9.2200	3
4	0	5.29	1	5.97	0.1245	9.0952	4
5	0	5.48	1	6.16	0.0993	8.997	5
6	0	5.64	2	6.32	0.0825	8.916	6
7	1	5.78	3	6.46	0.0703	8.847	7
8	1	5.90	4	6.58	0.0611	8.786	8
9	1	6.00	5	6.69	0.0538	8.731	9
10	1	6.09	6	6.79	0.0480	8.681	10
11	2	6.18	8	6 88	0.0430	8 634	11
12	2	6.26	9	6.96	0.0388	8.589	12
13	2	6.33	11	7.043	0.0351	8.546	13
14	3	6.40	13	7.118	0.0319	8.503	14
15	3	6.46	16	7.191	0.0289	8.460	15
16	3	6.53	18	7.262	0.0262	8.417	16
17	4	6.58	21	7.331	0.0236	8.372	17
18	4	6.64	25	7.400	0.0211	8.324	18
19	5	6.69	30	7.470	0.0186	8.270	19
20	6	6.74	35	7.542	0.0161	8.207	20
21	6	6.79	42	7.619	0.0134	8.128	21
22	7	6.84	51	7.706	0.0104	8.015	22
23	8	6.89	66	7.822	0.0061	7.787	23
24	9	6.93	87	7.941	0.0009	6.935	24
25	10	6.98	82	7.914	0.0010	6.982	25
26	11	7.02	77	7.885	0.0011	7.025	26
27	12	7.07	72	7.856	0.0012	7.072	27
28	13	7.12	67	7.824	0.0013	7.117	28
29	14	7.16	62	7.793	0.0014	7.155	29
30	0.0016	7.20	0.0057	7.758	0.0016	7.201	30

VI.

$$M = \frac{\mathfrak{G}(\infty)}{\mathfrak{G}(x)}$$ (vergl. pag. 485).

x	log M	x	log M	x	log M	x	log M	x	log M
0.0	0.3010 ^{163}	10.0	0.1389 ^{37}	20	0.0910 ^{29}	80	0.0311 ^{16}	200	0.0136 ^{43}
0.5	0.2847 ^{147}	10.5	0.1352 ^{35}	21	0.0881 ^{28}	85	0.0295 ^{15}	300	0.0093 ^{22}
1.0	0.2700 ^{134}	11.0	0.1317 ^{32}	22	0.0853 ^{25}	90	0.0280 ^{13}	400	0.0071 ^{14}
1.5	0.2566 ^{121}	11.5	0.1285 ^{30}	23	0.0828 ^{25}	95	0.0267 ^{11}	500	0.0057 ^{9}
2.0	0.2445 ^{111}	12.0	0.1255 ^{29}	24	0.0803 ^{23}	100	0.0256 ^{20}	600	0.0048 ^{7}
2.5	0.2334 ^{101}	12.5	0.1226 ^{28}	25	0.0780 ^{22}	110	0.0236 ^{18}	700	0.0041 ^{5}
3.0	0.2233 ^{93}	13.0	0.1198 ^{27}	26	0.0758 ^{20}	120	0.0218 ^{15}	800	0.0036 ^{4}
3.5	0.2140 ^{85}	13.5	0.1171 ^{26}	27	0.0738 ^{19}	130	0.0203 ^{13}	900	0.0032 ^{3}
4.0	0.2055 ^{79}	14.0	0.1145 ^{24}	28	0.0719 ^{19}	140	0.0190 ^{12}	1000	0.0029 ^{14}
4.5	0.1976 ^{74}	14.5	0 1121 ^{23}	29	0.0700 ^{17}	150	0.0178 ^{10}	2000	0.0015 ^{8}
5.0	0.1902 ^{68}	15.0	0.1098 ^{22}	30	0.0683 ^{74}	160	0.0168 ^{8}	4000	0.0007 ^{2}
5.5	0.1834 ^{63}	15.5	0.1076 ^{22}	35	0.0609 ^{69}	170	0.0160 ^{8}	6000	0.0005 ^{1}
6.0	0.1771 ^{59}	16.0	0.1054 ^{21}	40	0.0549 ^{49}	180	0.0152 ^{8}	8000	0.0004 ^{1}
6.5	0.1712 ^{55}	16.5	0.1033 ^{19}	45	0.0500 ^{40}	190	0.0144 ^{8}	10000	0 0003
7.0	0.1657 ^{52}	17.0	0.1014 ^{19}	50	0.0460 ^{34}	200	0.0136 ^{8}		
7.5	0.1605 ^{49}	17.5	0.0995 ^{18}	55	0.0426 ^{30}				
8.0	0.1556 ^{45}	18.0	0.0977 ^{17}	60	0.0396 ^{25}				
8.5	0.1511 ^{43}	18.5	0.0960 ^{17}	65	0.0371 ^{22}				
9.0	0.1468 ^{40}	19.0	0 0943 ^{17}	70	0.0349 ^{20}				
9.5	0.1428 ^{39}	19.5	0.0926 ^{16}	75	0.0329 ^{18}				
10.0	0.1389	20.0	0.0910	80	0.0311				

VII.

$$M = \frac{\mathfrak{G}(\infty)}{\mathfrak{G}(a)}$$ (vergl. pag. 485).

a	$nN\delta = 0.1$ log M	$nN\delta = 0.2$ log M	$nN\delta = 0.3$ log M	$nN\delta = 0.4$ log M	$nN\delta = 0.5$ log M	a
0°0	0.000 ^{41}	0.000 ^{23}	0.000 ^{16}	0.000 ^{12}	0.000 ^{10}	0°0
0. 1	0.041 ^{30}	0.023 ^{18}	0.016 ^{13}	0.012 ^{11}	0.010 ^{9}	0. 1
0. 2	0.071 ^{23}	0.041 ^{16}	0.029 ^{12}	0.023 ^{9}	0.019 ^{8}	0. 2
0. 3	0.094 ^{19}	0.057 ^{14}	0.041 ^{11}	0.032 ^{9}	0.027 ^{7}	0. 3
0. 4	0.113 ^{16}	0.071 ^{12}	0.052 ^{10}	0.041 ^{8}	0.034 ^{7}	0. 4
0. 5	0.129 ^{13}	0.083 ^{11}	0.062 ^{9}	0.049 ^{8}	0.041 ^{7}	0. 5
0. 6	0.142 ^{12}	0.094 ^{10}	0.071 ^{8}	0.057 ^{7}	0.048 ^{6}	0. 6
0. 7	0.154 ^{10}	0.104 ^{9}	0.079 ^{8}	0.064 ^{7}	0.054 ^{6}	0. 7
0. 8	0.164 ^{9}	0.113 ^{8}	0.087 ^{7}	0.071 ^{6}	0.060 ^{6}	0. 8
0. 9	0.173 ^{8}	0.121 ^{8}	0.094 ^{7}	0.077 ^{6}	0.066 ^{5}	0. 9
1. 0	0.181 ^{27}	0.129 ^{30}	0.101 ^{28}	0.083 ^{25}	0.071 ^{23}	1. 0
1. 5	0.208 ^{18}	0.159 ^{22}	0.129 ^{21}	0.108 ^{21}	0.094 ^{19}	1. 5
2. 0	0.226 ^{12}	0.181 ^{15}	0.150 ^{17}	0.129 ^{16}	0.113 ^{16}	2. 0
2. 5	0.238 ^{9}	0.196 ^{13}	0.167 ^{14}	0.145 ^{14}	0.129 ^{13}	2. 5
3. 0	0.247 ^{6}	0.209 ^{9}	0.181 ^{10}	0.159 ^{12}	0.142 ^{12}	3. 0
3. 5	0.253 ^{5}	0.218 ^{8}	0.191 ^{9}	0.171 ^{10}	0.154 ^{10}	3. 5
4. 0	0.258 ^{5}	0.226 ^{6}	0.200 ^{8}	0.181 ^{8}	0.164 ^{9}	4. 0
4. 5	0.263 ^{3}	0.232 ^{6}	0.208 ^{7}	0.189 ^{7}	0.173 ^{7}	4. 5
5. 0	0.266 ^{3}	0.238 ^{5}	0.215 ^{6}	0.196 ^{7}	0.180 ^{7}	5. 0
5. 5	0.269 ^{2}	0.243 ^{4}	0.221 ^{5}	0.203 ^{5}	0.187 ^{6}	5. 5
6. 0	0.271 ^{2}	0.247 ^{3}	0.226 ^{4}	0.208 ^{6}	0.193 ^{6}	6. 0
6. 5	0.273	0.250	0.230	0.214	0.199	6. 5

VIII

giebt für Saturn A mit den Argumenten $(\lambda - \Omega)$ und β.

$\lambda-\Omega$	$\beta=-2^0 40'$	$\beta=-2^0 0'$	$\beta=-1^0 20'$	$\beta=-0^0 40'$	$\beta=0$	$\beta=+0^0 40'$	$\beta=+1^0 20'$	$\beta=+2^0 0'$	$\beta=+2^0 40'$	Δ für $\Delta\beta=40'$
0^0	+2 21.0	+1 45.8	+1 10.5	+0 35.3	+0 0.0	−0 35.3	−1 10.5	−1 45.8	−2 21.0	−35.3
	28.4	28.3	28.4	28.3	28.3	28.4	28.3	28.3	28.3	
1	2 49.4	2 14.1	1 38.9	1 3.6	0 28.3	−0 6.9	−0 42.2	−1 17.5	−1 52.7	35.3
	28.3	28.3	28.3	28.3	28.4	28.3	28.3	28.3	28.3	
2	3 17.7	2 42.4	2 7.2	1 31.9	0 56.7	+0 21.4	−0 13.9	−0 49.2	−1 24.4	35.3
	28.3	28.4	28.3	28.3	28.3	28.3	28.3	28.3	28.2	
3	3 46.0	3 10.8	2 35.5	2 0.2	1 25.0	0 49.7	+0 14.4	−0 20.9	−0 56.2	35.3
	28.3	28.3	28.3	28.3	28.2	28.3	28.3	28.3	28.3	
4	4 14.3	3 39.1	3 3.8	2 28.5	1 53.2	1 18.0	0 42.7	+0 7.4	−0 27.9	35.3
	28.3	28.2	28.3	28.3	28.3	28.2	28.2	28.2	28.2	
5	4 42.6	4 7.3	3 32.1	2 56.8	2 21.5	1 46.2	1 10.9	0 35.6	+0 0.3	35.3
	28.3	28.3	28.2	28.2	28.2	28.2	28.2	28.2	28.2	
6	5 10.9	4 35.6	4 0.3	3 25.0	2 49.7	2 14.4	1 39.1	1 3.8	0 28.5	35.3
	28.2	28.2	28.2	28.2	28.2	28.2	28.2	28.1	28.1	
7	5 39.1	5 3.8	4 28.5	3 53.2	3 17.9	2 42.6	2 7.3	1 31.9	0 56.6	35.3
	28.2	28.2	28.2	28.2	28.2	28.1	28.2	28.1	28.0	
8	6 7.3	5 32.0	4 56.7	4 21.4	3 46.0	3 10.7	2 35.4	2 0.0	1 24.6	35.3
	28.2	28.2	28.2	28.2	28.1	28.1	28.1	28.0	28.0	
9	6 35.5	6 0.2	5 24.8	4 49.5	4 14.1	3 38.8	3 3.4	2 28.0	1 52.6	35.3
	28.1	28.0	28.1	28.0	28.0	28.0	28.0	28.0	28.0	
10	7 3.6	6 28.2	5 52.9	5 17.5	4 42.1	4 6.8	3 31.4	2 56.0	2 20.6	35.4
	28.0	28.0	28.0	28.0	28.0	27.9	27.9	27.9	27.8	
11	7 31.6	6 56.2	6 20.9	5 45.5	5 10.1	4 34.7	3 59.3	3 23.9	2 48.4	35.4
	28.0	28.0	27.9	27.9	27.9	27.9	27.8	27.7	27.8	
12	7 59.6	7 24.2	6 48.8	6 13.4	5 38.0	5 2.6	4 27.1	3 51.6	3 16.2	35.4
	27.9	27.9	27.9	27.8	27.8	27.7	27.7	27.8	27.7	
13	8 27.5	7 52.1	7 16.7	6 41.2	6 5.8	5 30.3	4 54.8	4 19.4	3 43.9	35.5
	27.9	27.8	27.8	27.8	27.7	27.7	27.7	27.6	27.5	
14	8 55.4	8 19.9	7 44.5	7 9.0	6 33.5	5 58.0	5 22.5	4 47.0	4 11.4	35.5
	27.7	27.7	27.6	27.6	27.6	27.6	27.5	27.5	27.5	
15	9 23.1	8 47.6	8 12.1	7 36.6	7 1.1	6 25.6	5 50.0	5 14.5	4 38.9	35.5
	27.7	27.7	27.6	27.6	27.5	27.6	27.5	27.4	27.4	
16	9 50.8	9 15.3	8 39.7	8 4.2	7 28.6	6 53.1	6 17.5	5 41.9	5 6.3	35.6
	27.5	27.5	27.5	27.4	27.4	27.3	27.3	27.3	27.2	
17	10 18.3	9 42.8	9 7.2	8 31.6	7 56 0	7 20.4	6 44.8	6 9.2	5 33.5	35.6
	27.5	27.4	27.4	27.4	27.3	27 2	27.2	27.1	27.1	
18	10 45.8	10 10.2	9 34 6	8 59.0	8 23.3	7 47.6	7 12.0	6 36.3	6 0.6	35.7
	27.3	27.3	27.2	27.2	27.2	27.2	27.1	27.1	27.0	
19	11 13.1	10 37.5	10 1.8	9 26.2	8 50.5	8 14.8	7 39.1	7 3.4	6 27.6	35.7
	27.2	27.1	27.2	27.0	27.0	27.0	26,9	26,9	26.9	
20	11 40.3	11 4.6	10 29.0	9 53.2	9 17.5	8 41.8	8 6.0	7 30.3	6 54.5	35.7
	27.1	27.1	27.0	27.0	26.9	26.8	26.8	26.7	26.7	
21	12 7.4	11 31.7	10 56.0	10 20.2	9 44.4	9 8.6	8 32.8	7 57.0	7 21.2	35.8
	26.9	26.9	26.9	26.8	26.8	26.7	26.7	26.6	26.6	
22	12 34.3	11 58.6	11 22 9	10 47.0	10 11.2	9 35.3	8 59.5	8 23.6	7 47.8	35.8
	26.8	26.7	26.6	26.7	26.6	26.6	26.5	26.5	26.4	
23	13 1 1	12 25.3	11 49.5	11 13.7	10 37.8	10 1.9	9 26.0	8 50.1	8 14.2	35.9
	26.7	26.6	26.6	26.5	26.4	26.4	26.4	26,3	26.2	
24	13 27.8	12 51.9	12 16.1	11 40.2	11 4.2	10 28.3	9 52.4	9 16.4	8 40.4	35.9
	26.5	26.5	26 4	26.3	26.3	26.2	26.1	26.1	26 1	
25	13 54.3	13 18.4	12 42.5	12 6.5	11 30.5	10 54.5	10 18.5	9 42.5	9 6.5	36.0
	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1	26.0	25.9	25.9	
26	14 20.6	13 44.6	13 8.7	12 32.7	11 56.6	11 20.6	10 44.5	10 8.4	9 32.4	36.0
	26.2	26.2	26.0	26.0	26.0	25.9	25.8	25.8	25.7	
27	14 46.8	14 10.8	13 34.7	12 58.7	12 22.6	11 46.5	11 10.3	10 34.2	9 58.1	36.1
	26.0	25.9	25.9	25.8	25.7	25.6	25.6	25.6	25.5	
28	15 12.8	14 36.7	14 0.6	13 24.5	12 48.3	12 12.1	11 35.9	10 59.8	10 23.6	36.2
	25.8	25.7	25.7	25.6	25.7	25.5	25.5	25.3	25.3	
29	15 38.6	15 2.4	14 26.3	13 50.1	13 13.9	12 37.6	12 1.4	11 25.1	10 48.9	36.2
	25.6	25.6	25.4	25.4	25.3	25.3	25.2	25.2	25.0	
30	16 4.2	15 28.0	14 51.7	14 15.5	13 39.2	13 2.9	12 26.6	11 50.3	11 13.9	36.3
	25.4	25.3	25.3	25.2	25.1	25.1	25.0	24.9	24.9	
31	16 29.6	15 53.3	15 17 0	14 40.7	14 4.3	13 28.0	12 51.6	12 15.2	11 38.8	36.4
	25.1	25.1	25.1	25.0	25.0	24.8	24.8	24.7	24.7	
32	16 54.7	16 18.4	15 42.1	15 5.7	14 29.3	13 52.8	13 16.4	12 39.9	12 3.5	36.4
	25.0	24.9	24.8	24.7	24.7	24.7	24.6	24.5	24.4	
33	17 19.7	16 43.3	16 6.9	15 30.4	14 54.0	14 17.5	13 41.0	13 4.4	12 27.9	36.5
	24.8	24.7	24.6	24.6	24.4	24.4	24.3	24.3	24.2	
34	17 44.5	17 8.0	16 31.5	15 55.0	15 18.4	14 41.9	14 5.3	13 28.7	12 52.1	36.6
	24.5	24.4	24.4	24.3	24.2	24.1	24.1	24.0	23.9	
35	18 9 0	17 32.4	16 55.9	16 19.3	15 42.6	15 6.0	14 29.4	13 52.7	13 16.0	36.7
	24.3	24.2	24.1	24.0	24.0	23.9	23.8	23.7	23.7	
36	18 33.3	17 56.6	17 20.0	16 43.3	16 6.6	15 29.9	14 53.2	14 16.4	13 39.7	36.7
	24.0	24.0	23.9	23.8	23.8	23.7	23.6	23.5	23.4	
37	18 57.3	18 20.6	17 43.9	17 7.1	16 30.4	15 53.6	15 16.8	14 39.9	14 3.1	36.8
	23.7	23.7	23.6	23.6	23.4	23.4	23.3	23.3	23.2	
38	19 21.0	18 44.3	18 7.5	17 30.7	16 53.8	16 17.0	15 40.1	15 3.2	14 26.3	36.8
	23.5	23.4	23.3	23.2	23.2	23.1	23.0	22,9	22.8	
39	19 44.5	19 7.7	18 30.8	17 53.9	17 17.0	16 40.1	16 3.1	15 26.1	14 49.1	36.9
	23.3	23,2	23.1	23.0	22.9	22.8	22.8	22.7	22.6	
40	20 7.8	19 30.9	18 53.9	18 16.9	17 39.9	17 2.9	16 25.9	15 48.8	15 11.7	37.0
	22.9	22.8	22.8	22.7	22.7	22.6	22.4	22.4	22.4	
41	20 30 7	19 53.7	19 16.7	18 39.6	18 2.6	17 25.5	16 48.3	16 11.2	15 34.1	37.1
	22.7	22.6	22.5	22.4	22.3	22.2	22.2	22.1	22.0	
42	20 53.4	20 16.3	19 39.2	19 2.0	18 24.9	17 47.7	17 10.5	16 33.3	15 56.1	37.2
	22.4	22.3	22.2	22.1	22.0	22.0	21.9	21.8	21.7	
43	21 15.8	20 38.6	20 1.4	19 24.1	18 46.9	18 9.7	17 32.4	16 55.1	16 17.8	37.3
	22.0	21.9	21.9	21.9	21.7	21.6	21.6	21.5	21.4	
44	21 37.8	21 0.5	20 23.3	19 46.0	19 8.6	18 31.3	17 54.0	17 16.6	16 39.2	37.3
	21.7	21.7	21.5	21.5	21.5	21.3	21.2	21.2	21.1	
45	21 59.5	21 22.2	20 44.8	20 7.5	19 30.1	18 52.6	18 15.2	17 37.8	17 0 3	37.4

VIII.

(Fortsetzung.)

$\lambda - \Omega$	$\beta = -2^0 40'$	$\beta = -2^0 0'$	$\beta = -1^0 20'$	$\beta = -0^0 40'$	$\beta = 0$	$\beta = +0^0 40'$	$\beta = +1^0 20'$	$\beta = +2^0 0$	$\beta = +2^0 40$	Δ
45°	+21°59.5	+21°22.2	+20°44.8	+20° 7.5	+19°30.1	+18°52.6	+18°15.2	+17°37.8	+17° 0.3	−37.4
	21.4	21.3	21.3	21.1	21.0	21.0	20.9	20.8	20.7	
46	22 20.9	21 43 5	21 6.1	20 28.6	19 51.1	19 13.6	18 36.1	17 58.6	17 21.0	37.5
	21.1	21.0	20.9	20.9	20.8	20.7	20.6	20.6	20.5	
47	22 42.0	22 4.5	21 27.0	20 49.5	20 11.9	19 34.3	18 56.7	18 19.2	17 41.5	37.5
	20.8	20.7	20.6	20.5	20.4	20.3	20.3	20.1	20.0	
48	23 2.8	22 25.2	21 47.6	21 10.0	20 32.3	19 54.6	19 17.0	18 39.3	18 1.5	37.6
	20.4	20.3	20.2	20.1	20.1	20.0	19.9	19.8	19.8	
49	23 23.2	22 45.5	22 7.8	21 30.1	20 52.4	20 14.6	19 36.9	18 59.1	18 21.3	37.7
	20.0	20.0	19.9	19.8	19.7	19.7	19.5	19.4	19.4	
50	23 43.2	23 5.5	22 27.7	21 49.9	20 12.1	21 34.3	19 56.4	19 18.5	18 40.7	37.8
	19.7	19.6	19.5	19.4	19.3	19.2	19.2	19.1	19.0	
51	24 2.9	23 25.1	22 47.2	22 9.3	21 31.4	20 53.5	20 15.6	19 37.6	18 59.7	37.9
	19.3	19.2	19.1	19.1	19.0	18.9	18 8	18.8	18.6	
52	24 22.2	23 44.3	23 6.3	22 28.4	21 50.4	21 12.4	20 34.4	19 56.4	19 18.3	38.0
	19.0	18.8	18.8	18.7	18.6	18.5	18.4	18.3	18.3	
53	24 41.2	24 3.1	23 25.1	22 47.1	22 9.0	21 30.9	20 52.8	20 14.7	19 36.6	38.1
	18.5	18.5	18.4	18.3	18.2	18.2	18.1	18.0	17.9	
54	24 59.7	24 21.6	23 43.5	23 5.4	22 27.2	21 49.1	21 10.9	20 32.7	19 54.5	38.2
	18.1	18.1	18.0	17.9	17.8	17.7	17.6	17.6	17.5	
55	25 17.8	24 39.7	24 1.5	23 23.3	22 45.0	22 6.8	21 28.5	20 50.3	20 12.0	38.2
	17.8	17.6	17.6	17.5	17.4	17.3	17.4	17.1	17.1	
56	25 35.6	24 57.3	24 19.1	23 40.8	23 2.4	22 24.1	21 45.9	21 7.4	20 29.1	38.3
	17.3	17.3	17.1	17.0	17.1	16.9	16.7	16.8	16.6	
57	25 52.9	25 14.6	24 36.2	23 57.8	23 19.5	22 41.0	22 2.6	21 24.2	20 45.7	38.4
	16.9	16.8	16.8	16.7	16.5	16.6	16.5	16.3	16.3	
58	26 9.8	25 31.4	24 53.0	24 14.5	23 36.0	22 57.6	22 19.1	21 40.5	21 2.0	38.5
	16.5	16.4	16.3	16.3	16 2	16.0	16.0	16.0	15.9	
59	26 26.3	25 47.8	25 9.3	24 30.8	23 52.2	23 13.6	22 35.1	21 56.5	21 17.9	38.6
	16.1	16.0	15.9	15.8	15.8	15.7	15.6	15.5	15.4	
60	26 42.4	26 3.8	25 25.2	24 46.6	24 8.0	23 29.3	22 50.7	22 12.0	21 33.3	38.6
	15.6	15.5	15.5	15.4	15.3	15.2	15.1	15.0	15.0	
61	26 58.0	26 19.3	25 40.7	25 2.0	24 23.3	23 44.5	23 5.8	22 27.0	21 48.3	38.7
	15.2	15.1	15.0	14.9	14.8	14.8	14.7	14.7	14.5	
62	27 13.2	26 34.4	25 55.7	25 16.9	24 38.1	23 59.3	23 20.5	22 41.7	22 2 8	38.8
	14.7	14.7	14.5	14.5	14.4	14.3	14.2	14.2	14.1	
63	27 27.9	26 49.1	26 10.2	25 31.4	24 52.5	24 13.6	23 34.7	22 55.9	22 16.9	38.9
	14.2	14.1	14.1	14.0	13.9	13.9	13.8	13.7	13.7	
64	27 42.1	27 3 2	26 24.3	25 45.4	25 6.4	24 27.5	23 48.5	23 9.6	22 30.6	38.9
	13.8	13.7	13.6	13.5	13.5	13.4	13.4	13.2	13.2	
65	27 55.9	27 16.9	26 37.9	25 58.9	25 19.9	24 40.9	24 1.9	23 22.8	22 43.8	39.0
	13.3	13.2	13.2	13.1	13.0	12.9	12.8	12.8	12.7	
66	28 9.2	27 30.1	26 51.1	26 12.0	25 32.9	24 53.8	24 14.7	23 35.6	22 56.5	39.1
	12 8	12.8	12.7	12.6	12.6	12.5	12.4	12.4	12.3	
67	28 22.0	27 42.9	27 3.8	26 24.6	25 45.5	25 6.3	24 27.1	23 48.0	23 8.8	39.2
	12 3	12.2	12.1	12.2	12 0	12.0	12.0	11.8	11.8	
68	28 34.3	27 55.1	27 15.9	26 36.8	25 57.5	25 18.3	24 39.1	23 59.8	23 20.6	39.2
	11.8	11.8	11.7	11.6	11.6	11.5	11.4	11.4	11.3	
69	28 46.1	28 6.9	27 27.6	26 48.4	26 9.1	25 29.8	24 50.5	24 11.2	23 31.9	39.3
	11.3	11.2	11.2	11.1	11.0	11.0	10.9	10.9	10.8	
70	28 57.4	28 18.1	27 38.8	26 59.5	26 20.1	25 40 8	25 1.4	24 22.1	23 42 7	39.3
	10.8	10.8	10.7	10.6	10.6	10.5	10.5	10.3	10.3	
71	29 8.2	28 28.9	27 49.5	27 10.1	26 30.7	25 51.3	25 11.9	24 32.4	23 53.0	39.4
	10.3	10.2	10.1	10.1	10.0	10.0	9.9	9.9	9.8	
72	29 18.5	28 39.1	27 59.6	27 20.2	26 40.7	26 1.3	25 21.8	24 42.3	24 2.8	39.5
	9.8	9.7	9.6	9.6	9.6	9.5	9.4	9.4	9.4	
73	29 28.3	28 48.8	28 9.2	27 29.8	26 50.3	26 10.8	25 31.2	24 51.7	24 12.2	39.5
	9.2	9.2	9.2	9.1	9.0	8.9	8.9	8.9	8.8	
74	29 37.5	28 58.0	28 18.4	27 38.9	26 59.3	26 19.7	25 40.1	25 0.6	24 21.0	39.6
	8.8	8.6	8.6	8.5	8.5	8.5	8.4	8 3	8.3	
75	29 46.3	29 6.6	28 27.0	27 47.4	27 7 8	26 28.2	25 48.5	25 8.9	24 29.3	39.6
	8.1	8.2	8.1	8.0	8.0	7.9	7.9	7.9	7.8	
76	29 54.4	29 14.8	28 35.1	27 55.4	27 15.8	26 36.1	25 56.4	25 16.8	24 37.1	39.7
	7.6	7.6	7.5	7.5	7.4	7.4	7.4	7.3	7.2	
77	30 2.0	29 22.4	28 42.6	28 2.9	27 23.2	26 43.5	26 3.8	25 24.1	24 44.3	39.7
	7.1	7.0	7.0	7.0	6.9	6.9	6.8	6.7	6.8	
78	30 9.1	29 29.4	28 49.6	28 9.9	27 30.1	26 50.4	26 10.6	25 30.8	24 51.1	39 8
	6.5	6.5	6.5	6.4	6.4	6.3	6.3	6.3	6.2	
79	30 15.6	29 35.9	28 56.1	28 16.3	27 36.5	26 56.7	26 16.9	25 37.1	24 57.3	39.8
	6.0	5.9	5.9	5.8	5.8	5.8	5.8	5.7	5.7	
80	30 21.6	29 41.8	29 2.0	28 22.1	27 42.3	27 2.5	26 22.7	25 42.8	25 3.0	39.8
	5.4	5.4	5.3	5.4	5.3	5.2	5.2	5.2	5.2	
81	30 27.0	29 47.2	29 7.3	28 27.5	27 47.6	27 7.7	26 27.9	25 48.0	25 8.2	39.9
	4.9	4.8	4.8	4.7	4.7	4.8	4.7	4.7	4.6	
82	30 31.9	29 52.0	29 12.1	28 32.2	27 52.3	27 12.5	26 32.6	25 52.7	25 12.8	39.9
	4 3	4.3	4.3	4 2	4.2	4.1	4.1	4.1	4.1	
83	30 36.2	29 56.3	29 16.4	28 36.4	27 56.5	27 16.6	26 36.7	25 56.8	25 16.9	39 9
	3.7	3.7	3.6	3.7	3.6	3.6	3.6	3 5	3.5	
84	30 39.9	30 0.0	29 20.0	28 40.1	28 0.1	27 20.2	26 40.3	26 0.3	25 20.4	39.9
	3.2	3.1	3.1	3.2	3.1	3.1	3.0	3.1	3.0	
85	30 43.1	30 3.1	29 23.1	28 43.2	28 3.2	27 23.3	26 43.3	26 3.4	25 23.4	40.0
	2.6	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	
86	30 45.7	30 5.7	29 25.7	28 45.7	28 5.7	27 25.8	26 45.8	26 5.9	25 25.9	40.0
	1.9	2.0	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.9	
87	30 47.6	30 7.7	29 27.7	28 47.7	28 7.7	27 27.7	26 47.7	26 7.8	25 27.8	40 0
	1.4	1.4	1.4	1.4	1 4	1.4	1.4	1.3	1.3	
88	30 49.0	30 9.1	29 29.1	28 49.1	28 9.1	27 29.1	26 49.1	26 9.1	25 29.1	40.0
	0.9	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9	
89	30 49.9	30 9.9	29 29.9	28 49.9	28 9.9	27 29.9	26 49.9	26 9.9	25 30.0	40.0
	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	
90	+30 50.2	+30 10.2	+29 30.2	+28 50.2	+28 10.2	27 30.2	26 50.2	26 10.2	25 30.2	40.0

IX

giebt für Saturn $l - 180^0 - (\lambda - \Omega)$ mit den Argumenten $(\lambda - \Omega)$ und β.

$\lambda-\Omega$	$\beta=-2^0 40'$	$\beta=-2^0 0'$	$\beta=-1^0 20'$	$\beta=-0^0 40'$	$\beta=0^0$	$\beta+0^0 40'$	$\beta=+1^0 20'$	$\beta=+2^0 0'$	$\beta=+2^0 40'$
0^0	$-1^0 15.6$	$-0^0 56.7$	$-0^0 37.8$	$-0^0 18.9$	$-0^0\ 0.0$	$+0^0 18.9$	$+0^0 37.8$	$+0^0 56.7$	$+1^0 15.6$
1	−1 22.7 7.1	−1 3.8 7.1	−0 44.9 7.1	−0 26.0 7.1	−0 7.1 7.1	+0 11.8 7.1	+0 30.7 7.1	+0 49.6 7.1	+1 8.5 7.1
2	−1 29.8 7.1	−1 10.8 7.0	−0 52.0 7.1	−0 33.1 7.1	−0 14.2 7.1	+0 4.6 7.2	+0 23.5 7.2	+0 42.4 7.1	+1 1.3 7.2
3	−1 36.9 7.0	−1 17.9 7.1	−0 59.1 7.0	−0 40.2 7.0	−0 21.3 7.1	−0 2.4 7.1	+0 16.4 7.0	+0 35.3 7.1	+0 54.2 7.1
4	−1 43.9 7.0	−1 25.0 7.0	−1 6.1 7.0	−0 47.2 7.0	−0 28.4 7.0	−0 9.5 7.1	+0 9.4 7.0	+0 28.2 7.1	+0 47.0 7.2
5	−1 50.9 7.0	−1 32.0 7.0	−1 13.1 7.0	−0 54.2 7.0	−0 35.4 7.0	−0 16.6 7.0	+0 2.3 7.1	+0 21.1 7.1	+0 39.9 7.1
6	−1 57.9 6.9	−1 39.0 6.9	−1 20.1 7.0	−1 1.2 7.0	−0 42.4 6.9	−0 23.6 7.0	−0 4.8 7.0	+0 14.0 7.0	+0 32.8 7.1
7	−2 4.8 6.8	−1 45.9 6.9	−1 27.0 6.9	−1 8.2 6.9	−0 49.3 7.0	−0 30.6 6.9	−0 11.8 6.9	+0 7.0 7.0	+0 25.7 7.1
8	−2 11.6 6.8	−1 52.7 6.8	−1 33.9 6.9	−1 15.1 6.9	−0 56.3 6.8	−0 37.5 6.9	−0 18.7 6.9	+0 0.0 7.0	+0 18.6 6.9
9	−2 18.4	−1 59.5 6.8	−1 40.7 6.8	−1 22.0 6.9	−1 3.1 6.8	−0 44.4 6.9	−0 25.6 6.9	−0 7.0 7.0	+0 11.7 6.9
	6.7	6.7	6.7	6.7	6.8	6.8	6.9	6.9	6.9
10	−2 25.1	−2 6.2	−1 47.4 6.6	−1 28.7 6.6	−1 9.9 6.7	−0 51.2 6.7	−0 32.5 6.8	−0 13.9 6.8	+0 4.8 6.9
11	−2 31.7 6.6	−2 12.8 6.6	−1 54.0 6.6	−1 35.3 6.6	−1 16.6 6.6	−0 57.9 6.7	−0 39.3 6.7	−0 20.7 6.7	−0 2.1 6.8
12	−2 38.2 6.5	−2 19.4 6.6	−2 0.6 6.6	−1 41.9 6.5	−1 23.2 6.7	−1 4.6 6.6	−0 46.0 6.6	−0 27.4 6.7	−0 8.9 6.7
13	−2 44.6 6.4	−2 25.8 6.4	−2 7.1 6.5	−1 48.4 6.5	−1 29.9 6.7	−1 11.2 6.6	−0 52.6 6.6	−0 34.1 6.7	−0 15.6 6.7
14	−2 50.9 6.3	−2 32.1 6.3	−2 13.5 6.4	−1 54.8 6.4	−1 36.3 6.4	−1 17.7 6.5	−0 59.2 6.6	−0 40.7 6.6	−0 22.3 6.7
15	−2 57.1 6.2	−2 38.4 6.3	−2 19.7 6.2	−2 1.1 6.3	−1 42.6 6.3	−1 24.1 6.4	−1 5.6 6.4	−0 47.2 6.5	−0 28.9 6.6
16	−3 3.2 6.1	−2 44.5 6.1	−2 25.9 6.2	−2 7.3 6.2	−1 48.8 6.2	−1 30.4 6.3	−1 12.0 6.3	−0 53.7 6.5	−0 35.3 6.4
17	−3 9.1 5.9	−2 50.5 6.0	−2 31.9 6.0	−2 13.4 6.1	−1 55.0 6.2	−1 36.6 6.2	−1 18.3 6.3	−1 0.0 6.3	−0 41.7 6.4
18	−3 14.9 5.8	−2 56.3 5.8	−2 37.8 5.9	−2 19.4 6.0	−2 1.0 6.0	−1 42.7 6.1	−1 24.4 6.1	−1 6.2 6.2	−0 48.0 6.3
19	−3 20.6 5.7	−3 2.0 5.7	−2 43.6 5.8	−2 25.2 5.8	−2 6.9 5.9	−1 48.6 5.9	−1 30.4 6.0	−1 12.3 6.1	−0 54.2 6.2
	5.5	5.6	5.6	5.7	5.8	5.9	5.9	6.0	6.0
20	−3 26.1	−3 7.6	−2 49.2	−2 30.9	−2 12.7	−1 54.5	−1 36.3	−1 18.3	−1 0.2
21	−3 31.4 5.3	−3 13.0 5.4	−2 54.7 5.5	−2 36.5 5.6	−2 18.3 5.6	−2 0.2 5.7	−1 42.1 5.8	−1 24.1 5.8	−1 6.1 5.9
22	−3 36.6 5.2	−3 18.3 5.3	−3 0.0 5.3	−2 41.9 5.4	−2 23.7 5.4	−2 5.7 5.5	−1 47.8 5.7	−1 29.8 5.7	−1 11.9 5.8
23	−3 41.7 5.1	−3 23.4 5.1	−3 5.2 5.2	−2 47.1 5.2	−2 29.1 5.4	−2 11.1 5.4	−1 53.2 5.4	−1 35.4 5.6	−1 17.6 5.7
24	−3 46.6 4.9	−3 28.3 4.9	−3 10.2 5.0	−2 52.2 5.1	−2 34.2 5.1	−2 16.1 5.3	−1 58.5 5.3	−1 40.8 5.4	−1 23.1 5.5
25	−3 51.2 4.6	−3 33.1 4.8	−3 15.1 4.9	−2 57.1 4.9	−2 39.2 5.0	−2 21.4 5.0	−2 3.7 5.2	−1 46.1 5.3	−1 28.5 5.4
26	−3 55.7 4.5	−3 37.7 4.6	−3 19.7 4.6	−3 1.8 4.7	−2 44.1 4.9	−2 26.4 5.0	−2 8.7 5.0	−1 51.2 5.1	−1 33.7 5 2
27	−4 0.0 4.3	−3 42.0 4.3	−3 24.2 4.5	−3 6.4 4.6	−2 48.7 4.6	−2 31.1 4.7	−2 13.6 4.9	−1 56.1 4.9	−1 38.7 5.0
28	−4 4.1 4.1	−3 46.2 4.2	−3 28.4 4.2	−3 10.8 4.4	−2 53.2 4.5	−2 35.7 4.6	−2 18.3 4.7	−2 0.9 4.8	−1 43.6 4.9
29	−4 8.0 3.9	−3 50.2 4.0	−3 32.5 4.1	−3 14.9 4.1	−2 57.5 4.3	−2 40.1 4.4	−2 22.7 4.4	−2 5.5 4.6	−1 48.3 4.7
	3.6	3.8	3.9	4.0	4.0	4.2	4.4	4.4	4.6
30	−4 11.6	−3 54.0	−3 36.4	−3 18.9	−3 1.5	−2 44.3	−2 27.1	−2 9.9	−1 52.9
31	−4 15.1 3.5	−3 57.5 3.5	−3 40.1 3.7	−3 22.7 3.8	−3 5.4 3.9	−2 48.3 4.0	−2 31.2 4.1	−2 14.2 4.3	−1 57.3 4.4
32	−4 18.3 3.2	−4 0.8 3.3	−3 43.5 3.4	−3 26.2 3.5	−3 9.1 3.7	−2 52.1 3.8	−2 35.1 3.9	−2 18.2 4.0	−2 1.4 4.1
33	−4 21.3 3.0	−4 3.9 3.1	−3 46.7 3.2	−3 29.6 3.4	−3 12.6 3.5	−2 55.7 3.6	−2 38.8 3.7	−2 22.1 3.9	−2 5.4 4.0
34	−4 24.0 2.7	−4 6.8 2.9	−3 49.7 3.0	−3 32.7 3.1	−3 15.8 3.2	−2 59.1 3.4	−2 42.4 3.6	−2 25.7 3.6	−2 9.2 3.8
35	−4 26.5 2.5	−4 9.4 2.6	−3 52.5 2.8	−3 35.6 2.9	−3 18.9 3.1	−3 2.2 3.1	−2 45.7 3.3	−2 29.2 3.5	−2 12.8 3.6
36	−4 28.8 2.3	−4 11.8 2.4	−3 55.0 2.5	−3 38.3 2.7	−3 21.7 2.8	−3 5.2 3.0	−2 48.8 3.1	−2 32.4 3.2	−2 16.2 3.4
37	−4 30.8 2.0	−4 14.0 2.2	−3 57.3 2.3	−3 40.7 2.4	−3 24.3 2.6	−3 7.9 2.7	−2 51.6 2.8	−2 35.5 3.1	−2 19.4 3.2
38	−4 32.5 1.7	−4 15.9 1.9	−3 59.3 2.0	−3 42.9 2.2	−3 26.6 2.3	−3 10.4 2.5	−2 54 3 2.7	−2 38.3 2.8	−2 22.4 3.0
39	−4 34.0 1.5	−4 17.5 1.6	−4 1.1 1.8	−3 44.9 2.0	−3 28.7 2.1	−3 12.7 2.3	−2 56.7 2.4	−2 40.9 2.6	−2 25.1 2.7
	1.2	1.4	1.6	1.7	1.9	2.0	2.2	2.3	2.6
40	−4 35.2	−4 18.9	−4 2.7	−3 46.6	−3 30.6	−3 14.7	−2 58.9	−2 43.2	−2 27.7
41	−4 36.2 1.0	−4 20.0 1.1	−4 4.0 1.3	−3 48.0 1.4	−3 32.2 1.6	−3 16.5 1.8	−3 1.0 2.1	−2 45.4 2.2	−2 30.0 2.3
42	−4 36.9 0.7	−4 20.8 0.8	−4 5.0 1.0	−3 49.2 1.2	−3 33.6 1.4	−3 18.0 1.5	−3 2.7 1.7	−2 47.3 1.9	−2 32.0 2.0
43	−4 37.3 0.4	−4 21.4 0.6	−4 5.7 0.7	−3 50.2 1.0	−3 34.7 1.1	−3 29.3 1.3	−3 4.1 1.4	−2 48.9 1.6	−2 33.9 1.9
44	−4 37.4 0.1	−4 21.7 0.3	−4 6.2 0.5	−3 50.8 0.6	−3 35.5 0.8	−3 20.4 1.1	−3 5.3 1.2	−2 50.4 1.5	−2 35.5 1.6
45	−4 37.5 0.1	−4 21.8	−4 6.4 0.2	−3 51.2 0.4	−3 36.1 0.6	−3 21.2 0.8	−3 6.3 1.0	−2 51.6 1.2	−2 36.8 1.3

IX.

(Fortsetzung.)

$\lambda - \Omega$	$\beta = -2^0 40'$	$\beta = -2^0 0'$	$\beta = -1^0 20'$	$\beta = -0^0 40'$	$\beta = 0^0$	$\beta = +0^0 40'$	$\beta = +1^0 20$	$\beta = +2^0 0'$	$\beta = +2^0 40'$
45°	−4° 37.5	−4° 21.8	−4° 6.4	−3° 51.2	−3° 36.1	−3 21.2	−3° 6.3	−2° 51.6	−2° 36.8
	1.9	1.7	1.5	1.2	1.0	0.5	0.6	0.3	0.1
46	−4 36.8	−4 21.5	−4 6.4	−3 51.4	−3 36.5	−3 21.8	−3 7.1	−2 52.5	−2 38.1
	0.7	0.5	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.3
47	−4 36.0	−4 21.0	−4 5.0	−3 51.3	−3 36.6	−3 22.0	−3 7.6	−2 53.1	−2 39.0
	0.8	0.8	0.2	0.1	0.1	0.2	0.5	0.6	0.9
48	−4 35.0	−4 20.2	−4 5.5	−3 50.9	−3 36.4	−3 22.0	−3 7.8	−2 53.6	−2 39.6
	1.0	0.8	0.5	0.4	0.2	0.0	0.2	0.5	0.6
49	−4 33.7	−4 19.1	−4 4.6	−3 50.2	−3 35.9	−3 21.8	−3 7.8	−2 53.9	−2 40.1
	1.3	1.1	0.9	0.7	0.5	0.2	0.0	0.3	0.5
50	−4 32.1	−4 17.7	−4 3.4	−3 49.2	−3 35.2	−3 21.3	−3 7.5	−2 53.8	−2 40.3
	1.6	1.4	1.2	1.0	0.7	0.5	0.3	0.1	0.2
51	−4 30.2	−4 16.0	−4 1.9	−3 48.0	−3 34.2	−3 20.6	−3 6.9	−2 53.5	−2 40.2
	2.2	2.0	1.7	1.5	1.2	1.0	0.8	0.5	0.3
52	−4 28.0	−4 14.0	−4 0.2	−3 46.5	−3 33.0	−3 19.6	−3 6.1	−2 53.0	−2 39.9
	2.5	2.2	2.0	1.7	1.5	1.3	1.0	0.8	0.5
53	−4 25.5	−4 11.8	−3 58.2	−3 44.8	−3 31.5	−3 18.3	−3 5.1	−2 52.2	−2 39.4
	2.9	2.6	2.3	2.1	1.8	1.6	1.2	1.0	0.8
54	−4 22.6	−4 9.2	−3 55.9	−3 42.7	−3 29.7	−3 16.7	−3 3.9	−2 51.2	−2 38.6
	3.1	2.8	2.6	2.3	2.1	1.8	1.5	1.3	1.1
55	−4 19.5	−4 6.4	−3 53.3	−3 40.4	−3 27.6	−3 14.9	−3 2.4	−2 49.9	−2 37.5
	3.4	3.2	2.8	2.6	2.3	2.0	1.8	1.5	1.2
56	−4 16.1	−4 3.2	−3 50.5	−3 37.8	−3 25.3	−3 12.9	−3 0.6	−2 48.4	−2 36.3
	3.6	3.4	3.2	2.9	2.6	2.4	2.1	1.8	1.5
57	−4 12.5	−3 59.8	−3 47.3	−3 34.9	−3 22.7	−3 10.5	−2 58.5	−2 46.6	−2 34.8
	4.0	3.7	3.4	3.1	2.9	2.5	2.3	2.0	1.8
58	−4 8.5	−3 56.1	−3 43.9	−3 31.8	−3 19.8	−3 8.0	−2 56.2	−2 44.6	−2 33.0
	4.3	4.0	3.7	3.4	3.1	2.9	2.5	2.3	1.9
59	−4 4.2	−3 52.1	−3 40.2	−3 28.4	−3 16.7	−3 5.1	−2 53.7	−2 42.3	−2 31.1
	4.6	4.2	4.0	3.7	3.4	3.1	2.8	2.5	2.2
60	−3 59.6	−3 47.9	−3 36.2	−3 24.7	−3 13.3	−3 2.0	−2 50.9	−2 39.8	−2 28.9
	4.8	4.6	4.2	3.9	3.6	3.3	3.1	2.7	2.5
61	−3 54.8	−3 43.3	−3 32.0	−3 20.8	−3 9.7	−2 58.7	−2 47.8	−2 37.1	−2 26.4
	5.2	4.8	4.5	4.2	3.9	3.6	3.3	3.0	2.7
62	−3 49 6	−3 38.5	−3 27.5	−3 16.6	−3 5.8	−2 55.1	−2 44.5	−2 34.1	−2 23.7
	5.4	5.1	4.8	4.5	4.1	3.8	3.5	3.2	2.9
63	−3 44.2	−3 33.4	−3 22.7	−3 12.1	−3 1.7	−2 51.3	−2 41.0	−2 30.9	−2 20.8
	5.7	5.3	5.0	4.7	4.4	4.1	3.7	3.5	3.1
64	−3 38.5	−3 28.1	−3 17.7	−3 7.4	−2 57.3	−2 47.2	−2 37.3	−2 27.4	−2 17.7
	5.9	5.7	5.3	4.9	4.7	4.3	4.0	3.6	3.3
65	−3 32.6	−3 22.4	−3 12.4	−3 2.5	−2 52.6	−2 42.9	−2 33.3	−2 23.8	−2 14.4
	6.2	5.8	5.5	5.2	4.8	4.5	4.2	3.9	3.6
66	−3 26.4	−3 16.6	−3 6.9	−2 57.3	−2 47.8	−2 38.4	−2 29 1	−2 19.9	−2 10.8
	6.4	6.2	5.8	5.5	5.1	4.8	4.4	4.1	3.7
67	−3 20.0	−3 10.4	−3 1.1	−2 51.8	−2 42.7	−2 33.6	−2 24.7	−2 15.8	−2 7.1
	6.8	6.3	6.0	5.7	5.3	4.9	4.6	4.3	4.0
68	−3 13.2	−3 4.1	−2 55.1	−2 46.1	−2 37.4	−2 28.7	−2 20.1	−2 11.5	−2 3.1
	7.0	6.6	6.1	5.8	5.6	5.2	4.9	4.5	4.2
69	−3 6.2	−2 57.5	−2 49.0	−2 40.3	−2 31.8	−2 23.5	−2 15.2	−2 7.0	−1 58.9
	7.2	6.9	6.5	6.1	5.7	5.4	5.0	4.6	4.3
70	−2 59 0	−2 50.6	−2 42.5	−2 34.2	−2 26.1	−2 18.1	−2 10.2	−2 2.4	−1 54.6
	7.4	7.0	6.8	6.3	6.0	5.6	5.3	4.9	4.5
71	−2 51.6	−2 43.6	−2 35.7	−2 27.9	−2 20.1	−2 12.5	−2 4.9	−1 57.5	−1 50.1
	7.6	7.3	6.9	6.6	6.1	5.8	5 4	5.1	4.7
72	−2 44.0	−2 36.3	−2 28.8	−2 21.3	−2 14.0	−2 6.7	−1 59.5	−1 52.4	−1 45.4
	7.9	7.5	7.1	6.7	6.4	6.0	5.6	5.2	4.9
73	−2 36.1	−2 28.8	−2 21.7	−2 14.6	−2 7.6	−2 0.7	−1 53.9	−1 47.2	−1 40.5
	8.1	7.7	7.3	6.9	6.5	6.1	5.7	5.4	5.0
74	−2 28.0	−2 21.1	−2 14.4	−2 7.7	−2 1.1	−1 54.6	−1 48.2	−1 41.8	−1 35.5
	8.3	7.8	7.5	7.1	6.7	6.3	6.0	5.6	5.2
75	−2 19.7	−2 13.3	−2 6.9	−2 0.6	−1 54.4	−1 48.3	−1 42.2	−1 36.2	−1 30.3
	8.4	8.1	7.6	7.2	6.8	6.5	6.1	5.7	5.4
76	−2 11.3	−2 5.2	−2 59.3	−1 53.4	−1 47.6	−1 41.8	−1 36.1	−1 30.5	−1 24.9
	8.7	8.2	7.9	7.4	7.1	6.6	6.2	5.8	5.4
77	−2 2,6	−1 57.0	−1 51.4	−1 46.0	−1 40.5	−1 35.2	−1 29.9	−1 24.7	−1 19.5
	8.7	8.4	7.9	7.6	7.1	6.8	6.4	6.0	5.6
78	−1 53.9	−1 48.6	−1 43.5	−1 38.4	−1 33.4	−1 28.4	−1 23.5	−1 18.7	−1 13.9
	9.0	8.5	8.1	7.7	7.3	6.9	6.5	6.1	5.7
79	−1 44.9	−1 40.1	−1 35.4	−1 30.7	−1 26.1	−1 21.5	−1 17.0	−1 12.6	−1 8.2
	9.1	8.6	8.3	7.8	7.4	7.0	6.6	6.3	5.9
80	−1 35.8	−1 31.5	−1 27.1	−1 22.9	−1 18.7	−1 14.5	−1 10.4	−1 6.3	−1 2.3
	9.2	8.8	8.3	8.0	7.6	7.1	6.7	6.3	5.9
81	−1 26.6	−1 22.7	−1 18.8	−1 14.9	−1 11.1	−1 7.4	−1 3.7	−1 0.0	−0 56.4
	9.3	8.8	8.5	8.0	7.6	7.2	6.8	6.4	6.0
82	−1 17 3	−1 13.9	−1 10.3	−1 6.9	−1 3.5	−1 0.2	−0 56.9	−0 53.6	−0 50.4
	9.4	9.1	8.6	8.2	7.7	7.4	7.0	6.5	6.2
83	−1 7.9	−1 4.8	−1 1.7	−0 58.7	−0 55.8	−0 52.8	−0 49.9	−0 47.1	−0 44.2
	9.6	9.1	8.6	8.2	7.8	7.4	6.9	6.6	6.2
84	−0 58.3	−0 55.7	−0 53.1	−0 50.5	−0 48.0	−0 45.4	−0 43.0	−0 40.5	−0 38.0
	9.6	9.1	8.7	8.3	7.9	7.4	7.1	6.7	6.2
85	−0 48.7	−0 46.6	−0 44.4	−0 42.2	−0 40.1	−0 38.0	−0 35.9	−0 33.8	−0 31.8
	9.6	9.3	8.8	8.4	8.0	7.6	7.1	6.7	6.3
86	−0 39.1	−0 37.3	−0 35.6	−0 33.8	−0 32.1	−0 30.4	−0 28.8	−0 27.1	−0 25.5
	9.7	9.3	8.9	8.4	8.0	7.5	7.2	6.7	6.3
87	−0 29.4	−0 28.0	−0 26.7	−0 25.4	−0 24.1	−0 22.9	−0 21.6	−0 20.4	−0 19.2
	9.8	9.3	8.9	8.4	8.0	7.5	7.2	6.8	6.4
88	−0 19.6	−0 18.7	−0 17.8	−0 17.0	−0 16.1	−0 15.4	−0 14.4	−0 13.6	−0 12.8
	9.8	9.3	8.9	8.5	8.0	7.7	7.2	6.8	6.4
89	−0 9.8	−0 9.4	−0 8.9	−0 8.5	−0 8.1	−0 7.7	−0 7.2	−0 6.8	−0 6.4
	9.8	9.4	8.9	8.5	8.0	7.7	7.2	6.8	6.4
90	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0

X.

Jupiter.

$$l = 180^0 + (\lambda - \Omega) + X$$

X

$(\lambda-\Omega)$	$\beta=-1^0 40'$	$-1^0 0'$	$-0^0 20'$	$+0^0 20'$	$+1^0 0'$	$+1^0 40'$	für $\frac{\Delta\beta=40'}{\Delta}$
0^0	$-0^0 3.'8$	$-0^0 2.'2$	$-0^0 0.'8$	$+0^0 0.'8$	$+0^0 2.'2$	$+0^0 3.'8$	1.5
5	4.0	2.4	0.9	0.6	2.0	3.5	1.5
10	4.1	2.6	1.1	0.3	1.8	3.3	1.5
15	4.3	2.8	1.3	+0.1	1.6	3.0	1.5
20	4.3	2.9	1.5	−0.1	1.3	2.8	1.4
25	4.3	3.0	1.6	0.2	1.1	2.5	1.4
30	4.3	3.0	1.7	0.4	0.9	2.2	1.3
35	4.2	3.0	1.8	0.5	0.7	1.9	1.2
40	4.1	2.9	1.8	0.6	0.5	1.7	1.2
45	4.0	2.8	1.8	0.7	0.4	1.5	1.1
50	3.6	2.6	1.7	0.7	0.3	1.2	1.0
55	3.3	2.4	1.6	0.7	0.2	1.0	0.9
60	2.9	2.2	1.4	0.7	0.1	0.8	0.7
65	2.5	1.9	1.2	0.6	0.0	0.7	0.6
70	2.1	1.6	1.0	0.5	0.0	0.5	0.5
75	1.6	1.2	0.8	0.4	0.0	0.4	0.4
80	1.1	0.8	0.5	0.3	0.0	0.2	0.3
85	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.1	0.1
90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

XI.

$$A = -\beta + A_0$$

A_0

$\lambda-\Omega$	A_0	$\lambda-\Omega$	A_0	$\lambda-\Omega$	A_0	$\lambda-\Omega$	A_0	$\lambda-\Omega$	A_0
0^0	$+.0^0 0.'0$	20^0	$+.0^0 44.'1$	40^0	$+1^0 22.'9$	60^0	$+1^0 51.'7$	80^0	$+2^0 7.'0$
1	2.3	21	46.2	41	24.6	61	52.8	81	7.4
2	4.5	22	48.3	42	26.3	62	53.9	82	7.8
3	6.8	23	50.4	43	28.0	63	54.9	83	8.0
4	9.0	24	52.5	44	29.6	64	55.9	84	8.3
5	11.3	25	54.5	45	31.2	65	56.9	85	8.5
6	13.5	26	56.5	46	32.8	66	57.8	86	8.7
7	15.7	27	58.6	47	34.3	67	58.7	87	8.8
8	18.0	28	+1 0.6	48	35.9	68	59.6	88	8.9
9	20.2	29	2.5	49	37.4	69	+2 0.4	89	9.0
10	22.4	30	4.5	50	38 8	70	1.2	90	+2 9.0
11	24.6	31	6.4	51	40.3	71	2.0		
12	26.8	32	8.4	52	41.7	72	2.7		
13	29.0	33	10.3	53	43.0	73	3.4		
14	31.2	34	12.1	54	44.4	74	4.0		
15	33.4	35	14.0	55	45.7	75	4.6		
16	35.6	36	15.8	56	46.9	76	5.2		
17	37.7	37	17.6	57	48.2	77	5.7		
18	39.9	38	19.4	58	49.4	78	6.2		
19	42.0	39	21.2	59	50.6	79	6.6		
20	044.1	40	+1 22.9	60	+1 51.7	80	+2 7.0		

XII.

Jupiter.		Saturn.	
$i = 2^{\circ}8'.81 + 0'.0065\,(t - 1850)$		$i = 28^{\circ}10'.94 - 0'.0058\,(t - 1750)$	
$\Omega = 335^{\circ}40'.54 + 0'.821\,(t - 1850)$		$\Omega = 166^{\circ}14'.43 + 0'.7744\,(t - 1750)$	
	Ω		
1840	335°32'.33	1840	167°24.13
50	40.54	50	31.87
60	48.75	60	39.61
70	56.96	70	47.36
80	336 5.16	80	55.10
90	13.37	90	168 2.85
1900	21.58	1900	10.59
10	29.79	10	18.33
20	38.00	20	26.08
30	46.20	30	33.82
40	54.41	40	41.56

2 FEB 1988
NATURAL HISTORY.

Inhalt.

Seite

Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n. Ordnung. Von *A. Voss* 243

Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunktionen. Von *A. v. Braunmühl* 325

Ueber künstlich deformirte Schädel und Gehirne von Südseeinsulanern (Neue Hebriden) von *N. Rüdinger*. Mit 3 Tafeln, enthaltend 11 Figuren . . 369

Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten insbesondere des Saturn. Von *H. Seeliger* 403

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SECHZEHNTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LVI. BAND.

MÜNCHEN 1888.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Ergebnisse

aus

Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

Carl Max von Bauernfeind.

Dritte Mitteilung

enthaltend einen Rückblick auf frühere Mitteilungen, Darstellung der Beobachtungen des Jahres 1885 und Schlussbetrachtungen über die Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung.

Mit einer Steindrucktafel.

Ergebnisse
aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

Carl Max von Bauernfeind.

A. Rückblick auf frühere Mitteilungen.

Ich befinde mich leider in der unangenehmen Lage, diese dritte und letzte Mitteilung über die von mir seit zehn Jahren sowohl im Fichtelgebirge als im Vorlande der Bayerischen Alpen angestellten Beobachtungen über die Natur und Grösse der terrestrischen Refraktion mit dem Geständnisse einleiten zu müssen, dass sich in der ersten Mitteilung aus dem Jahre 1880, welche die fichtelgebirgischen Beobachtungen auf und zwischen Döbra und Kapellenberg umfasst, und ebenso in der zweiten von 1883, welche die Ergebnisse der zwei Jahre vorher auf dem nordwestlichen Abhange der Bayerischen Alpen zwischen Schliersee und Chiemsee angestellten Refraktionsbeobachtungen darstellt, ein Fehler in der Berechnung der theoretischen Refraktionswerte forterhalten hat, der schon im zweiten Teile meiner in den Jahren 1864 und 1866 in den Astronomischen Nachrichten Nr 1478/80 und Nr 1589 erschienenen Abhandlung über die atmosphärische Strahlenbrechung gemacht wurde. Ich habe nämlich dort aus einem mir unerklärlichen Versehen die Atmosphärenhöhe h der Luftdichtigkeit ϱ umgekehrt proportional, nämlich $h = h_0 \varrho^{-1}$ gesetzt, statt für dieselbe nach der Grundgleichung (3) des ersten Teils meiner Abhandlung vom Jahre 1864 (Seite 210) $h = h_0 \varrho^{\frac{1}{2}}$ zu schreiben. Daraus folgt sofort, dass der richtige Wert von m nicht

$m_0 \varrho^{-1}$, sondern $m_0 \varrho^{\frac{1}{5}}$ und der richtige Wert von v nicht $v_0 \varrho^2$, sondern $v_0 \varrho^{\frac{4}{5}}$ ist.

Dieser Fehler fiel mir erst im Sommer des Jahres 1883 auf, als ich mein für die siebente Allgemeine Konferenz der Europäischen Gradmessung bestimmtes Referat über die terrestrische Refraktion bearbeitete, welches am 24. Oktober in Rom zum Vortrage kam. Nach Ausweis der gedruckten Verhandlungen über jene Konferenz (Generalbericht für 1883, Annex VII, Seite 5) unterliess ich es nicht, am Schlusse meiner Berichterstattung des bezeichneten Fehlers zu erwähnen und die Bemerkung beizufügen, dass derselbe in keiner Weise die von mir festgestellten Beobachtungsergebnisse, sondern nur das Verhältnis der nach meiner Theorie berechneten Refraktionswerte zu den beobachteten berühre. Vorläufig angestellte Näherungsberechnungen liessen mich auch erkennen, dass die Uebereinstimmung der verbesserten theoretischen Refraktionswerte mit den gemessenen im Allgemeinen sogar grösser werde als bisher, und auch hievon gab ich der Konferenz Nachricht.

Die Richtigstellung des Wertes von m und damit auch die des Wertes von v, welcher von m abhängt, bedingt nun folgende Aenderungen in den auf Seite 10 der ersten und Seite 23 der zweiten Mitteilung enthaltenen Refraktionsfaktoren m und v. Es wird nämlich, wenn man unter v_0 das Verhältnis $5\,x_0 : m_0$ versteht,

$$m = m_0 \left(\frac{1 + \varepsilon\tau_0}{1 + \varepsilon\tau} \cdot \frac{\beta}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{5}} = m_0 \left(\frac{\Theta_0\,\beta}{\Theta\,\beta_0}\right)^{\frac{1}{5}} = m_0\,\varrho^{\frac{1}{5}} \tag{1}$$

$$v = v_0 \left(\frac{1 + \varepsilon\tau_0}{1 + \varepsilon\tau} \cdot \frac{\beta}{\beta_0}\right)^{\frac{4}{5}} = v_0 \left(\frac{\Theta_0\,\beta}{\Theta\,\beta_0}\right)^{\frac{4}{5}} = v_0\,\varrho^{\frac{4}{5}} \tag{2}$$

und es sind hienach auch die Sätze abzuändern, welche diese Formeln in Worte fassen. Die besonderen Werte für ϱ, m, v, welche nach Seite 76 der I. Mitteilung gleichmässig für Döbra und Kapellenberg gelten, werden nunmehr folgende:

$$\varrho = [9{,}57437]\,\frac{\beta}{\Theta}; \quad \log m = [7{,}78637] + \tfrac{1}{5}\log\frac{\beta}{\Theta};$$

$$\log v = [8{,}93258] + \tfrac{4}{5}\log\frac{\beta}{\Theta} \tag{3}$$

Für das auf Seite 80 der Mitteilung I behandelte numerische Bei-

spiel, welches die am 21. August 1878, Nachmittag $2^h\ 20^m$ angestellte Beobachtung betrifft, wird

$$\log m = 7{,}86326; \quad \log v = 9{,}24014; \quad \log y = 6{,}81243_n$$
$$p = 409{,}68; \quad p_0 = -0{,}52582; \quad p_1 = 57{,}43$$

und hieraus berechnet sich nunmehr nach der Formel (17) auf Seite 12 der Mitteilung I die Refraktion zwischen Döbra und Kapellenberg für den angegebenen Zeitpunkt auf

$$r = (1 + 0{,}00130 + 0{,}00006 + 0{,}00002)\, v\varphi = 1{,}00138\, v\varphi = 270'',18$$

während sie früher mit den unrichtigen Werten von m und v gleich 241″,03 gefunden wurde. Der neue Wert ist somit um 12,1 Prozent grösser als der alte, und dieses Verhältnis stellt sich auch nahezu für die Gesamtheit aller für Döbra mit den neuen und alten Werten von m und v berechneten Refraktionswerte heraus, während die neuen gleichnamigen Werte für Kapellenberg im Durchschnitte um 10,7 Prozent grösser werden.

Für die drei Stationen Höhensteig (H), Irschenberg (I), Kampenwand (K) nehmen die auf den Seiten 23 und 24 der II. Mitteilung enthaltenen Faktoren m und v folgende Werte an. während der Wert von ϱ der in (3) angegebene bleibt. Es wird nämlich

$$\text{für H: } \log m = [7{,}79155] + \tfrac{1}{5}\log\frac{\beta}{\Theta}; \quad \log v = [8{,}92730] + \tfrac{4}{5}\log\frac{\beta}{\Theta} \quad (4)$$

$$\text{für I: } \log m = [7{,}78912] + \tfrac{1}{5}\log\frac{\beta}{\Theta}; \quad \log v = [8{,}92973] + \tfrac{4}{5}\log\frac{\beta}{\Theta} \quad (5)$$

$$\text{für K: } \log m = [7{,}78169] + \tfrac{1}{5}\log\frac{\beta}{\Theta}; \quad \log v = [8{,}93716] + \tfrac{4}{5}\log\frac{\beta}{\Theta} \quad (6)$$

Berechnet man das auf Seite 25 angeführte Beispiel (Beobachtung auf der Kampenwand am 22. August 1881 Mittags 12 Uhr) mit den verbesserten Werten von m und v, wie sie die vorstehende Gleichung (6) liefert, wenn $\beta = 633{,}9$ mm und $\Theta = 288{,}^0 2$ C gesetzt wird, so findet man, da der Mittelpunktswinkel von H K $= \varphi = 660'',79$ und $\log\varphi = 2{,}82006$ ist,

$$r = (1 + 0{,}04780 + 0{,}00153)\, v\varphi = 1{,}04933\, v\varphi = 112'',72.$$

Dieser Wert ist um 24″,05 oder um 27,1 Prozent grösser als der frühere, welcher 88″,67 betrug. Die abgekürzten Formeln für r, welche auf Seite 26 bis 28 entwickelt und nachfolgend mit den verbesserten Werten von m und v zusammengestellt sind, geben im Durchschnitte eine Vergrösserung der neu berechneten Refraktionen gegenüber den alten von 26,02 Prozent. Diese abgekürzten und verbesserten Formeln, welche an die Stelle der auf Seite 29 Mitteilung II zu treten haben, lauten aber wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\text{für KH:} \quad r = 1{,}04926 \cdot v\varphi = [0{,}02088]\, v\varphi; \quad \log \tfrac{\beta}{\Theta} = 0{,}34538 \\
&\text{„ HK:} \quad r = 0{,}95571 \cdot v\varphi = [9{,}98033]\, v\varphi \qquad = 0{,}39066 \\
&\text{„ KI:} \quad r = 1{,}03737 \cdot v\varphi = [0{,}01593]\, v\varphi \qquad = 0{,}34489 \\
&\text{„ IK:} \quad r = 0{,}96722 \cdot v\varphi = [9{,}98553]\, v\varphi \qquad = 0{,}37624 \\
&\text{„ IH:} \quad r = 1{,}01185 \cdot v\varphi = [0{,}00512]\, v\varphi \qquad = 0{,}37686 \\
&\text{„ HI:} \quad r = 0{,}98897 \cdot v\varphi = [9{,}99518]\, v\varphi \qquad = 0{,}39060 \qquad (7)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser neuen Gleichungen erhalten die auf Seite 35 und 36 der Zweiten Mitteilung zusammengestellten „berechneten Refraktionen“ folgende Werte: (8)

1) Für die Seite Höhensteig-Kampenwand (HK, KH), und zwar

in H für HK = 55″,6 für KH = 57″,5 im Mittel = 56″,6
in K für HK = 54″,0 für KH = 55″,8 im Mittel = 54″,9

demnach das Hauptmittel: berechnet = 55″,8 und beobachtet = 55″,9

2) Für die Seite Höhensteig-Irschenberg (HI, IH), und zwar

in H für IH = 48″,2 für HI = 48″,0 im Mittel = 48″,1
in I für IH = 47″,9 für HI = 47″,7 im Mittel = 47″,8

demnach das Hauptmittel: berechnet = 48″,0 und beobachtet = 56″,1

3) Für die Seite Irschenberg-Kampenwand (IK, KI), und zwar

in I für KI = 92″,0 für IK = 91″,5 im Mittel = 91″,8
in K für KI = 89″,9 für IK = 89″,6 im Mittel = 89″,8

demnach das Hauptmittel: berechnet = 90″,8 und beobachtet = 83″,6.

Selbstverständlich haben die Aenderungen von m und v auch einen Einfluss auf die aus der allgemeinen Formel (in Bd. 67, Seite 79 der

Astronomischen Nachrichten und am Schlusse von Seite 31 der II. Mitteilung) berechneten Höhen x der Beobachtungsstationen, da in allen Gliedern jener Formel, vom zweiten an gerechnet, die Konstanten m und v vorkommen. In dem vorliegenden Falle jedoch, wo die scheinbare Zenithdistanz z nur wenig, nämlich um ε von 90^0 verschieden ist (so dass $z = 90^0 + \varepsilon$), konnten wir den Ausdruck für x in drei Teile zerlegen, von denen nur der erste Teil (C_1), und zwar in seinem dritten Gliede, m und v gleichzeitig, der dritte Teil blos v, der zweite aber weder m noch v enthält. Wenn für v der neue Wert gesetzt wird, so sind in den hinreichend genauen Näherungsformeln am Anfange der Seite 35 von Mitteilung II nur die ersten Glieder wie folgt zu ändern:

C_1 wird (9)

für KH = 32,77	für HK = 33,10	für KI = 90,42
für IK = 91,10	für IH = 23,24	für HI = 23,30

Nach allen mit den berichtigten Werten von m und v vorgenommenen Neuberechnungen von Δz, $\Delta z'$, x lässt sich die Gesamtwirkung aller Aenderungen auf die Ergebnisse unserer Zweiten Mitteilung wie folgt zusammenfassen:

Zunächst ist aus der in den obigen Nummern 1 bis 3 enthaltenen Zusammenstellung ersichtlich, dass die für die Seiten HK, HI, IK neu berechneten Refraktionen, welche vorher für eine und die nämliche Seite ziemlich stark von einander abwichen, je nachdem sie aus dem oberen oder dem unteren Beobachtungsorte bestimmt wurden, nunmehr fast durchgehends sehr gut übereinstimmen, womit gegen früher ein Uebelstand gehoben ist. Ausserdem rücken aber auch fast durchgehends die Mittel der berechneten Refraktionen denen der beobachteten näher, was gleichfalls sehr zu Gunsten meiner Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre und somit für die wissenschaftliche Grundlage meiner in den Jahren 1864 und 1866 gedruckten Abhandlungen über astronomische und terrestrische Refraktion spricht. Ferner werden in den Kurven der Steindruck-Tafel I, welche zur Mitteilung II gehört, die Schwankungen der berechneten Refraktionen absolut und gegen das Hauptmittel grösser, was zur Folge hat, dass sich diese Kurven nunmehr besser an jene anschmiegen, welche die beobachteten Refraktionen dar-

stellen. Endlich bewirkt der Umstand, dass alle Höhenunterschiede positiven Zuwachs erhalten, eine bei Weitem günstigere Gruppierung der Höhenkurven gegen deren Abscissenaxe oder die gerade Linie, welche der durch Nivellement gefundenen Höhe entspricht. Demnach erstreckt sich, wie schon am Schlusse meines oben (Seite 520) erwähnten Referats gesagt ist, die Wirkung des kleinen in m und damit auch in v steckenden Fehlers nicht auf die Ableitung allgemeiner Sätze, und in dem vorliegenden Falle nähern sich sogar die verbesserten theoretischen Werte der Refraktionen den beobachteten noch mehr, als es ohnehin schon der Fall war. Dass dem so ist, ergibt sich insbesondere auch aus den Refraktionsbeobachtungen des Jahres 1885, welche hier mit den neuen Werten von m und v berechnet und in zwei Zahlentafeln und einer Zeichnung dargestellt sind.

B. Die Refraktionsbeobachtungen und Höhenmessungen des Jahres 1885.

Nach der Theorie sollte man erwarten, dass die an zwei Orten von sehr ungleicher Höhe gleichzeitig und gegenseitig beobachteten Refraktionen nur sehr wenig von einander verschieden und die auf dem oberen Punkte gefundenen etwas kleiner als die unteren sind. Das war nun bei den Beobachtungen des Jahres 1881 weder zwischen Höhensteig und Kampenwand noch zwischen Irschenberg und Kampenwand der Fall, denn die Abweichungen aller beobachteten Refraktionen waren (nach Seite 35 und 36 M. II) durchschnittlich:

für die Seite HK in H = 76″,7 und in K = 35″,0, Unterschied = 41″,7
für die Seite IK in I = 95″,8 und in K = 71″,4, Unterschied = 24″,4

Es lag nahe, diese Unterschiede hauptsächlich in den Lothabweichungen zu suchen, welche auf den Beobachtungspunkten stattfinden, und deshalb wurden diese Abweichungen im Jahre 1884 durch den Assistenten der K. B. Kommission für die Europäische Gradmessung, Herrn Ingenieur Karl Oertel, unter der Oberleitung des Herrn Professors und Direktors Dr. Seeliger, mit Instrumenten der Königlichen Technischen Hochschule dahier bestimmt. Ueber die Ergebnisse dieser Bestimmungen

berichtete Herr Oertel in seiner auf Kosten der K. B. Gradmessungskommission im Jahre 1885 gedruckten Schrift „Astronomische Bestimmung der Polhöhen auf den Punkten Irschenberg, Höhensteig und Kampenwand.“ Hienach betragen die Lotabweichungen im Meridian, also die Unterschiede der geodätischen und astronomischen Polhöhen für Höhensteig + 5″,44; für Irschenberg + 8″,14; für Kampenwand + 12″,92, alle in dem Sinne einer Verschiebung des Zenithpunkts dieser Orte gegen Norden. An diesen Zahlen fielen nicht ihre absoluten Grössen, sondern ihre Verschiedenheit unter sich auf; denn man hatte erwartet, dass ihre gegenseitigen Differenzen nur sehr gering sein würden, weil die unteren Stationen Höhensteig und Irschenberg nicht weit von den oberen und den an diese sich anschliessenden gewaltigen Gebirgsmassen entfernt sind. Mit den Lotabweichungen im Meridian war aber meinen Zwecken, welche in der Erforschung der Gesetze der terrestrischen Refraktion und der hievon abhängigen Genauigkeit trigonometrischer Höhenmessungen lagen, noch nicht ausreichend gedient; ich musste wissen, wie gross die Lotabweichungen an den Beobachtungsorten in den sie verbindenden drei Vertikalebenen HK, FK, HI sind, und diese Kenntnis konnte nur auf Grund von astronomischen Azimuthbestimmungen gewonnen werden, welche die K. B. Gradmessungskommission im Jahre 1885 ebenso wie 1884 die Messungen der Lotablenkungen im Meridian durch den für diesen Zweck unter die Leitung des Herrn Direktors und Professors Seeliger gestellten Assistenten Herrn Karl Oertel vornehmen liess. Ueber diese Bestimmungen wird später Herr Professor Seeliger selbst ausführlich berichten; vorläufig teile ich mit dessen Erlaubnis folgende zwei hieher gehörige Ergebnisse mit:

1. Die Verbesserungen λ, welche an den in den Jahren 1881 und 1885 gemessenen Zenithdistanzen wegen der Lotabweichung anzubringen sind, betragen: (10)

für H in d. Richtung HI:	$\lambda = -2''{,}59$	in d. Richtung HK:	$\lambda = -2''{,}23$
„ I „ „	IH: $\lambda = -2''{,}30$	„ „	IK: $\lambda = -6''{,}21$
„ K „ „	KI: $\lambda = +2''{,}61$	„ „	KH: $\lambda = +7''{,}39$

Diese Verbesserungen sind mit den vorstehenden Zeichen den in H, I, K gemessenen Zenithdistanzen z_1 und folglich mit entgegengesetztem

Zeichen den daraus bestimmten (beobachteten) Refraktionen (Δz) beizufügen, um sie von dem Einflusse der Lotablenkungen zu befreien. Zur

Fig. 1.

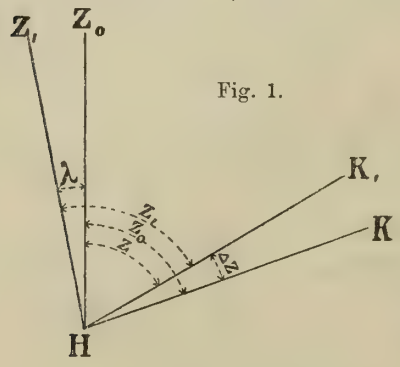
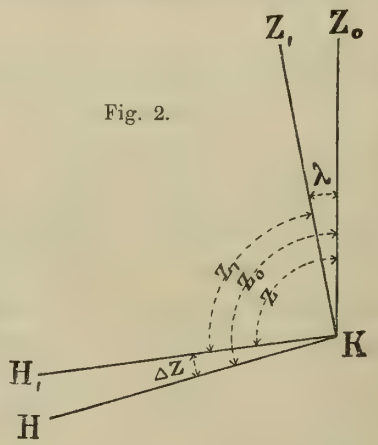


Fig. 2.



Erläuterung mögen die beigedruckten zwei Figuren dienen, in denen sich Nr 1 auf Höhensteig, Nr 2 auf Kampenwand bezieht. In beiden Figuren stellt Z_0 den wahren Zenithpunkt und Z_1 den infolge der Lothabweichung nach Norden verschobenen (gestörten) Zenithpunkt vor. Der Anblick dieser Figuren zeigt sofort, dass die verbesserten scheinbaren Zenithdistanzen z folgende sind:

$$\text{für H} \quad z = z_1 - \lambda \qquad \text{für K} \quad z = z_1 + \lambda$$

und dass hieraus für die von der Lotabweichung befreiten beobachteten Refraktionen Δz nachstehende Werte sich ergeben: (11)

$$\text{für H} \quad \Delta z = z_0 - z_1 + \lambda = \Delta z_1 + \lambda = \Delta z_1 + 2'',23$$
$$\text{„ K} \quad \Delta z = z_0 - z - \lambda = \Delta z_1 - \lambda = \Delta z_1 - 7'',39$$

2. Die Verbesserungen, welche wegen der Fernrohrbiegung b an den beobachteten Zenithdistanzen und Refraktionen anzubringen sind, wurden im Jahre 1884 für das konisch verjüngte gebrochene und sehr stabil gebaute Fernrohr des grossen Universalinstruments der hiesigen Technischen Hochschule bestimmt und die Biegung b im Horizont wie folgt gefunden:

$$\text{in H} = + 5'',15; \quad \text{in I} = + 6'',40; \quad \text{in K} = + 4'',21$$

Um die Biegung b wird jede Zenithdistanz zu klein und jede Refrak-

tion zu gross gemessen; man hat deshalb letztere um den Biegungsbetrag zu verkleinern und dadurch werden die von Lotabweichung und Fernrohrbiegung befreiten Refraktionen

$$\text{in H} = \Delta z \quad - \Delta z_1 + 2'',23 - 5'',15 = \Delta z_1 - \quad 2'',92$$
$$\text{in K} = \Delta z = \Delta z_1 - 7'',39 - 4'',21 = \Delta z_1 - 11'',60 \qquad (12)$$

Alle in 1885 beobachteten Refraktionen Δz_1 sind somit um eine konstante Grösse k zu verkleinern, welche für Höhensteig 2″,92 und für Kampenwand 11″,60 beträgt.

Bei Gelegenheit der vorhin erwähnten, auf den Punkten Höhensteig und Kampenwand vorgenommenen astronomischen Azimuthbestimmungen hat Herr Oertel nach meiner Anordnung und mit Benützung des zu jenen Bestimmungen dienenden grossen Universalinstruments der Technischen Hochschule an drei hiefür besonders geeigneten Tagen auch terrestrische Zenithdistanzen beobachtet, und diese Beobachtungen sind es, welche ich in gegenwärtiger dritten Mitteilung über terrestrische Refraktion veröffentliche und bespreche in der fünffachen Absicht: erstens zu zeigen, wie weit ihr aus richtigen Werten von m und v erhaltener Durchschnitt von dem mittleren Werte der 1881 gemessenen, mit unrichtigen Werten der Konstanten m und v reduzierten Refraktionen abweicht; zweitens den Einfluss der Lotabweichung und Fernrohrbiegung auf die im Jahre 1885 bestimmten Refraktionen nachzuweisen; drittens den Grad der Uebereinstimmung meiner vor 21 Jahren in den Nummern 1587 bis 1590 der Astronomischen Nachrichten (1866) aufgestellten Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung mit den auf drei Punkten des Bayerischen Hochgebirgs erhaltenen Beobachtungsergebnissen festzustellen; viertens einen Beitrag zu liefern zur Beantwortung der Frage, ob es für genaue technische Zwecke empfehlenswert und ausreichend sei, Höhenunterschiede trigonometrisch statt durch geometrisches Nivellement zu bestimmen; und endlich nach kurzer Uebersicht der Hauptergebnisse meiner Arbeiten diejenigen Punkte der Forschung zu bezeichnen, welche die Lehre von der atmosphärischen Strahlenbrechung und damit auch unsere Kenntnis von der wahren Erdgestalt weiter zu fördern imstande sind.

Demgemäss waren 1885 die Beobachtungen so angeordnet, wie sie in der Regel bei trigonometrischen Höhenmessungen befolgt werden: es wurde nämlich erstens immer nur von einem Punkte der Linie Höhen-

steig-Kampenwand (H K) aus die Zenithdistanz eines im anderen Punkte vorhandenen Signals (also einseitig) beobachtet und zweitens wurden die Beobachtungen im Gegensatze zu denen des Jahres 1881, welche bei Tag und Nacht stattfanden, ausschliesslich in den Tagesstunden gemacht. Man wird daher die Ergebnisse dieser Beobachtungen als solche betrachten müssen, welche in der Praxis des trigonometrischen Höhenmessens zu erreichen sind, wenn die Beobachtungen mit der Horizontalwinkelmessung einer Landestriangulation verbunden und folglich von einem sehr geübten Geodäten mit einem vorzüglichen Theodolithen an den passendsten Tagen ausgeführt werden.

Das zu unseren Refraktionsbeobachtungen im Jahre 1885 verwendete Universalinstrument hat der Beobachter Herr K. Oertel auf Seite 6 seiner oben erwähnten Abhandlung über Polhöhenbestimmungen beschrieben; zur Feststellung des Luftzustandes in Bezug auf Druck, Temperatur und Feuchtigkeit dienten das schon aus der zweiten Mitteilung bekannte Greiner'sche Quecksilberbarometer und ein August'sches Psychrometer, dessen Thermometerskalen in Fünftelgrade geteilt waren. Auf der Kampenwand diente fast immer als Signal ein daselbst aufgestelltes Heliotrop, und nur einige Male wurde in Abend- und Morgenstunden bei besonders ruhiger Luft auf eine das Heliotrop vertretende Signaltafel eingestellt. In Höhensteig kam wegen des für direkte Signale ungeeigneten Hintergrunds nur Heliotropenlicht zur Verwendung.

Die Beobachtungen geschahen in Zwischenräumen von je einer halben Stunde. Es wurden jedesmal zunächst Barometer und Thermometer abgelesen, hierauf folgte Einstellung des Objekts in der einen Kreislage des Instruments, Ablesen beider Libellen, sodann Ablesung der Mikroskope des Höhenkreises, wobei zur Ermittelung der Runkorrektion sowohl der dem Index im Mikroskoprechen vorausgehende als auch der ihm nachfolgende Teilstrich des Kreises, und zwar jeder zweimal eingestellt wurde. Endlich ward zur Eliminierung des Zenithpunktfehlers das Fernrohr durchgeschlagen und eine Wiederholung sämmtlicher Einstellungen und Ablesungen in der entgegengesetzten Kreislage vorgenommen.

Die zur Berechnung der Beobachtungen dienenden Daten stimmen vollständig mit den in der II. Mitteilung enthaltenen überein, ausgenommen nur die Höhenunterschiede beider Punkte und im Zusammen-

hange damit die wahren Zenithdistanzen. Da nämlich das zum Beobachten benützte Instrument bedeutend höher ist als die im Jahre 1881 verwendeten Theodolithen, und da ferner auch die Mittelpunkte der Signale nicht mehr wie in dem letztgenannten Jahre in der Höhe der Drehaxen der damals verwendeten Theodolithe lagen, so mussten sich die Höhenunterschiede und Zenithdistanzen wie folgt ändern.

Das zu den in Rede stehenden Beobachtungen dienende Universalinstrument hatte eine Axen-Höhe von 0,46 m, während der 1881 in Höhensteig verwendete Theodolith 0,36 m hoch war; es stieg also gegen früher die Absehlinie HK in H um 0,10 m. Ferner befand sich die Spiegelmitte des auf der Kampenwand aufgestellten Heliotrops um 0,83 m unter der Pfeileroberfläche, und da in 1881 die Instrumentenhöhe auf K 0,30 m betrug, lag die Spiegelmitte 1,13 m unter der vormaligen Höhe der Drehaxe. Hiemit wurde der Höhenunterschied zwischen H und K gegen 1881 verkleinert um $0{,}10 + 1{,}13 = 1{,}23$ m und es war folglich in 1885 die wahre Zenithdistanz von H nach K gleich der in Mitteilung II angegebenen plus dem parallaktischen Winkel, welcher dem Unterschiede 1,23 m auf die Entfernung HK entspricht.

Ebenso findet man die wahre Zenithdistanz der Signaltafel auf K in H. Die Mitte derselben befand sich nämlich um 1,12 m über der Pfeileroberfläche, also um 0,82 m über der Drehaxenhöhe von 1881. Es ist somit für die nach der Signaltafel gemachten Einstellungen der frühere Höhenunterschied grösser geworden um $0{,}82 - 0{,}10 = 0{,}72$ m nnd demnach die wahre Zenithdistanz von 1885 gleich der von 1881 minus dem parallaktischen Winkel, welcher auf die Entfernung HK zu 0,72 m gehört.

Endlich hat sich für die Beobachtungen auf der Kampenwand die Instrumentenhöhe um 0,16 m vergrössert und es stand die Spiegelmitte des Heliotrops in Höhensteig um 0,40 m unter der Pfeileroberfläche, also um 0,76 m unter der Drehaxe von 1881. Es wuchs daher der Höhenunterschied von 1881 um $0{,}76 + 0{,}16 = 0{,}92$ m und es war 1885 die wahre Zenithdistanz des Punktes H in K gleich der von 1881 plus dem parallaktischen Winkel für 0,92 m Höhe auf die Entfernung zwischen K und H. Da nun KH = 20446,74 m (log = 4,31062), so ergeben sich die wahren Zenithdistanzen für

$$\begin{aligned}
&\text{HK (Heliotrop):} \quad z_0 = 87^0\ 4'\ \ 3'',65 + 12'',41 = 87^0\ 4'\ 16'',06 \\
&\text{HK (Signaltafel):} \quad z_0 = 87^0\ 4'\ \ 3'',65 - \ \ 7'',26 = 87^0\ 3'\ 56'',39 \qquad (13) \\
&\text{HK (Heliotrop):} \quad z_0 = 93^0\ 6'\ 57'',15 + \ \ 9'',28 = 93^0\ 7'\ \ 6'',43
\end{aligned}$$

und der Unterschied dieser Zenithdistanzen gegen die beobachteten ist bekanntlich die „beobachtete" Refraktion.

Zur Ermittelung der „berechneten" Refraktionen und der „trigonometrisch" bestimmten Höhenunterschiede mussten zuerst die Refraktionskonstanten m und v festgestellt sein, und dieses geschah nach den im Eingange zu dieser Abhandlung mit (1) und (2) bezeichneten verbesserten allgemeinen Formeln, welche für die Stationen H und K die in (4) und (6) dargestellten besonderen Werte annehmen. Der in Mitteilung II gelieferte Nachweis, dass der dort auf Seite 24 stehende allgemeine Ausdruck für $r = \Delta z + \Delta z'$ in der abgekürzten Form $r = (1 - 2y)v\varphi$ benützt werden darf, gilt selbstverständlich auch für die Beobachtungen des Jahres 1885 und es sind die verbesserten Werte der terrestrischen Refraktionen Δz und $\Delta z'$ an den Endpunkten K und H der Lichtkurve KH nach der Entwicklung auf Seite 29 bis 31 der II. Mitteilung:

$$\begin{aligned}
&\text{von H aus berechnet:} \quad \Delta z = [9{,}69174]\,r; \quad \Delta z' = [9{,}70609]\,r \\
&\text{„ K „ „} \qquad\quad \Delta z = [9{,}69092]\,r; \quad \Delta z' = [9{,}70688]\,r
\end{aligned} \qquad (14)$$

Von diesen berechneten Refraktionen sind die ersteren (aus Beobachtungen in H bestimmten) in die Zahlentafel Nr 1 und die letzteren (aus Beobachtungen in K bestimmten) in die Tafel Nr 2 eingestellt. Die trigonometrischen Höhenunterschiede x sind nach den abgekürzten Formeln der Seite 35 Mitteilung II berechnet, welche infolge der verbesserten Werte von m und v für die Vertikalebene zwischen H und K die nachstehenden besonderen Werte annehmen:

$$\begin{aligned}
&\text{von H aus berechnet:} \quad x = 33{,}10 - [4{,}31061]\ \operatorname{cotg} z - [1.51638]\ v \\
&\text{„ K „ „} \qquad\quad x = 32{,}77 - [4{,}31061]\ \ \operatorname{tg} \varepsilon - [1{,}51650]\ v
\end{aligned} \qquad (15)$$

In der Zahlentafel Nr 1 sind nicht die aus den Beobachtungen in H berechneten x-Werte, sondern nur deren Unterschiede gegen die durch Nivellieren gefundene Höhe eingetragen; dasselbe ist in Tafel Nr 2 mit den aus K berechneten Werten von x der Fall. Dabei ist noch weiter zu bemerken, dass die in den Formeln für x vorkommenden Werte z und $\varepsilon = z - 90^0$ von den Fehlern der Fernrohrbiegung b und der Lotabweichung λ noch nicht befreit sind, sowie diese x-Werte auch nur den

beobachteten Refraktionen gegenüberstehen, die noch mit denselben Fehlern b und λ behaftet sind.

Es ist schon in Gleichung (12) gezeigt worden, dass die von den Fehlern b und λ befreiten „verbesserten beobachteten Refraktionen" nur um einen konstanten Wert von den unverbesserten beobachteten Refraktionen verschieden sind, und dass dieser konstante Wert für H = 2",92 und für K = 11",60 ist. Man erhält also die den Tafeln Nr 1 und Nr 2 entsprechenden verbesserten beobachteten Refraktionen, wenn man die in Spalte 6 eingetragenen Zahlen bei Nr 1 um 2",9 und bei Nr 2 um 11",6 vergrössert. Es ändert sich folglich auch das Mittel aller verbesserten Refraktionen in H um + 2",9 und in K um + 11",6. Da nun die Seitenlänge HK = s = 20446,74 m (log s = 4,31062) ist, so hat man die den Winkeln dz = 2",92 und dz′ = 11",60 entsprechenden Höhenänderungen dx aus der Gleichung $s \cdot \operatorname{tg}(dz) = dx$ oder aus

$$dx = [8{,}99619]\,dz \tag{16}$$

zu bestimmen, was für HK den besonderen Wert dx = 0,3 m und für KH den Wert dx = 1,2 m gibt. Es ist also auch hier den in Spalte 8 der Tafeln Nr 1 und Nr 2 enthaltenen Höhendifferenzen einfach nur eine konstante Zahl (0,3 bei Nr 1 und 1,2 bei Nr 2) beizufügen, und zwar mit positivem Vorzeichen, so dass, wenn man die in den Tafeln stehenden Höhendifferenzen $\Delta x'$ und die gesuchten Δx nennt,

$$\Delta x = \Delta x' + dx \tag{17}$$

wird, was also für H den Wert $\Delta x = \Delta x' + 0{,}3$ m und für K den Wert $\Delta x = \Delta x' + 1{,}2$ m gibt. (Dass dx mit positivem Vorzeichen dem $\Delta x'$ beizufügen ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Das Hauptglied im Ausdruck für x ist $(r\varphi)\operatorname{cotg} z$. Setzt man, was hier erlaubt ist, geradezu

$$x = (r\varphi)\operatorname{cotg} z$$

und differenziert diese Gleichung einerseits nach x und andererseits nach z, so wird

$$dx = -(r\varphi)\frac{dz}{\sin^2 z}$$

Alle Aenderungen der trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede haben folglich die umgekehrten Vorzeichen von Δz zu erhalten und werden daher sowohl für H als für K negativ. Ist nun $+x_0$ der

nivellierte Höhenunterschied von unten nach oben, x' der frühere und x der jetzige verbesserte trigonometrische Höhenunterschied, so ist $\Delta x' = x_0 - x'$ und $x = x' - dx$. Da nun nach der Definition $\Delta x = x_0 - x$ ist, so wird nach der Einsetzung der beiden Werte von x und $x_0 - x'$ aus den vorhergehenden Gleichungen in die letzte: $\Delta x = \Delta x' + dx$, was zu beweisen war. Für die Kampenwand hat man den Höhenunterschied von oben nach unten negativ zu nehmen, also ist $\Delta x' = -x_0 - (-x')$ und $-x = -x' - dx$. Da nun $\Delta x = (-x_0) - (-x)$ ist, so wird nach den erforderlichen Ersetzungen auch hier $\Delta x = \Delta x' + dx$, wie oben angegeben.

Auf die Beobachtungen und deren Ergebnisse, welche in den Tafeln Nr 1 und Nr 2 nach der Reihenfolge ihrer Aufnahmen zusammengestellt sind, folgen Zusammenstellungen der beobachteten und der berechneten oder theoretischen Refraktionen, sowie der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede gegen den nivellierten und der beobachteten Temperaturen, welche sämtlich behufs graphischer Darstellung in der dieser Abhandlung beigefügten Steindrucktafel nach Stunden geordnet sind. Die Luft-Temperaturen wurden hauptsächlich deshalb wieder eingesetzt, um ihren Zusammenhang mit den beobachteten Refraktionen in der Zeichnung deutlich sichtbar machen zu können. Obgleich meine Theorie der Lichtlinie aus den Beobachtungen auf einer Station auch die Werte der für dieselbe Zeit auf der anderen Station stattfindenden Refraktionen gibt, so habe ich es doch unterlassen letztere zu berechnen und aufzuführen, weil ihnen keine gleichzeitigen Beobachtungsresultate gegenübergestellt werden konnten, also die Berechnung zwecklos gewesen wäre.

Die stündlichen Mittel wurden zur Erzielung eines stetigeren Verlaufs der ihnen entsprechenden Kurve nach der bekannten Formel

$$4\,b_0 = a + 2\,b + c$$

umgerechnet, worin b irgend einen Mittelwert, a den ihm vorausgehenden, c den nachfolgenden Mittelwert und b_0 das resultierende kombinierte Mittel bezeichnet. Das Auftragen erfolgte in gleicher Weise und in gleichem Massstabe wie in Mitteilung II, d. h. es wurden bei den Refraktionen und Temperaturen die Abweichungen gegen das jedesmalige Gesamtmittel der ganzen Reihe, bei den Höhen die Unterschiede der berechneten Höhen gegen die nivellierte aufgetragen. Die hier in Betracht kommenden Mittelwerte sind: (18)

1) Für Höhensteig nach der Zahlentafel Nr 1:

a) aus den beobachteten Refraktionen = 69″,0
b) „ „ berechneten Refraktionen = 55″,3
c) „ „ absoluten Temperaturen = 296°,8

2) Für Kampenwand nach der Zahlentafel Nr 2:

a) aus den beobachteten Refraktionen = 36″,6
b) „ „ berechneten Refraktionen = 56″,0
c) „ „ absoluten Temperaturen = 283°,5

Nach diesen Daten bedürfen die auf der Steindrucktafel dargestellten Kurven nur ganz kurzer Erklärungen, welche hier folgen. Die ausgezogenen schwarzen geraden Linien stellen in beiden Figuren teils den durch Nivellieren gefundenen Höhenunterschied zwischen Höhensteig und Kampenwand, teils die arithmetischen Mittel der beobachteten und berechneten Refraktionen, sowie der absoluten Temperaturen vor. Diese Geraden sind somit die Abscissenaxen der durch Polygone vertretenen Kurven, welche durch Auftragen der Differenzen gegen das Mittel entstanden sind, und zwar das ausgezogene schwarze Polygon durch Auftragen der Differenzen der beobachteten Refraktionen, das ausgezogene blaue Polygon durch Auftragen der Differenzen der absoluten Temperaturen. das ausgezogene rote Polygon durch Auftragen der Differenzen der trigonometrischen Höhen gegen die nivellierte Höhe. Die schwarz gestrichelten Polygone bezeichnen die in Bezug auf Lotablenkung und Fernrohrbiegung verbesserten beobachteten Refraktionen, während die rot gestrichelten Polygone die in gleicher Weise verbesserten trigonometrischen Höhenunterschiede x darstellen. Die auch auf der Zeichnung angegebenen Massstäbe der Ordinaten (nämlich 1 cm für 4″ oder 2,5 mm für 1″ der Refraktionen, 1 cm für 1 m Unterschied der trigonometrischen Höhen, 1 cm für 1° Celsius der Luft-Temperaturen) sind sehr gross angenommen worden, damit auch sehr geringe Unterschiede in der graphischen Darstellung noch bemerkbar sind.

C. Folgerungen aus den mitgeteilten Beobachtungen.

I. Betreffend den Einfluss der Konstanten m und v auf die berechneten Refraktionen aus den Jahren 1881 und 1885.

Es ist bereits bemerkt worden, dass wenn die berechneten Refraktionen, welche den Beobachtungen von 1881 entsprechen, mit den richtig gestellten Werten von m und v verbessert werden, eine vollständige Uebereinstimmung ihres Mittelwerts (55″,8) mit dem Mittelwerte der damals beobachteten Refraktionen (55″,9) stattfindet. Und auch die in gleicher Weise behandelten berechneten Refraktionen, welche zu den Beobachtungen von 1885 gehören, geben einen Mittelwert (55″,7), welcher von dem Mittelwerte der beobachteten Refraktionen (52″,8) so wenig abweicht, dass ebenfalls ausreichende Uebereinstimmung angenommen werden kann.

Wenn an den hier verglichenen Refraktionswerten die Verbesserungen wegen Lotablenkung und Fernrohrbiegung nicht angebracht sind. so geschah dieses aus zwei Gründen: erstens weil es im Jahre 1881 versäumt worden ist, diese Störungen zu bestimmen und ungleichartige Grössen nicht mit einander verglichen werden können; dann zweitens, weil die in Rede stehenden Werte den Resultaten entsprechen, wie sie aus guten trigonometrischen Höhenmessungen bisher stets hervorgegangen sind und wohl auch ferner hervorgehen werden, da sich diese Art der Höhenbestimmung nicht auch mit der schwierigen und kostspieligen astronomischen Messung der Lotablenkung befassen kann. und die mühsame Bestimmung der Fernrohrbiegung an den kleineren Theodolithen, welche zu trigonometrischen Höhenmessungen verwendet werden, selten sich lohnt, insoferne eine Biegung von 1″ auf 20 Kilometer Entfernung erst einem Fehler von 1 Decimeter der Höhe entspricht und mit so kleinen Instrumenten selbst grössere Beträge als eine Sekunde kaum mehr mit Sicherheit gemessen werden können.

Die Ergebnisse unserer Beobachtungen und Untersuchungen zum ersten Punkte dieses Abschnitts sprechen also, wie man sieht, vollständig zu Gunsten meiner in den Jahren 1864 und 1866 aufgestellten Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung und hier insbesondere der terrestrischen Refraktion.

2. Den Einfluss der Fernrohrbiegung und der Lotablenkung auf die Beobachtungen des Jahres 1885 betreffend.

Gelegentlich der Polhöhenbestimmungen, welche Herr Oertel 1884 auszuführen hatte, wurde von demselben auf jeder Station auch die Biegung des schon mehrmals genannten Universalinstruments bestimmt und gefunden für (K) $b = 4''{,}21$ für (H) $b = 5''{,}15$. Die Lotablenkungen λ, welche nach den Bemerkungen auf Seite 525 dieser Abhandlung sowohl in H als in K eine Verschiebung der dortigen Zenithpunkte in der Richtung von K nach H, und zwar in H um $\lambda = 2''{,}23$ und in K um $\lambda = 7''{,}39$ bewirken, fordern, dass die gemessenen Zenithdistanzen in H um $2''{,}23$ vermindert und in K um $7''{,}39$ vergrössert werden. Beide Verbesserungen zusammen verkleinern die in H beobachteten Refraktionen um die konstante Grösse $k = 2''{,}92$ (welche aus $b - \lambda = 5''{,}15 - 2''{,}23$ entsteht) und die in K beobachteten Refraktionen um $k_1 = b_1 + \lambda_1 = 4''{,}21 + 7''{,}39 = 11''{,}60$. Um die gleichen konstanten Beträge k und k_1, wie die einzelnen beobachteten Refraktionen ändern sich auch deren Mittelwerte, so dass nach der auf Seite 533 dieser Abhandlung stehenden Zusammenstellung Nr 18 das Mittel aller verbesserten beobachteten Refraktionen in Höhensteig von $69''{,}0$ auf $66''{,}9$ und in Kampenwand von $36''{,}6$ auf $25''{,}0$ herabsinkt.

Während also die für Höhensteig erhaltenen Werte der beobachteten Refraktionen ($66''{,}1$) den dafür bestimmten theoretischen ($55''{,}3$) durch die vereinigten Verbesserungen b und c näher gerückt werden, vergrössert sich der Abstand beider Refraktionswerte für Kampenwand ($25''{,}0$ gegen $56''{,}0$) durch die gleichnamigen Verbesserungen aussergewöhnlich; denn der Unterschied Beobachtung minus Rechnung ist für H $= 66''{,}1 - 55''{,}3 = + 10''{,}8$ und für K $= 25''{,}0 - 56''{,}0 = - 31''{,}0$. Indem weiter das arithmetische Mittel der 1885 beobachteten Refraktionen $= \frac{1}{2}(66''{,}1 + 25''{,}0) = 45''{,}6$ und der dazu gehörigen berechneten Refraktionen $= \frac{1}{2}(55''{,}3 + 56''{,}0) = 55''{,}7$ ist, ergibt sich ein Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung von 10,1 Sekunden.

Insbesondere auffallend ist der jeder Theorie der Lichtkurve widersprechende grosse Unterschied der in H und K beobachteten Refraktionen,

welcher auch schon bei den Messungen des Jahres 1881 entschieden zum Ausdruck gelangte.

3. Das gegenseitige Grössen-Verhältnis der beobachteten und der berechneten terrestrischen Refraktionen betreffend.

Wenn nach Nr 1 und Nr 2 des gegenwärtigen Abschnitts C die Mittelwerte der den Jahren 1881 und 1885 zukommenden „beobachteten" und mit den richtigen Werten von m und v „berechneten" Refraktionen fast ganz übereinstimmen, so ist dies wohl der beste Beweis, dass an den eben besprochenen und schon im Jahre 1881 erkannten Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung die den Reductionen zu Grunde liegende Theorie der Lichtlinie nicht schuld sein kann, zumal diese schon vor mehr als zwanzig Jahren eine wichtige Bestätigung ihrer Richtigkeit dadurch erhielt, dass die Höhenmessungen am Kaukasus den von mir aufgestellten Satz über die Abnahme des Strahlenbrechungskoeffizienten vollkommen bestätigten. (Astronomische Nachrichten 1866, Nr 1590, Seite 88.)

Der Grund des Widerspruchs in der Grösse der an der unteren und oberen Station beobachteten Refraktionswerte, welche nahezu gleich sein sollen (der obere etwas kleiner als der untere), muss um so mehr ausserhalb der Refraktionstheorie gesucht werden, als diese Mittelwerte liefert, welche den Mitteln der unten und oben beobachteten Refraktionen ganz oder doch nahezu gleich sind. Einen Versuch, den in Rede stehenden Widerspruch zu beseitigen, habe ich bereits in meiner II. Mitteilung (Seite 42 bis 44) gemacht, indem ich auf Grund von Beobachtungen die zunächst auf den Beobachtungsstationen lagernden Luftschichten nicht mehr dem Dichtigkeitsgesetze unterworfen sein liess, welches den Grund meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung bildet, sondern als gleichmässig dicht annahm. Diese Annahme gebe ich auch heute noch nicht auf, nur füge ich ihr auf Grund der Messungen des Jahres 1885 noch eine zweite bei, welche auf meiner vor 15 Jahren (1872) in den Denkschriften der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (Klasse II, Band XI, Abteilung 2) veröffentlichten Abhandlung „Geodätische Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung" beruht und entweder für sich allein oder in Verbindung mit der ersten Annahme zur Ausgleichung

des Widerspruchs zwischen dem Refraktionswert $\Delta z'$ auf der oberen und dem Δz auf der unteren Station dienen kann.

In jener Abhandlung habe ich nämlich nachgewiesen, dass selbst das tadelloseste Präcisionsnivellement eines mit Lotablenkung behafteten oder eine solche hervorrufenden Berges, dessen Höhe x um eine Grösse $\Delta = s \operatorname{tg} \lambda$ falsch ergiebt, wenn s die Entfernung beider Stationen von einander und λ die mittlere Lotablenkung zwischen denselben ist. Ueber die Grösse Δ gibt das auf der gleichen Linie, aber in entgegengesetzter Richtung ausgeführte Kontrolnivellement keinen Aufschluss, weil der aus diesem resultierende Höhenunterschied, wenn sonst kein Fehler gemacht worden ist, ebenfalls um Δ falsch ist und die algebraische Summe der beiden gefundenen Werte $+ (x \pm \Delta)$ und $- (x \pm \Delta)$ lediglich den Wert Null liefert, welcher dem bekannten Satz entspricht, dass der ideale Schlussfehler eines richtig nivellierten Polygons null ist. Zu dem von λ herrührenden Fehler tritt aber noch ein anderer hinzu, welcher aus den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern entspringt und gerade bei Nivellements auf Gebirgswegen nicht zu umgehen ist. Wir wollen nunmehr die Summe beider Fehler $\Delta' = s \cdot \operatorname{tg} \sigma$ setzen. Es wird dann, wenn s und Δ' gegeben sind, der parallaktische Winkel σ, unter welchem in der Entfernung s die Höhe Δ' gesehen wird, aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \sigma = \sigma \cdot \operatorname{tg} 1'' = \frac{\Delta'}{s} \qquad (18)$$

gefunden, und es beträgt derselbe beispielsweise für $\Delta' = 2$ m und $s = 20446{,}74$ m ($\log s = 4{,}31062$) sehr nahe 20 Sekunden. Setzt man den Fall, dass bei der Berechnung der wahren Zenithdistanz z_0 auf K die untere Station H um 2 m zu tief angenommen wurde, so wäre (nach Fig. 3) der auf Seite 10 der II. Mitteilung enthaltene Wert von z_0 und damit auch die beobachtete Refraktion $\Delta z'$ um 20″ zu vermehren, so dass jetzt der in Nr 2 dieses Abschnitts angeführte mittlere Wert der verbesserten beobachteten Refraktion auf K von 25″ auf 45″ stiege. Die wahre Zenithdistanz Z in H (II, 10) und damit die dort beobachtete Refraktion Δz wäre, weil der Punkt K beispielsweise 2 m zu hoch angenommen wurde (nach Fig. 4) um 20″ zu vermindern, so dass der oben (C, Nr 2) angeführte Mittelwert aller beobachteten Refraktionen von 66″ auf 46″ herabsänke. Es können somit auf diesem Wege die beiden For-

derungen erfüllt werden, dass die Refraktionsteile Δz und $\Delta z'$ einander nahezu gleich und die unteren stets ein wenig grösser als die oberen sind. Ich erinnere jedoch daran, dass ich hier nur ein Beispiel geben wollte, um zu zeigen, wie der zweite Weg zur Ausgleichung der Werte von Δz und $\Delta z'$ dienen kann. In unserem besonderen Falle ist jedenfalls nur der aus der Lotablenkung entspringende Höhenfehler vorhanden.

Fig. 3.

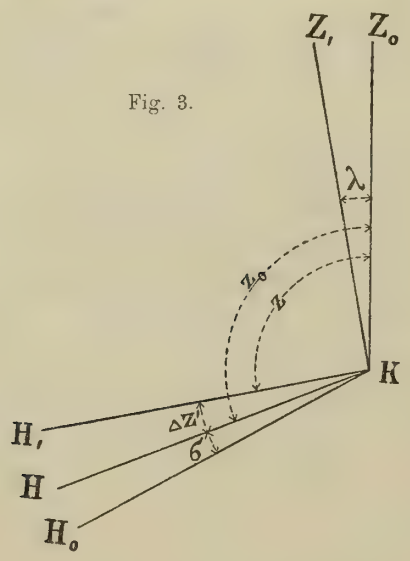
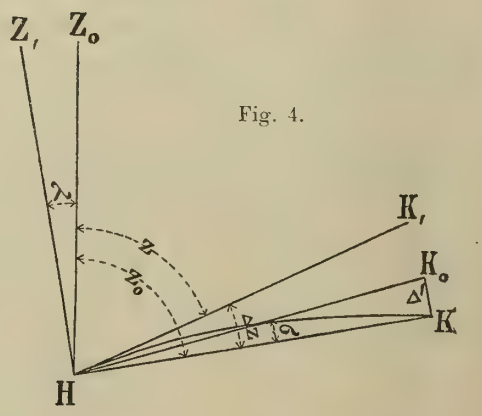


Fig. 4.



4. Betreffend die Frage, ob man für exakte technische Zwecke Höhenunterschiede weit entfernter Punkte trigonometrisch oder geometrisch bestimmen soll.

Nach Fig. 1 der beiliegenden Steindrucktafel entfernt sich die rotausgezogene Linie, welche die auf der Station Höhensteig trigonometrisch bestimmten Höhen aus den von der Lotabweichung und Fernrohrbiegung nicht befreiten Refraktionsbeobachtungen des Jahres 1885 darstellt, nicht weit von der Geraden A B, welche dem durch Nivellieren gefundenen Höhenunterschiede zwischen H und K entspricht. Dasselbe gilt von der ausgezogenen schwarzen Linie, durch welche der Gang der beobachteten Refraktionen gegen das durch A B vorgestellte Mittel derselben versinnlicht ist.

Entfernt sich die Höhenlinie zwischen $8\frac{1}{2}$ Uhr Vormittags und 7 Uhr Abends höchstens um 0,5 Meter von der Axe, so beträgt der grösste Abstand der Refraktionslinie von ihrer Axe höchstens 4 Sekunden innerhalb desselben Zeitraums, der gewöhnlich zu trigonometrischen Höhenmessungen benützt wird. Auch zeigt sich, wie bei den in Mitteilung II dargestellten Höhen- und Refraktionslinien der Beobachtungen aus dem Jahre 1881, die tägliche Periode der trigonometrisch bestimmten Höhen und der denselben zu Grunde liegenden Refraktionen und Temperaturen, womit meine auf Seite 45 jener Mitteilung aufgestellte Behauptung von einer mit der Luft-Temperatur zusammenhängenden täglichen Periode der trigonometrisch bestimmten Höhen aufs Neue bestätigt wird. Die Wendepunkte der Perioden fallen in die Vormittagsstunde von 9—10 Uhr und in die Nachmittagsstunde von 5—6 Uhr.

Die von der Lotablenkung und der Fernrohrbiegung befreiten Refraktionen, durch die schwarzgestrichelte Linie in Fig. 1 der Steindrucktafel dargestellt, und die aus diesen Refraktionen trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede, denen die rotgestrichelte Linie entspricht, entfernen sich weiter von ihren Axen als die eben besprochenen gleichnamigen Höhen- und Refraktionsunterschiede, und es steigen die Maxima in der Zeit von 8 Uhr Morgens bis 7 Uhr Abends bis auf 0,6 Meter und beziehungsweise 7 Sekunden. Die tägliche Periode der Refraktionen und der hieraus trigonometrisch bestimmten Höhen ist auch hier vorhanden, die Wendepunkte C und D liegen aber etwas weiter auseinander, indem sie auf 9 Uhr Vormittags und 6 Uhr Nachmittags treffen.

Mag man sich auch mit diesem letzteren Ergebnisse begnügen, so haben doch die in Fig. 2 dargestellten Kurven, welche den Gang der Lufttemperaturen, der beobachteten und berechneten Refraktionen, sowie der aus den beobachteten teils von der Lotablenkung und Fernrohrbiegung befreiten, teils unbefreiten Zenithdistanzen trigonometrisch bestimmten Höhen in K bezeichnen, keinen Anspruch darauf, gesetzmässige Vorgänge zur Anschauung zu bringen. Schon die Temperaturkurve lässt erkennen, dass zwischen 12 und 3 Uhr, dann von $4\frac{1}{2}$ bis $6\frac{1}{2}$ Uhr, somit fast jeden ganzen Nachmittag auf der Kampenwand Temperaturstörungen stattfanden, welche den Voraussetzungen für gute Messungen von Refraktions- und Höhenunterschieden ganz und gar widersprechen. Es kann

daher nicht wundernehmen, dass die verbesserten beobachteten Refraktionen weit von dem arithmetischen Mittel der unverbesserten abstehen, und dass infolge der unregelmässigen Beschaffenheit der Atmosphäre in den Tagen vom 16. bis 20. August 1885 die 67 auf der Kampenwand angestellten Beobachtungen als unbrauchbar von unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden.

Die auf der Station Höhensteig in den Tagen vom 9. bis 13. Juli 1885 bei sehr guter Witterung ausgeführten 82 Messungen ergaben sehr brauchbare Resultate, und wenn auch die auf der Kampenwand erhaltenen wegen der durch meteorologische Verhältnisse hervorgerufenen Störungen unbrauchbar sind, so ist doch die auf ihre Ausführung verwendete Zeit mit in Anschlag zu bringen bei der Berechnung des Zeitbedarfs für die trigonometrische Höhenmessung zwischen Höhensteig und Kampenwand. Dieser Zeitaufwand beträgt aber 9 Tage für Beobachtungen und 3 Tage für den Transport und die Aufstellung des grossen Universalinstruments nebst Heliotropen, Barometern und Psychrometern, im Ganzen also zwölf Tage, wobei für Herstellung von Bretter-Hütten und massiven Beobachtungspfeilern nichts gerechnet ist. da sie anderer Zwecke wegen schon vorhanden waren und für trigonometrische Höhenmessungen allein wohl selten oder nie hergestellt werden. In dieser Zeit hätte man die 20 Kilometer lange Strecke von Höhensteig bis Kampenwand auf den sie zusammensetzenden Strassen, Eisenbahnen und Fusswegen leicht auch doppelt nivellieren und dabei eine grosse Zahl von Zwischenpunktshöhen (welche bei trigonometrischen Messungen wegfallen, mit voller Genauigkeit bestimmen können, soweit diese nicht durch die bestehende Lotablenkung eine Beeinträchtigung erleidet, die sich durch das Messungsverfahren nicht ebenso bestätigen lässt, wie der Einfluss der Erdkrümmung und Strahlenbrechung. Die Wirkung der Lotablenkung, wenn eine solche auf der Beobachtungsstation stattfindet, macht sich zwar auch in der trigonometrischen Höhenmessung geltend. indem sie die gemessene Zenithdistanz um ihren Betrag vermehrt oder vermindert, gleichwohl wird diese Art der Höhenmessung für rein wissenschaftliche Zwecke das einzige Mittel bieten, im Gegensatz zum geometrischen Nivellement, welches den Höhenunterschied zweier Punkte bekanntlich in Bezug auf die als Geoid gedachte Erdoberfläche gibt, die Höhendifferenz dieser Punkte in Bezug auf die als Rotationsellipsoid

gedachte Erdoberfläche und damit den Betrag zu bestimmen, um welchen an jedem dieser Orte beide Flächen von einander abstehen. Dagegen unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass für genaue Höhenbestimmungen weit entfernter Punkte, welche für rein technische oder ökonomische Zwecke gemacht werden, das geometrische Doppelnivellement der mehrfach wiederholten trigonometrischen Ermittelung vorzuziehen und diese gleichwie die barometrische Höhenmessung nur für Höhenbestimmungen von untergeordneter Bedeutung verwendbar ist.

D. Uebersicht aller Ergebnisse der in Bayern ausgeführten Messungen der terrestrischen Refraktion.

Fassen wir die Ergebnisse aller unserer in der Zeit von 1877 bis 1885 angestellten und in drei Mitteilungen von 1880, 1883 und 1888 veröffentlichten Beobachtungen über die terrestrische Refraktion zusammen und vergleichen sie mit den aus meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung (Astronomische Nachrichten 1864 und 1866) berechneten Werten, so können folgende auf eine normale (d. h. ruhige und aus regelmässig übereinander gelagerten konzentrischen Schichten bestehende) Atmosphäre sich beziehende Sätze als erwiesen betrachtet werden:

1. Eine Seitenrefraktion oder ein Heraustreten der Lichtlinie aus der durch ihre Endpunkte bestimmten Vertikalebene findet nur selten und lediglich dann statt, wenn die Strahlen in weiter Erstreckung nahe an relativ stark erwärmten Bergabhängen vorbei oder über ausgedehnte Wasserflächen hinziehen, welche eine wesentlich niedrigere Temperatur haben als ihre Umgebung.

Solche Seitenabweichungen (Lateralrefraktionen) hängen lediglich von örtlichen Verhältnissen ab und sind deshalb kaum in mathematischen Formeln auszudrücken. Dass sie aber ausnahmsweise in Beträgen von mehreren Sekunden vorkommen, unterliegt eben so wenig einem Zweifel, als dass sie in jenen Vor- und Nachmittagsstunden am kleinsten sind, wo sich die Temperaturen der störenden Berg- oder Wassermassen und der dazwischen liegenden atmosphärischen Luft am meisten ausgeglichen haben, oder wo die barometrisch und trigonometrisch bestimmten Höhen-

unterschiede gegebener Punkte von den durch Nivellieren gefundenen am wenigsten abweichen, also in den Wendepunkten der Kurven, welche die täglichen Perioden barometrisch und trigonometrisch bestimmter Höhenunterschiede darstellen.

Es darf hier nicht verschwiegen werden, dass der berühmte Geodät und Direktor der Dänischen Gradmessung, Herr Staatsrath Dr. Andrae in Kopenhagen aus meinen in der I. Mitteilung über terrestrische Refraktion veröffentlichten Beobachtungen den Schluss ziehen zu können glaubte, dass zwischen dem Döbra- und Kapellenberge zur Zeit der Beobachtungen (6. und 11. September 1877) eine Lateralrefraktion bestanden habe, welche mit der Entfernung der Signale II, III, IV (Kapellenberg) von I (Döbraberg) gewachsen sei. Seine Excellenz begründete diesen Schluss durch folgenden am 29. November 1880 an mich geschriebenen Brief:

„Entschuldigen Sie, hochverehrter Herr College, dass ich Ihre freundschaftliche Erinnerung in Anspruch nehme, indem ich mit einer Frage beschwerlich falle. In diesen Tagen habe ich nämlich Ihre interessanten Refraktionsbeobachtungen gelesen. In dem Abschnitte, wo Sie die Lateralrefraktion behandeln, wurde ich freudig überrascht, als ich die ungemein glückliche Anordnung der Beobachtungen auf dem Döbraberge bemerkte, wo die 4 in verschiedenen Entfernungen errichteten Signale gleichzeitig im Gesichtsfelde des Fernrohrs lagen. Jetzt, dachte ich, muss der veränderliche Teil der Lateralrefraktion sich deutlich zeigen, und dies bestätigte sich ja auch beim ersten Anblicke der auf Seite 55 (oben) gegebenen „Zusammenstellung." Leider dauerte die Freude nicht lange, denn Seite 64 und 65 haben Sie ja unwiderleglich bewiesen, dass die erhaltenen Resultate durch plausible Variationen in der Stellung der Mikrometerschraube vollständig erklärt werden können. Es scheint mir jedoch noch immer möglich, auf etwas geändertem Wege die Einwirkungen einer Lateralrefraktion nachzuweisen, wenn die folgende Frage bejaht werden könnte, nämlich: Kann die Stellung der Mikrometerschraube nicht für die an demselben Tage ausgeführten Beobachtungen als constant angesehen werden, oder kann dies wenigstens nicht für die am 6. und 10. September 1877 angeführten Reihen gelten? Vorausgesetzt, dass die Frage, wie ich hoffe, bejaht werde, geben mir die in der „Zusammenstellung" aufgeführten Reihen folgende mit ungeänderter Schraubenstellung bestimmte Winkeldifferenzen, nämlich:

Am 6. September Differenz zwischen „Vorm." und erster Reihe „Nachm."	0″,7	1″,7	3″,0
Am 6. September Differenz zwischen „Vorm." und zweiter Reihe „Nachm."	0″,8	2″,3	2″,6
Am 10. September Differenz zwischen „Vorm." und „Nachm." . . .	0″,8	1″,5	6″,5
Summa	2″,3	5″,5	12″,1

Diese Differenzsumme stimmt ja ganz vorzüglich mit der Annahme einer mit der Entfernung proportional wachsenden Lateralrefraktion. Die Beobachtungen am 11. September bestätigen dasselbe Gesetz. Ich habe aber diese zwei Reihen nicht aufgeführt, weil ich vermuthe, dass die letzte derselben, welche Sie in der „Zusammenstellung" nicht mitnehmen, aus irgend einem Grunde kassiert werden soll. Durch gütige Beantwortung der obigen Frage werden Sie zu grosser Dankbarkeit verpflichten Ihren mit wahrer Freundschaft und Hochachtung ergebenen Andrae."

Nachdem ich in Uebereinstimmung mit dem Hauptbeobachter auf dem Döbraberge, damaligen Assistenten, späteren Professor zu Freiberg i/S., Herrn Dr. Max Schmidt, meinem früheren ausgezeichneten Schüler, die von Herrn Staatsrath Andrae gestellte Frage nur unter gewichtigen Beschränkungen bejahen konnte, scheint dieser seine oben ausgesprochene Ansicht von dem Bestande einer Lateralrefraktion zwischen Döbra- und Kapellenberg aufgegeben zu haben, wenigstens ist mir von einer weiteren Vertretung derselben nichts bekannt geworden. (Vergleiche Bauernfeind: 1. Ueber Refraktionsbeobachtungen, Vortrag gehalten am 16. September 1880 in München bei der 6. Allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung, gedruckt in deren Verhandlungen als Anhang IV; 2. Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, I. Mitteilung, 1880, Seite 48 bis 65, dann 86. — Fischer: Der Einfluss der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontwinkeln. Berlin 1882.)

2. Die Vertikalrefraktion hat wie die Lufttemperatur eine tägliche Periode, deren Amplitude mit jener der Temperaturkurve übereinstimmt. Damit hängen auch die täglichen Perioden der barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen zusammen, welche von der Wärmestrahlung des Erdbodens herrühren.

Wenn die Wendepunkte der Temperatur-Refraktions- und Höhenkurven bei meinen Beobachtungen am Hohen Miesing im August 1857 in die Stunden von 9—10 Uhr Vormittags und 4—5 Uhr Nachmittags, auf dem Döbra- und Kapellenberge im Sommer 1877 und 1878 in die Zeit von 6 bis 7 Uhr Morgens und Abends, auf den Punkten Höhensteig, Irschenberg und Kampenwand im August 1881 in die Stunden von 8 bis 9 Uhr Vormittags und 6—7 Uhr Nachmittags und endlich im Juli 1885 für Höhensteig und Kampenwand allein auf die Zeit von 9—10 Uhr Morgens und 5—6 Uhr Abends fielen, so beweisen diese Schwankungen nur wiederholt, was ich schon 1862 in meinen „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen“ ausgesprochen habe und Professor Rühlmann, der meine am Miesing angestellten Beobachtungen am Valtenberge in Sachsen prüfte und die hypsometrischen Messungen von E. Plantamour in Genf mit in Betracht zog, in seiner 1870 erschienenen Schrift „Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre“ bestätigte, dass

nämlich die Grössen der täglichen Perioden der barometrisch bestimmten Höhen sowohl von örtlichen Verhältnissen (geographische Breite, Meereshöhe, Bodenbeschaffenheit) als von der Jahreszeit (Auf- und Untergang der Sonne, Temperaturgrad) abhängig sind. Was in dieser Hinsicht von den täglichen Perioden der Barometermessungen gilt, habe ich auch bei den gleichnamigen Perioden der Verticalrefraktionen und der trigonometrischen Höhenmessungen bestätigt gefunden.

Dass es gelingen werde, durch Fortsetzung der Beobachtungen im Gebirge und im Flachlande ein allgemeines Gesetz für die örtlichen und jährlichen Aenderungen dieser Perioden aufzufinden, bezweifle ich eben so sehr als die Möglichkeit, genau vorherzusagen, welche Witterung in einer bestimmten Gegend nach Wochen oder Monaten stattfinden werde. Muss man aber hierauf verzichten, so bleibt es auch ungewiss, in welchen Tagesstunden trigonometrische oder barometrische Höhenmessungen die besten Resultate liefern. Aus zahlreichen solchen Messungen, wenn sie graphisch dargestellt sind, lässt sich die gesuchte Höhe mit ziemlicher Annäherung nur finden, wenn man die Berge und Thäler der die Ordinaten verbindenden Kurve durch eine gerade Linie ausgleicht und deren Ordinate als die gesuchte Höhe ansieht. (Vergleiche Bauernfeind: 1. Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, Mitteilung I (1880), Mitteilung II (1883) und Mitteilung III (1888), 2. Neue Untersuchungen über terrestrische Refraktion, Referat erstattet am 24. Oktober 1883 zu Rom und abgedruckt als Anhang VII der Verhandlungen über die siebente Allgemeine Konferenz der Europäischen Gradmessung.)

3. Wenn der Gleichgewichtszustand der Atmosphäre nicht so normal ist, wie ihn Barometerformel und Refraktionstheorie voraussetzen, sondern durch unregelmässige Erwärmung der unteren Luftschichten bis auf eine Höhe s gestört ist, so ist es gestattet, für diese Luftschichten eine gleichmässige Dichtigkeit anzunehmen und das der Strahlenbrechungstheorie zu Grunde liegende Gesetz der Dichtigkeitsänderung erst von der Höhe s an eintreten zu lassen, welche sich aus der Formel ergibt

$$s = 2\,r_0 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(z' - z)\sin\frac{1}{2}(z' + z)}{\sin z}$$

worin r_0 den Erdhalbmesser bis zur Beobachtungsstation, z' die daselbst beobachtete scheinbare Zenithdistanz und z die in der Höhe s stattfindende berichtigte Zenithdistanz $z' - \gamma$ bezeichnet.

Der Beweis dieses Satzes und die Entwicklung der vorstehenden Formel beruht auf den in der II. Mitteilung (S. 42) angeführten Beobachtungen, dass die Temperatur der Luft in den untersten Luftschichten bis zu zehn und mehr Meter Höhe nach oben häufiger zu- als abnimmt, was zur Folge hat, dass in solchen Schichten die Lichtkurve der Erdoberfläche ihre konvexe Seite statt der konkaven zuwendet. Wenn also in den unmittelbar auf dem Boden lagernden Luftschichten die Lichtlinie ebenso gut nach der einen als der anderen Seite gekrümmt sein kann, so ist es im Zweifelsfalle wohl erlaubt, eine mittlere Richtung zwischen beiden sehr flachen Krümmungen, nämlich eine Gerade anzunehmen, welche die Lichtkurve an der oberen Grenze der fraglichen unteren Schichten berührt, wie es auf Seite 43 der Mitteilung II geschehen ist. (Vergleiche Prestel: Die mit der Höhe zunehmende Temperatur als Funktion der Windrichtung, Leopoldina Bd. 29, Jahrgang 1861; ferner Bauernfeind: Neue Untersuchungen über Refraktion, Referat im Anhang VII der Verhandlungen der 7. Allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung; weiter Zinger, welcher in der Beilage zu meinem eben bezeichneten Referate (Seite 8 des Anhangs VII) auf Grund der in den Jahren 1871 und 1872 in Russland angestellten Versuche als unzweifelhaft bewiesen ansieht, dass bei kleinen Entfernungen häufig negative Refraktionen vorkommen, welche um so grösser sind, je näher die Beobachtungsrichtungen dem Boden liegen.)

4. Für eine ruhige und regelmässig erwärmte Atmosphäre besitzt die in den Astronomischen Nachrichten vom Jahre 1866 aufgestellte Theorie der terrestrischen Refraktion und der trigonometrischen Höhenmessung denselben Grad von Giltigkeit, welcher der zwei Jahre vorher veröffentlichten und auf dem gleichen Prinzip beruhenden Theorie der astronomischen Strahlenbrechung namentlich deshalb zukommt, weil sich aus ihr die Bessel'schen mittleren Refraktionen für alle Zenithdistanzen fast ohne jede Abweichung berechnen lassen.

Dass dieser Satz richtig ist, habe ich schon teilweise in meiner Ab-

handlung vom Jahre 1866 bewiesen, indem ich dort Messungsresultate aus der Kaukasischen Triangulation anführte, welche die aus meiner Theorie gezogene wichtige Folgerung von der mit der Höhe der Beobachtungsstation eintretenden Verminderung des Koeffizienten der terrestrischen Refraktion völlig bestätigten. Nach dieser Theorie verhalten sich nämlich unter sonst gleichen Umständen die Strahlenbrechungskoeffizienten zweier verschieden hoch gelegenen Beobachtungsstationen wie die vierten Potenzen der Höhen der über diesen Stationen ruhenden atmosphärischen Schichten, und nach einer aus Tiflis datierten brieflichen Mitteilung des damaligen Oberstlieutenants (jetzigen Generallieutenants und Mitglieds der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung) Herrn Stebnizki vom 16/28. April 1865 nahm der auf einer Station von 100 m Meereshöhe 0,085 betragende Refraktionskoeffizient mit der Höhe in dem Masse ab, dass er auf 4000 m Seehöhe nur mehr 0,058 betrug. Meine auf Seite 88 der Nr 1590 der Astronomischen Nachrichten im Einzelnen mitgeteilte Berechnung gab den theoretisch bestimmten Koeffizienten in 4000 m Höhe = 0,061 gegenüber dem von 0,085 für die Höhe von 100 Meter.

Die umfassendste Bestätigung der Richtigkeit meiner Strahlenbrechungstheorie liegt aber in den Refraktionsbeobachtungen, welche ich seit zehn Jahren im Fichtelgebirge und in den Vorbergen des Bayerischen Hochlands angestellt und (mit Einrechnung der gegenwärtigen) in drei Mitteilungen veröffentlicht habe. Zeigen auch die in diesen Mitteilungen enthaltenen graphischen Darstellungen der beobachteten und berechneten Refraktionswerte nicht in allen Fällen eine genaue Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung, so lassen sie doch durch die ihnen entsprechenden Kurven sehr wohl erkennen, dass die theoretischen Refraktionen von den beobachteten im Ganzen nicht stark abweichen und, abgesehen von den Endpunkten der täglichen Refraktions- und Temperatur-Perioden, häufig auch in Zwischenpunkten einander ganz oder nahezu gleich sind, und dass in allen Fällen, wo die beobachteten Refraktionen wegen Ungunst der Witterung nicht ausgeschlossen werden mussten, die arithmetischen Mittel der beobachteten und berechneten Werte übereinstimmen.

E. Schlussbetrachtungen.

In meinem am 16. September 1880 in der sechsten Allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung erstatteten Referate über die von Kommissären dieser internationalen Veranstaltung angestellten Refraktionsbeobachtungen habe ich ausgeführt, dass mich der Gedanke, die Lehre von der atmosphärischen Strahlenbrechung zu fördern, schon seit dem Jahre 1857 ernstlich beschäftigte, wo ich mich entschloss, aus eigenen Mitteln und mit Unterstützung von zehn tüchtigen meiner damaligen Zuhörer zunächst Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die mit der Höhe eintretenden Veränderungen der Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre anzustellen, um hiedurch eine bessere Grundlage für eine Refraktionstheorie zu gewinnen, als die bis dahin von den bedeutendsten Forschern wie Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory, Lubbock u. A. entwickelten Theorien der astronomischen Refraktion aufzuweisen hatten.

Meine im Jahre 1857 begonnenen Arbeiten kamen erst im Jahre 1862 zum Abschluss in der bei J. G. Cotta dahier erschienenen Schrift „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre.“ Diese Schrift enthält als wichtigste Ergebnisse: erstens den Nachweis einer täglichen Periode der barometrisch bestimmten Höhenunterschiede mit Erklärung derselben aus der Wärmestrahlung des Bodens, und zweitens eine aus den bis dahin bekannten auf Bergen und in freien Luftschichten beobachteten Temperaturen und Barometerständen wissenschaftlich abgeleitete Relation zwischen den absoluten Temperaturen (Θ, Θ_0), den Drückungen (p, p_0), den Dichtigkeiten (ϱ, ϱ_0) und den Höhen (h, h_0) der als ruhend und konzentrisch geschichtet gedachten Atmosphäre. Diese Relation, welche nach meiner Anschauung die physikalische Konstitution der Atmosphäre jedenfalls mit der für die Berechnung der in den grössten Zenithdistanzen wirksamen astronomischen Refraktionen erforderlichen Genauigkeit ausdrückt, lautet:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{h}{h_0}$$

Es verhalten sich demnach die gegebenen Punkten entsprechenden absoluten Temperaturen wie die Höhen der auf diesen Punkten ruhenden atmosphärischen Schichten und es folgt hieraus, wenn man $\Theta = 272{,}8 + t$ $\Theta_0 = 272{,}8 + t_0$ und $h_0 - h = x$ setzt, ganz einfach die Formel:

$$t_0 - t = \frac{\Theta_0}{h_0} x = \frac{272{,}8 + t_0}{h_0} x$$

welche besagt, dass die Temperaturabnahme nach Oben dem Höhenunterschiede der beiden Beobachtungsorte proportional ist.*)

Auf diesen Ermittelungen über die physikalische Konstitution der Atmosphäre und der von Laplace in der Mécanique céleste, T. IV. p. 246 entwickelten Differentialgleichung der atmosphärischen Strahlenbrechung, in die ich lediglich das von mir aufgestellte Gesetz über die Aenderung der Luftdichtigkeit

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \left(\frac{h'}{h}\right)^5 = \left(\frac{h - x}{h}\right)^5 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^5 = (1 - y)^5$$

*) Genau dieselben Formeln, nur mit anderen Buchstaben geschrieben, hat siebzehn Jahre nach mir der K. K. österreichische Hauptmann und ehemalige Lehrer an der Kadettenschule zu Prag, W. Schlemüller, in seiner bei H. Dominicus dortselbst erschienenen Schrift „Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck in einer ruhenden nicht bestrahlten Atmosphäre“ aufgestellt, ohne von den Ergebnissen meiner Untersuchungen, die doch in und ausserhalb Deutschland so grosse Anerkennung und Verbreitung gefunden hatten, die geringste Notiz zu nehmen. Auf meinen am 9. Dezember 1879 an Herrn Schlemüller geschriebenen Brief erhielt ich am 28. desselben Monats Antwort, in der folgende Sätze enthalten sind: „Es kann mir nur sehr schmeichelhaft sein, dass ein so vorzüglicher Beobachter der einschlägigen Verhältnisse der Atmosphäre wie Sie zu denselben Folgerungen gekommen ist wie ich, und sie durch die Praxis bestätigt gefunden hat. Ich bin einer solchen Anerkennung nicht gewohnt, da meine Abhandlung sowohl von der Akademie der Wissenschaften zu Wien, sowie von einer Reihe der bedeutendsten naturwissenschaftlichen Zeitschriften, als nicht zur Veröffentlichung geeignet, zurückgewiesen wurde. Der Schwerpunkt meiner Abhandlung liegt jedoch nicht in der Ableitung der barometrischen Formeln, welche jedermann erhalten musste, der an das Gesetz glaubte, die Temperaturabnahme sei proportional dem Höhenunterschiede, sondern darin, dass ich mit Hilfe der dynamischen Gastheorie bewiesen habe, dass diese Abnahme dem Höhenunterschiede proportional sein muss. In erster Linie Offizier, kann ich meinen wissenschaftlichen Arbeiten nur wenig Zeit und Mittel zuwenden; dieses mag auch entschuldigen, dass ich Ihr mir aus vielfachen Citaten bekanntes Werk nicht studiert habe; nach dessen Studium werde ich in einer eventuellen Neuauffage der Abhandlung auf Ihre Priorität bezüglich der Ableitung von $p : p_0 = h^6 : h_0^6$ hinweisen.“ Wer sich weiter über den Prioritätsstreit zwischen mir und Herrn W. Schlemüller unterrichten will, kann dieses durch Nachlesen meiner bei G. Franz in München erschienenen Brochüre „Die physikalische Konstitution der Atmosphäre nach der Theorie des K. K. Hauptmanns Herrn W. Schlemüller in Prag,“ welche meinen am 3. Januar 1880 in der K. B. Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vortrag für ein grösseres Publikum wiedergibt.

einführte, beruht die Entwicklung meiner bekannten Formeln sowohl für die astronomische wie für die terrestrische Refraktion, und von den darin vorkommenden Konstanten α und m habe ich nach § 7 meiner Abhandlung vom Jahre 1864 für die erstere ausdrücklich den von Bessel aus den Bradleyschen Beobachtungen abgeleiteten Wert ($\log \alpha = 6{,}4455264$) beibehalten, welcher für den Barometerstand $\beta_0 = 751{,}71$ Millimeter und die Lufttemperatur $\tau_0 = 9^0{,}31$ C gilt. Nur für die zweite Konstante m, welche das Verhältnis der Atmosphärenhöhe h zum Erdkrümmungshalbmesser r_0 ausdrückt, habe ich mir erlaubt, statt des berechneten Werts 0,007478 den kleineren 0,007464 zu setzen, weil hiedurch die aus meiner Theorie berechneten Refraktionswerte den von Bessel aus der Erfahrung abgeleiteten mittleren Refraktionen noch etwas besser sich anschlossen, als es ohnehin schon der Fall war. Die Berechtigung zu dieser minimalen Aenderung ist nicht zu bezweifeln.

Die Berechnung der Refraktionen für grosse Zenithdistanzen von 83^0 bis 90^0 und namentlich von 87^0 bis 90^0 ist allerdings umständlich und mühsam, und ich würde die dazu dienenden Formeln, wenn ich sie nochmals aufzustellen hätte, vielleicht abkürzen in der Weise, wie es E. Pucci in seinen „Fundamenti di Geodesia“ (Mailand 1883) oder F. R. Helmert in seinen „Theorien der höheren Geodäsie“ (Leipzig 1884) oder endlich Th. v. Oppolzer in seiner „Astronomischen Refraktion“ (Wien 1886) gethan, indem ich den Ausdruck für das Differential der Refraktion in zwei Faktoren zerlegte, von denen der erste nur am Beobachtungsorte unmittelbar aufzufindende Grössen enthielte, der andere aber eine Funktion der Veränderlichen wäre, die sich mittelst des Taylor'schen Satzes in eine schnell konvergierende Reihe verwandeln lässt. So lange jedoch die Astronomen noch die Bessel'schen oder diesen ähnliche Refraktionstafeln benützen, um hieraus die zu gegebenen Zenithdistanzen, Baro- und Thermometerständen gehörigen Refraktionen in einfacher Weise zu berechnen, liegt meines Erachtens kein Bedürfnis einer neuen Entwicklung vor. Meine alte Ableitung der Formeln für die mittleren astronomischen Refraktionen hat ihre Schuldigkeit gethan, indem sie zeigte, dass die beobachteten Bessel'schen mittleren Refraktionen auch den Anforderungen der Theorie genügen, welche ich aus meiner die natürlichen Verhältnisse genau genug ausdrückenden Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmo-

sphäre streng wissenschaftlich entwickelt habe. (Die einzige bei $89^1/_2{}^0$ Zenithdistanz vorkommende und 12″,2 betragende grössere Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung, fällt, wie seinerzeit schon bemerkt worden ist, wohl nur der Beobachtung zur Last.)

In neuester Zeit (1886) hat mein leider so früh verstorbener Freund und Kollege, Prof. Theodor v. Oppolzer, in der schon erwähnten akademischen Abhandlung über die astronomische Refraktion gegen meine Annahme über die Konstitution der Atmosphäre einige Einwendungen erhoben, welche die mit der Höhe sich ändernde Wärmeverteilung, die Höhe der Atmosphäre selbst und die an deren Grenzen herrschenden Temperaturen betreffen, von denen die der oberen Grenze angehörige auch als die Temperatur des Weltraums bezeichnet wird. Diese Einwendungen überraschten mich einigermassen, da Oppolzer seine erste Entwicklung der astronomischen Refraktion[1]) im Wesentlichen auf meine Relationen gestützt hatte, denen er jahrelang und namentlich in der Zeit sehr zugeneigt war, als die bereits erwähnten, auf ganz anderem Wege erhaltenen und mit den meinigen vollständig übereinstimmenden Formeln des Hauptmanns W. Schlemüller bekannt wurden. Es wird mir deshalb erlaubt sein, hier auf jene Ausstellungen Einiges zu erwidern.

Ueber den ersten Punkt, die Abnahme der Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe, hat sich Th. v. Oppolzer zuerst im Mai 1884 in einem der Oesterreichischen Zeitschrift für Meteorologie einverleibten Vortrage „Ueber den Zusammenhang der Refraktion mit der Temperaturverteilung in der Atmosphäre“ geäussert, und diese Aeusserung nahm er in die zwei Jahre später erschienene Abhandlung über astronomische Refraktion unverändert auf. Hienach ist die Formel des Redners über die Temperaturabnahme lediglich auf die thermo- und barometrischen Messungen gestützt, welche Gay-Lussac, Welsh und namentlich Glaisher bei ihren Ballonfahrten angestellt haben; er schloss also die von mir zu meiner Formel über die Temperaturabnahme ebenfalls benützten Thermo- und Barometerstände, welche ausser mir Forscher wie Humboldt, Saussure, Ramond, D'Aubuisson u. A. auf Bergen beobachtet haben, deshalb aus, weil die daselbst gemessenen Temperaturen nach meinen (wie er sie nennt)

1) Vergl. die „vorläufige Mitteilung“ in den Astron. Nachrichten 1877, Nr 2135, S. 365.

„bahnbrechenden Beobachtungen und Discussionen“ stets von der Wärmestrahlung des Bodens beeinflusst sind. Dieser Einfluss war mir, der sein Dasein ja zuerst nachgewiesen hat, bei Aufstellung meiner Relationen über die physikalische Beschaffenheit der Atmosphäre selbstverständlich bekannt. ich wusste aber auch schon damals, dass dieser Einfluss aus dem Unterschiede der auf zwei über einander gelegenen Punkten zur nämlichen Zeit beobachteten Temperaturen nahezu verschwindet, während er in deren Summe (dem arithmetischen Mittel) verbleibt. Diesen Umstand hat Prof. v. Oppolzer übersehen, während ich (nach meinen „Beobachtungen etc.“ S. 120) die Ergebnisse der Ballonfahrten von Gay-Lussac, Welsh und Sacharow — die von Glaisher waren noch nicht gemacht, wenigstens nicht veröffentlicht — sehr wohl berücksichtigte. Ob es genügt, die Integrationskonstante C des aus der Oppolzer'schen Differentialgleichung $dt = \varepsilon \cdot d\varrho$ hervorgegangenen Ausdrucks für die Temperatur t in der Höhe, wo die Luftdichtigkeit ϱ stattfindet, lediglich nach den Ergebnissen der Glaisher'schen Ballonfahrt vom 5. September 1862 zu berechnen, wie es Oppolzer (nach S. 11 und 12 seiner Abhandlung) thut, bezweifle ich, weil die in Luftschiffen beobachteten Temperaturen ebensowenig fehlerfrei sind, als die auf Bergen erhaltenen; denn die Ballonfahrten gehen meist so rasch aufwärts, dass die Thermometeranzeigen nicht schnell genug den Temperaturänderungen folgen können. Es werden also die Thermometer in rasch erstiegenen Höhen stets etwas wärmer sein als die Luftschichten, in denen sie abgelesen wurden, und es werden ebendeshalb auch die Temperaturunterschiede von Schichte zu Schichte etwas zu klein erhalten werden. Dass aber die Glaisher'schen Temperaturbeobachtungen nach der „Théorie de la chaleur“ von Fourier (p. 358 ff.) oder nach den Bemerkungen von Gyldén über die Wärmestrahlung des Ballons in seinen „Untersuchungen über die Konstitution der Atmosphäre“ (Petersburg 1866, S. 17 ff.) verbessert worden wäre, ist nirgends zu lesen.

Uebrigens kommt es bei der theoretischen Bestimmung der atmosphärischen Strahlenbrechung nicht so sehr auf die mit der Höhe eintretende Aenderung der Temperatur als der Dichtigkeit an und letztere findet Oppolzer aus seiner Formel fast genau so wie ich aus der meinigen, wie das unten stehende Täfelchen zeigt, das folgende Entwicklung zur Grundlage hat.

Wenn ϱ die Dichtigkeit einer oberen Schichte bezeichnet, welche unter dem Drucke p steht und die Temperatur t hat; wenn ferner ϱ_0, p_0, t_0 in gleicher Weise der untersten auf dem Erdboden lagernden Luftschichte angehören, und wenn endlich C die vorhin erwähnte Integrationskonstante bedeutet, für die Oppolzer auf Seite 11 seiner Abhandlung über astronomische Refraktion für $t_0 = 11^0{,}2$ C. den Wert $C = -40^0{,}4$ C. findet, so folgt aus der daselbst entwickelten Gleichung (4) die Luftdichtigkeit

$$\varrho = \frac{t - C}{t_0 - C}\varrho_0 = \frac{40{,}4 + t}{40{,}4 + t_0}\varrho_0$$

Auf Seite 12 der Oppolzer'schen Abhandlung stehen nun die von ihm hienach berechneten Temperaturen t, welche den von Glaisher bei verschiedenen Barometerständen (beziehungsweise in verschiedenen Höhen) beobachteten Temperaturen ziemlich gleich sind, und durch Einführung der Werte von t in die vorstehende Formel ergeben sich die Luftdichtigkeiten ϱ. Dabei nimmt Oppolzer wie Glaisher für den dem Abfahrtsort A des Ballons entsprechenden Barometerstand von 27,5 engl. Zoll oder 0,70 Meter die Luftdichtigkeit $\varrho_0 = 1$ an. Dieselbe Annahme muss auch ich machen, wenn ich die Luftdichtigkeit nach meiner in den Astron. Nachrichten Nr 1478, S. 210 enthaltenen Formel (3)

$$\varrho = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \varrho_0 = \left(\frac{p}{27{,}5}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \varrho_0$$

berechnen will. Aus der nachfolgenden Zusammenstellung ergeben sich unmittelbar nur die Aenderungen der Temperatur und der Luftdichtigkeit für Höhen, die vom Abfahrtsorte des Glaisher'schen Ballons aus gezählt sind und für welchen $\varrho_0 = 1$ ist. Für unseren nächstliegenden Zweck der Vergleichung der von Oppolzer und von mir nach unseren Formeln berechneten Luftdichtigkeiten genügt dieses auch. Gleichwohl habe ich in der folgenden Tabelle eine Reduction der Höhen und der Dichtigkeiten auf die Meeresfläche vorgenommen, d. h. ich berechnete aus den für A und die Meeresfläche gegebenen Daten den Höhenunterschied beider und setzte die Luftdichtigkeit ϱ_0 am Meere der Einheit gleich, statt in 686 m Höhe.

Nr	Barometerstand		Nach Oppolzer		Nach Bauernfeind		Meereshöhen in Meter	Reduzierte Luftdichtigkeiten nach	
	Zoll	Meter	Temp. C.	Dichtigkeit	Temp. C.	Dichtigkeit		Oppolzer	Bauernfeind
0	29,9	0,76					0	1,0000	1,0000
1	27,5	0,70	+ 11,2	1,0000	+ 11,5	1,0000	686	0,9338	0,9338
2	25,0	0,60	+ 7,2	0,9225	+ 7,0	0.9236	1964	0,8614	0,8624
3	22,5	0,57	+ 3,1	0,8430	+ 2,2	0,8460	2365	0,7871	0.7900
4	20,0	0,51	— 1,2	0,7597	— 3,2	0,7669	3252	0,7093	0,7161
5	17,5	0,45	— 5.5	0,6764	— 9,1	0.6862	4245	0,6316	0,6407
6	15,0	0,38	— 9,9	0,5911	— 15,8	0,6034	5567	0,5520	0,5635
7	12,5	0,30	— 14,6	0,5000	— 23,5	0,5184	7415	0,4669	0,4841

Wie man hieraus entnimmt, teilte Glaisher aus seinen Beobachtungen nur so viel mit als nötig war, um die Barometerstände und Temperaturen (damit auch die Höhen über A) zu finden, welche einer Abnahme der Luftdichtigkeit von 1 in A bis auf 0,5 in 7415 Meter Höhe entsprechen. Ein Vergleich der beiden letzten Spalten der vorstehenden Tabelle zeigt deutlich genug, dass bis zu dieser Höhe die Dichtigkeiten einer normalen Atmosphäre, wie sie aus meinen und Oppolzers Formeln hervorgehen, einander fast gleich und jedenfalls nur so wenig von einander verschieden sind, dass sie einen bemerkenswerten Einfluss auf die Refraktionsberechnungen nicht ausüben können. Daher rührt auch die auffallende Annäherung der von Oppolzer im Jahre 1886 berechneten mittleren astronomischen Refraktionen an die meinigen aus dem Jahre 1864 und an die noch viel älteren auf Beobachtungen beruhenden Bessel'schen mittleren Refraktionen.

Gehen wir zu dem zweiten, auf die Höhe der Atmosphäre sich beziehenden Einwand über, so bedarf derselbe keiner weitläufigen Erörterung. Th. v. Oppolzer findet die von mir in meine Formeln eingeführte Atmosphärenhöhe h, welche sich nur auf etwa 50 Kilometer erstreckt, viel zu klein: Diese Höhe sei infolge der eine noch merkliche reflektierende und brechende Kraft der Atmosphäre voraussetzenden Dämmerungserscheinungen auf wenigstens 100 Kilometer und wegen des Aufleuchtens der Sternschnuppen sogar auf 500 Kilometer auszudehnen.

Bei der Aufstellung der Formel für die Höhe der Atmosphäre in verschiedenen Breiten ψ ging ich von zwei Voraussetzungen aus: erstens,

dass die Temperatur der Atmosphäre gleichmässig abnehme und zweitens, dass die Oberfläche der letzteren, welche da sich befindet, wo die lichtbrechende Kraft der Luft unmerklich wird, eine andere Abplattung habe, als die Erdoberfläche. Hienach fand ich (vergl. Beobb. 1862, S. 123, Gl 75) die Höhe

$$h = 25100^t\,(1 + 0{,}14734 \cos 2\psi) = 48920^m\,(1 + 0{,}14734 \cos 2\psi),$$

woraus für den Pol eine Atmosphärenhöhe von 41,7 km (5,6 geogr. Meilen), für die Breite von 45^0 eine Höhe $h = 48{,}9$ km (6,6 geogr. Meilen) und für den Aequator eine solche von 56,1 km (7,5 geogr. Meilen) folgt. Aus dem Aufbaue der vorstehenden Formel hätte Prof. v. Oppolzer, wenn es ihm nicht entgangen wäre, eben so gut wie Prof. A. Ritter und Prof. F. R. Helmert[1]) entnehmen sollen, dass ich die Atmosphärenhöhe lediglich als ein geeignetes Mass für die Temperaturabnahme in den Luftschichten betrachte, welche noch ein wirkliches Lichtbrechungsvermögen besitzen. Wenn man aber dieses Vermögen nach dem Strahlenbrechungskoeffizienten beurteilen darf, so wird dieser in den Meereshöhen

100 m	4000 m	8000 m	12000 m	16000 m	32000 m	48000 m

woselbst nach meiner Aufstellung die Luftdichtigkeiten stattfinden:

1,0000	0,6557	0,3955	0,2489	0,1265	0,0054	0

nach der schon auf Seite 546 dieser Abhandlung erwähnten Formel:[2])

0,0850	0,0611	0,0416	0,0282	0,0179	0,0013	0

und daraus geht zur Genüge hervor, dass für den vorliegenden Zweck Atmosphärenhöhen von 40 bis 50 Kilometer völlig ausreichend sind, wenn man sie in der Rechnung als absolute Grössen benützen will. Sie sind indessen von mir in den Entwicklungen der astronomischen und der terrestrischen Strahlenbrechung mit einer einzigen Ausnahme als Ver-

1) Vgl. Wiedemanns Annalen 1878, Bd. 5, S. 413 und Helmerts „Theorien der höheren Geodäsie", Bd. 2, S. 587.

2) Diese Formel steht in den Astron. Nachrichten des Jahres 1866, Bd. 67, S. 75. In neuerer Zeit setze ich dafür lieber den Ausdruck (18) auf Seite 47 desselben Bands, nämlich

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2k = \frac{5\,a}{m}(1 + m\,y)(1 - y)^4.$$

hältniszahlen behandelt worden. Denn schon in den Relationen über die Konstitution der Atmosphäre kommt blos das Verhältnis $h : h_0$ vor, welches ohne Aenderung seines Werts gestattet, Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl zu multiplizieren, also die Atmosphärenhöhe h beliebig gross anzunehmen. Ferner ist, weil an der oberen Grenze der irdischen Dunsthülle die Luftdichtigkeit zweifelsohne aufhört, das Integral der Differentialgleichung der astronomischen Refraktion zwischen den Grenzen $\varrho = 1$ und $\varrho = 0$ zu nehmen, die Atmosphäre mag so hoch sein als sie will. Endlich hätte ich auch in den Formeln für die terrestrische Refraktion wie in denen für die astronomische die Höhe h ganz weglassen und durch das Produkt mr_0 ersetzen können, wenn ich es nicht bequemer gefunden hätte sie hier beizubehalten. In der Konstanten m, welche dafür in die Rechnung einzutreten hat und in beiderlei Formeln nicht zu entbehren ist, steckt allerdings die Höhe h, und ich habe deshalb in meiner Abhandlung vom Jahre 1866 (A. N. Nr 1589, S. 71) die auf die Breite von Königsberg, sowie auf die Temperatur und den Barometerstand der Bessel'schen mittleren Refraktionen reduzierten Werte von $m = m_0$ für alle Breiten von 0^0 bis 90^0 in einer Tafel zusammengestellt, um die wegen des Faktors $(1 + 0{,}14734 \cos 2\psi)$ etwas umständliche Berechnung der Atmosphärenhöhe überflüssig zu machen.

Anbelangend Oppolzers dritten Einwand gegen meine Aufstellung über die Konstitution der Atmosphäre, dass sie die Temperatur an der oberen Luftgrenze, welche auch die Temperatur des Weltraums genannt wird, mit $-\ 273^0$ viel zu hoch angebe, da dieselbe nach seiner Formel nur 45^0, nach Fourier's Schätzung 50^0 bis 60^0 und nach Versuchen von O. Frölich etwa 57^0 C. unter Null betrage, so will ich hierauf nicht damit entgegnen, dass ich eine stattliche Reihe bedeutender Forscher nennen könnte, welche nahezu dieselbe oder eine noch niedrigere Temperatur gefunden haben, sondern nur anführen, dass die Temperatur von $-\ 272^0{,}8$ C. lediglich eine Folge des bekannten Satzes ist, dass die Grenze der Atmosphäre da liegt, wo die Elasticität der Luft aufhört, also der Ausdruck $272{,}8 + t = 0$ ist. Dieser Satz beruht allerdings auf der Voraussetzung, dass das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz für die ganze Atmosphäre gelte. Wenn aber auch, wie es wahrscheinlich ist, diese Annahme nicht allgemein zutrifft, so wird von der Richtigstellung jenes Gesetzes zwar die

von mir nur gelegentlich bestimmte Temperatur des Weltenraums, keineswegs aber die für die Refraktion allein wichtige Dichtigkeit der Luft an der oberen Grenze der Erdatmosphäre betroffen; denn diese Dichtigkeit ist Null, ob die Welt-Temperatur — 50° C. oder — 273° C. beträgt.

Ungefähr um dieselbe Zeit als Th. v. Oppolzer seine Erinnerungen gegen meine Theorie vorbrachte, am 15. März 1884, schrieb mir Herr Professor Helmert aus Aachen, dass er behufs der Bearbeitung des letzten Kapitels seiner „Mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie" meine Abhandlungen über atmosphärische Strahlenbrechung eingehend studiert und in seine allgemeinen Entwickelungen meine „wohlbegründeten Annahmen für den mittleren Zustand der Atmosphäre" eingeführt habe. Dabei hätte er meine in den Astronomischen Nachrichten von 1866, Nr 1589 entwickelten und auch auf Seite 25 und 31 der „Zweiten Mitteilung über Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion" enthaltenen Formeln für die Strahlenbrechung r und die von einem Orte (H) aus trigonometrisch zu bestimmende Höhe x eines Punkts (K) in der Atmosphäre, welche einem in Bogenmass ausgedrückten Winkel φ und einer Zenithdistanz z entsprechen, völlig bestätigt gefunden, nicht aber diejenigen für Δz und $\Delta z'$, welche auf Seite 29 stehen und Teile der Refraktionssumme $r = \Delta z + \Delta z'$ sind. Weiter beanstandet Prof. Helmert die Ausdrücke für die Atmosphärenhöhe h und die davon abhängige Konstante m als fehlerhaft, weil sie der von mir aufgestellten Grundgleichung $h = h_0 \varrho^{\frac{1}{5}}$ nicht entsprechen.

In meiner Antwort auf den erwähnten Brief vom 22. März 1884 bemerkte ich, dass ich den zuletzt gerügten Fehler, als er mir im August 1883 aufgefallen war, bereits am 24. Oktober desselben Jahres, also fünf Monate vor der Helmert'schen Wahrnehmung, der in Rom tagenden internationalen Gradmessungsgesellschaft angezeigt und bei nächster Gelegenheit zu verbessern versprochen habe. Dieses Versprechen ist nunmehr im Abschnitte A. gegenwärtiger Abhandlung erfüllt worden. Mit der weiteren (auch in den 2. Band, S. 588 seines oben genannten Werkes übergegangenen) Behauptung Helmerts, dass meine ursprünglich in den Astron. Nachrichten (Bd. 67, Nr 1589, S. 65) aufgestellten und dort mit (64) und (65) bezeichneten Formeln für Δz und $\Delta z'$ nicht ganz korrekt

seien, verhält es sich wie folgt. Zieht man nämlich nur die beiden ersten Glieder des Ausdrucks (64) in Betracht, so heisst er

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} v \varphi \left(1 - \frac{4v - m(5 - 6v)}{3v} p_0 \varphi + \ldots\ldots\right)$$

und es geht, wenn man die mit v behafteten Glieder absondert und für $m p_0$ seinen Wert cotg z setzt, derselbe über in

$$\Delta z = \tfrac{5}{6} \varphi^2 \operatorname{cotg} z + \tfrac{1}{2} v \varphi \left(1 - \frac{4 + 6m}{3m}\right) \operatorname{cotg} z$$

Professor Helmert verlangt nun, dass für $v = 0$ auch $\Delta z = 0$ werde. Dieses ist hier nicht der Fall, indem für $v = 0$ das Glied $\frac{5}{6} \varphi^2 \operatorname{cotg} z$ bestehen bleibt, welches nach Helmerts eigener Berechnung für die Refraktion auf der 20 Kilometer langen und 1080 Meter ansteigenden Linie Höhensteig-Kampenwand nur den zehnten Teil einer Sekunde beträgt. Im Hinblicke auf die Geringfügigkeit des ersten Glieds des letzten Ausdrucks und in der Erwägung, dass der Koefficient v in einer ruhigen konzentrisch geschichteten Atmosphäre nur an deren oberen Grenze Null werden kann, das Helmert'sche Verlangen demnach hier gar nicht einmal berechtigt ist, kann ich in den Vernachlässigungen, die ich mir (laut Anzeige) schon bei der Entwicklung der Näherungsformel für Δz gestattet habe, unbedenklich noch etwas weiter gehen und im zweiten Gliede des vorletzten Ausdrucks für Δz auch den Posten $m(5 - 6v)$ weglassen. Ich folge hierin nur dem Beispiel Helmerts und komme deshalb zu dem gleichen Resultat wie er, nämlich zu der Formel

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} v \varphi \left(1 - \frac{4 \varphi \operatorname{cotg} z}{3m} + \ldots\right)$$

Hieraus dürfte zu entnehmen sein, dass es nicht gerade notwendig war, die an meinem Gusswerke vorgenommene kleine Ziselierarbeit so stark zu betonen, wie es auf Seite 588 des 2. Bands der „Theorien der höheren Geodäsie“ geschehen ist. Da mein Brief vom 22. März 1884 noch vor dem Abdruck der erwähnten Stelle in Aachen eingetroffen war, wie aus der Anmerkung auf S. 589 hervorgeht, so hätte sie wenigstens etwas gemildert werden können. Um jedem Missverständnis bezüglich der eben bezeichneten Anmerkung vorzubeugen, wiederhole ich, dass dieselbe nicht etwa besagen will, ich sei von Aachen aus auf den Fehler in m erst

aufmerksam gemacht worden. sondern nur, dass ich Herrn Professor Helmert die Richtigkeit seiner gleichen Wahrnehmung auf Anfrage einfach bestätigt habe. Schliesslich bin ich durch die Anmerkung auf S. 605 des genannten Werkes, dass die Temperaturangaben in der „Mitteilung II“ und in der Abhandlung „Neue Beobachtungen etc.“, welche für denselben Ort und Zeitpunkt die nämlichen sein sollten, nicht unerheblich von einander abweichen, noch zu folgender Erklärung veranlasst: Diese auf die Gesamntergebnisse keinen Einfluss übenden Abweichungen rühren davon her, dass auf den Stationen zwei Thermometer zur Bestimmung der Lufttemperatur aufgestellt waren, ein besonderes Quecksilberthermometer und das trockene Thermometer des August'schen Psychrometers. Da nun auf jeder Station 4 Beobachter paarweise Tag und Nacht abwechselnd beobachteten, so mag es wohl vorgekommen sein, dass manchmal die Temperaturen, entgegen der Vorschrift, am Psychrometer oder sogar am Thermometer des Aneroids statt am besonderen Quecksilberthermometer abgelesen und in das Beobachtungsheft eingetragen wurden.

Habe ich im Vorhergehenden nur von Ausstellungen gesprochen, welche an meiner Theorie der Strahlenbrechung gemacht wurden. so ist es mir wohl auch gestattet, eine Zuschrift des Superintendenten eines grossen Vermessungsinstituts (der U. S. Coast and Geodetic Survey) in Nordamerika, Mr. C. P. Patterson in Washington mitzuteilen, welche eine auf Erfahrung beruhende unbedingte Anerkennung meiner Refraktionstheorie enthält. Der genannte Herr schrieb mir dd. Washington, 8. December 1880 in englischer Sprache Folgendes:

„Sehr geehrter Herr! So eben habe ich Ihr sehr interessantes Werk über terrestrische Refraktion[1]) empfangen, und ich sage Ihnen hiemit herzlichen Dank für Ihre gütige Aufmerksamkeit. Mit grossem Vergnügen benachrichtige ich Sie, dass Ihre mir aus früheren Publikationen wohlbekannte Refraktionstheorie unseren Beobachtungen zugrunde gelegt wurde, und erlaube mir, Ihre Aufmerksamkeit auf die völlige Uebereinstimmung der Formeln 18 und 19 (Seite 12), dann der Formel 15a (Seite 81) Ihres Werkes mit den auf Seite 11 und beziehungsweise Seite 10 der beifolgenden Schrift unseres Assistenten C. A. Schott hinzulenken,[2]) sowie darauf, dass Ihre Höhen-

1) „Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion.“ Erste Mitteilung, Verlag der K. Akademie der Wissenschaften, 1880.

2) „Methods and Results, Contributions to Hypsometry.“ Washington, Government printing office, 1879. Die Formeln 18 und 19 beziehen sich auf die vorhin besprochenen Werte Δz und $\Delta z'$, während 15a den von mir entwickelten Ausdruck für die trigonometrisch zu bestimmende Höhe x betrifft.

und Refraktions-Diagramme fast genau unseren eigenen entsprechen. Es ist eine Quelle grosser Befriedigung für mich, dass die graphischen Darstellungen unserer Messungs-Ergebnisse den Ihrigen so nahe parallel verlaufen, und ich spreche Ihnen hiemit meine ganz besondere Anerkennung für das gründliche und erschöpfende Verfahren aus, das Ihren Forschungen und Erörterungen eigen ist. Mit grösster Hochachtung C. P. Patterson."

Es bleibt mir nur noch übrig, einige Worte über das Verhältnis zwischen Theorie und Beobachtung der terrestrischen Refraktion zu sagen. Alle Entwicklungen über meteorologische Vorgänge in der Atmosphäre setzen einen bestimmten Zustand der letzteren voraus, und es gelten die Entwicklungen nur für diesen, nicht für dessen Störungen. Demnach sind auch die Formeln für Refraktion, trigonometrische und barometrische Höhenmessung von der physikalischen Konstitution der Atmosphäre abhängig, wie sie bei einem mittleren (ruhigen) Zustand derselben stattfindet. In Ermanglung eines über jeden Zweifel erhabenen Gesetzes habe ich im Jahre 1862 den bekannten Näherungsausdruck für dasselbe aufgestellt, welcher der Wahrheit so nahe als möglich kommt und daher als Stellvertreter des z. Z. noch fehlenden Gesetzes gelten kann. Refraktionsbeobachtungen, trigonometrische und barometrische Höhenmessungen werden zwar nur bei guter Witterung, an hellen und windlosen Tagen gemacht, gleichwohl ist auch in diesen Zeiten der Zustand der Atmosphäre meistens nicht der normale, namentlich nicht in den untersten Luftschichten, die von der Wärmestrahlung des Erdbodens sehr stark beeinflusst werden. Es kommt vor, dass die absolute Temperatur mit der Höhe gleichmässig abnimmt, wie es das Gesetz verlangt, es kommt aber ebenso oft vor, dass das Gegenteil stattfindet oder die Temperatur in den untersten Luftschichten bis zu einer gewissen Höhe sich gleich bleibt. In dem ersteren Falle wendet die Lichtkurve der Erdoberfläche ihre konkave, in dem zweiten ihre konvexe Seite zu, in dem dritten geht sie in eine gerade Linie über. Diese von vielen Seiten bestätigte Beobachtung hat mich veranlasst, in der Mitteilung II (1883, Seite 43) den Vorschlag zu machen, das von mir aufgestellte Dichtigkeitsgesetz erst in der Höhe s eintreten zu lassen, bis zu welcher die gleichmässige Dichtigkeit der untersten Luftschichten reicht. Wie gross s unter verschiedenen lokalen und meteorologischen Verhältnissen wird, ist noch nicht genügend erforscht, so schätzenswert auch die von mehreren Autoren vorliegenden und insbesondere die auf der Russischen Sternwarte

Pulkowa, sowie auf der Baltischen Eisenbahn vom Obersten Zingerle angestellten und oben (Seite 545) erwähnten Versuche sind; es dürfte sich also empfehlen, in dieser Richtung weiter zu forschen.

Auch der Wärmestrahlung des Bodens, von der die täglichen Perioden der barometrisch und trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede abhängen, sollten die Geodäten ihre stete Aufmerksamkeit widmen, um deren Berechnung für verschiedene lokale, zeitliche und meteorologische Verhältnisse möglich zu machen. Einer der Wege, die zu diesem Ziele führen können, ist in meinen „Beobachtungen und Untersuchungen etc." vom Jahre 1862 angegeben. Auf demselben Wege kann man auch nach den Diagrammen der trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede die Temperaturdifferenzen berechnen, welche deren tägliche Perioden bedingen. Wenn hier zunächst nur von jenen trigonometrischen Höhenmessungen die Rede ist, bei welchen aus ökonomischen Gründen die Lotabweichung und Fernrohrbiegung nicht berücksichtigt werden kann, so versteht es sich wohl von selbst, dass die von diesen Fehlern freien Messungen, welche in Verbindung mit sorgfältigst ausgeführten geometrischen Nivellementen zur Feststellung von Abständen zwischen den mit „Geoid" und „Referenzellipsoid" bezeichneten Erdoberflächen dienen, für den vorliegenden Zweck nicht nur nicht auszuschliessen, sondern vorzugsweise zu benützen sind.

Dass die im Verlaufe eines Tags zwischen zwei gegebenen Punkten stattfindenden Refraktionen sich derart verändern, dass sie vom Morgen bis zum Mittag kleiner und von da bis zum Abend wieder grösser werden, ist bekannt und ich selbst habe die im Jahre 1849 von den damaligen Stabsofficieren, späteren Generalen Bäyer und v. Hesse im Harz auf den Stationen Kupferkuhle und Brocken ausgeführten Refraktionsbeobachtungen in meine Abhandlung über terrestrische Refraktion (Astron. Nachr. von 1866, Nr 1590, S. 83) aufgenommen, um zu zeigen, dass auch diese Beobachtungen meine Theorie insoferne bestätigen, als nach ihr die Refraktionen $\Delta z'$ auf der oberen Station jederzeit kleiner sein müssen als die zur gleichen Zeit auf der unteren Station stattfindenden Refraktionen Δz. Wenn ich nun in den „Mitteilungen" über die Ergebnisse aus meinen Beobachtungen der terrestrischen Refraktion nur von diesen allein sprach, so lag dieses in meinem Thema und es konnte mir dabei

nicht in den Sinn kommen, wie einige Geodäten vermuteten, zu glauben, ich sei der Erste gewesen, der jene Veränderlichkeit wahrgenommen hat. In dieser Hinsicht beanspruche ich kein anderes Verdienst als das, welches mir mein Freund Th. v. Oppolzer auf Seite 13 seines schon erwähnten Vortrags über Refraktion und Temperaturverteilung mit folgenden Worten zuerkannt hat: „Die terrestrische Refraktion, die gewissermassen einen Bruchteil der astronomischen darstellt, wird wie diese einer täglichen Periode unterworfen sein, ein Umstand, der in seinen Umrissen zwar schon lange den Geodäten bekannt war, der aber erst wieder in Bezug auf seine Gesetzmässigkeit und besonders auf sein Verhalten in der Nacht durch die erschöpfenden Arbeiten v. Bauernfeind's in das rechte Licht gesetzt wurde."

Tafel Nr 1.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Höhensteig und Kampenwand.

A. Beobachtet in Höhensteig.

Nr	1885, Juli		Luftdruck	Absol. Temp.	Refraktion		Höh. Diffr.	Nr	1885, Juli		Luftdruck	Absol. Temp.	Refraktion		Höh. Diffr.
			mm	°C	Beob.	Ber.					mm	°C	Beob.	Ber.	
		h			″	″	m			h			″	″	m
1	9. Nm	4.30	723,5	297,7	59,2	55,3	+ 0,9	42	11. Nm	3.—	722,2	298,7	64,6	55,0	+ 0,3
2	—	5.—	723,7	296,9	69,1	55,4	— 0,1	43		3.30	722,1	297,5	66,2	55,2	+ 0,2
3	—	5.30	723,7	296,7	69,6	55,4	— 0,1	44	—	4.—	721,9	298,5	65,8	55,0	+ 0,2
4	—	6.—	723,7	296,5	70,0	55,4	— 0,1	45	—	4.30	721,8	297,7	70,6	55,1	— 0,2
5	—	6.30	723,6	296,7	72,2	55,4	— 0,3	46	—	5.—	721,9	297,0	68,8	55,3	— 0,0
6	9. Nm	7.0	723,7	295,9	73,6	55,5	— 0,5	47	11. Nm	5.30	722,0	296,1	67,8	55,4	— 0,0
7	—	7.30	723,9	293,8	73,8	55,9	— 0,5	48	—	6.—	721,9	295,7	75,5	55,5	— 0,7
8	10. Vm	9.30	724,2	295,1	66,3	55,7	+ 0,2	49	—	6.30	722,0	294,8	74,4	55,6	— 0,6
9	—	10.—	724,0	295,9	65,7	55,6	+ 0,3	50	—	7.—	722,0	293,8	74,1	55,7	— 0,5
10	—	10.30	723,9	296,6	65,3	55,4	+ 0,3	51	12. Vm	7.30	722,1	292,4	84,7	56,0	— 1,6
11	10. Vm	11.—	723,9	296,6	62,9	55,4	+ 0,6	52	12. Vm	8.—	722,0	293,2	78,6	55,8	— 0,9
12	—	11.30	724,0	297,5	65,0	55,3	+ 0,3	53	—	8.30	722,0	294,7	71,8	55,6	— 0,3
13	—	12.—	724,0	297,9	64,6	55,3	+ 0,4	54	—	10.—	721,7	296,6	66,9	55,3	+ 0,1
14	10. Nm	12.30	724,0	297,3	63,7	55,3	+ 0,5	55	—	10.30	721,7	297,0	66,7	55,2	+ 0,2
15	—	1.—	724,0	297,9	67,2	55,3	+ 0,2	56	—	11.—	721,6	297,8	67,5	55,1	+ 0,1
16	10. Nm	1.30	724,0	298,5	67,3	55,2	+ 0,2	57	12. Vm	11.30	721,7	298,4	66,7	55,0	+ 0,1
17	—	2.—	723,9	298,6	65,1	55,1	+ 0,3	58	—	12.—	721,6	298,4	65,7	55,0	+ 0,2
18	—	2.30	723,7	299,1	66,1	55,1	+ 0,2	59	12. Nm	1.—	721,4	299,9	67,3	54,8	+ 0,0
19	—	3.—	723,7	298,5	64,5	55,1	+ 0,4	60	—	1.30	721,7	299,9	64,8	54,8	+ 0,3
20	—	3.30	723,8	297,5	67,3	55,3	+ 0,1	61	—	2.—	721,4	299,4	65,6	54,9	+ 0,2
21	10. Nm	4.—	723,6	297,4	68,0	55,3	+ 0,0	62	12. Nm	2.30	721,2	300,1	66,3	54,8	+ 0,1
22	—	4.30	723,5	296,9	67,2	55,4	+ 0,1	63	—	3.—	721,1	300,1	65,1	54,8	+ 0,3
23	—	5.—	723,7	296,4	66,9	55,5	+ 0,2	64	—	3.30	721,0	299,5	64,8	54,8	+ 0,3
24	—	5.30	723,4	296,0	68,7	55,5	— 0,0	65	—	4.—	720,9	300,1	66,0	54,7	+ 0,2
25	—	6.—	723,4	295,8	70,0	55,5	— 0,1	66	—	4.30	720,7	299,5	66,1	54,8	+ 0,2
26	10. Nm	6.30	723,4	296,0	71,2	55,5	— 0,3	67	12. Nm	5.—	720,7	299,3	66,6	54,8	+ 0,1
27	—	7.—	723,4	293,7	75,4	55,8	+ 0,3	68	—	5.30	720,2	297,7	68,4	55,0	+ 0,0
28	11. Vm	8.—	723,3	292,2	64,6	56,1	+ 0,4	69	—	6.—	720,3	297,2	70,0	55,0	— 0,2
29	—	8.30	723,2	292,7	74,7	56,0	— 0,6	70	—	6.30	720,2	297,2	73,6	55,1	— 0,5
30	—	9.—	723,2	293,3	71,9	55,9	— 0,3	71	—	7.—	720,6	296,2	73,3	55,3	— 0,5
31	11. Vm	9.30	723,2	294,6	68,6	55,7	— 0,0	72	12. Nm	7.30	720,5	294,8	79,5	55,5	— 1,1
32	—	10.—	723,1	295,5	69,2	55,6	— 0,1	73	13. Vm	7.—	721,1	291,6	82,4	56,0	— 1,3
33	—	10.30	722,9	296,7	67,5	55,4	+ 0,1	74	—	7.30	720,8	292,7	82,8	55,8	— 1,3
34	—	11.—	722,8	296,8	66,8	55,3	+ 0,1	75	—	8.—	720,8	293,2	80,6	55,8	— 1,2
35	—	11.30	722,8	297,3	65,9	55,3	+ 0,3	76	—	8.30	720,7	293,7	74,5	55,7	— 0,6
36	11. Nm	12.—	722,6	297,8	64,5	55,2	+ 0,4	77	13. Vm	9.—	720,7	295,4	74,2	55,4	— 0,6
37	—	12.30	722,4	297,6	66,2	55,2	+ 0,2	78	—	9.30	720,7	296,2	70,2	55,3	— 0,2
38	—	1.—	722,4	298,6	64,1	55,1	+ 0,4	79	—	10.—	720,5	296,8	68,8	55,2	— 0,0
39	—	1.30	722,3	298,9	66,1	55,0	+ 0,2	80	—	10.30	720,6	297,7	67,0	55,1	+ 0,1
40	—	2.—	722,3	298,3	66,2	55,1	+ 0,2	81	—	11.—	720,4	299,0	65,8	54,9	+ 0,2
41	—	2.30	722,3	298,3	67,8	55,1	+ 0,0	82	—	11.30	720,5	299,4	63,9	54,8	+ 0,4

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Höhensteig nach Kampenwand beobachteten Refraktionen.

Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½
1	82,4	84,7	64,6	74,7	71,9	66,3	65,7	65,3	62,9	65,0	64,6	63,7	67,2	67,3	65,1	66,1	64,5	67,3	68,0	59,2	69,1	69,6	70,0	72,2	73,6	73,8
2		82,8	78,6	71,8	74,2	68,6	69,2	67,5	66,8	65,9	64,5	66,2	64,1	66,1	66,2	67,8	64,6	66,2	65 8	67,2	66,9	68,7	70,0	71,2	75,4	79,5
3			80,6	74,5		70,2	66,9	66,7	67,5	66,7	65,7		67,3	64,8	65,6	66,3	65,1	64,8	66,0	70,6	68,8	67,8	75,5	74,4	74,1	
4							68,8	67,0	65,8	63,9										66,1	66,6	68,4	70,0	73,6	73,3	
Mittel	82,4	83,8	74,6	73,6	73,1	68,4	67,7	66,6	65,8	65,4	64,9	64,9	66,2	66,1	65,6	66,7	64,7	66,1	66,6	65,8	67,8	68,6	71,4	72,8	74,1	76,6
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2
Komb. Mittel	82,4	81,1	76,7	73,7	72,0	69,4	67,6	66,7	65,9	65,4	65,0	65,3	65,9	66,0	66,0	66,0	65,6	65,9	66,3	66,5	67,5	69,1	71,0	72,8	74,4	76,6

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Höhensteig aus Höhensteig-Kampenwand.

Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½
1	56,0	56,0	56,1	56,0	55,9	55,7	55,6	55,4	55,4	55,3	55,3	55,3	55,3	55,2	55,1	55,1	55,1	55,3	55,3	55,3	55,4	55,4	55,4	55,4	55,5	55,9
2		55,8	55,8	55,6	55,4	55,7	55,5	55,4	55,3	55,3	55,2	55,2	55,1	55,0	55,1	55,1	55,0	55,2	55,0	55,4	55,5	55,5	55,5	55,5	55,8	55,5
3			55,8	55,7		55,3	55,3	55,2	55,1	55,0	55,0		54,8	54,8	54,9	54,8	54,8	54,8	54,7	55,1	55,3	55,4	55,5	55,6	55,7	
4							55,2	55,1	54,9	54,8										54,8	54,8	55,0	55,0	55,1	55,3	
Mittel	56,0	55,9	55,9	55,8	55,7	55,6	55,4	55,3	55,2	55,1	55,2	55,3	55,0	55,0	55,0	55,0	55,0	55,1	55,0	55,1	55,2	55,3	55,4	55,4	55,6	55,7
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2
Komb. Mittel	56,0	55,9	55,9	55,8	55,7	55,6	55,4	55,3	55,2	55,1	55,2	55,2	55,1	55,0	55,0	55,0	55,0	55,1	55,1	55,1	55,2	55,3	55,4	55,4	55,6	55,7

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Höhensteig-Kampenwand.

Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½
1	−1,3	−1,6	+0,4	−0,6	−0,3	+0,2	+0,3	+0,3	+0,6	+0,3	+0,4	+0,5	+0,2	+0,2	+0,3	+0,2	+0,4	+0,1	+0,0	+0,9	−0,1	−0,1	−0,1	−0,3	−0,5	−0,5
2		−1,3	−0,9	−0,3	−0,6	+0,0	−0,1	+0,1	+0,1	+0,3	+0,4	+0,2	+0,4	+0,2	+0,2	+0,0	+0,3	+0,2	+0,2	+0,1	+0,2	−0,0	−0,1	−0,3	+0,3	−1,1
3			−1,2	−0,6		−0,2	+0,1	+0,2	+0,1	+0,1	+0,2		+0,0	+0,3	+0,2	+0,1	+0,3	+0,3	+0,2	−0,2	+0,0	−0,0	−0,7	−0,6	−0,5	
4							+0,0	+0,1	+0,2	+0,4										+0,2	+0,1	−0,0	−0,2	−0,5	−0,5	
Mittel	−1,3	−1,5	−0,6	−0,5	−0,4	−0,0	+0,1	+0,2	+0,2	+0,3	+0,3	+0,3	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1	+0,3	+0,2	+0,1	+0,3	+0,1	−0,0	−0,3	−0,4	−0,3	−0,8
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2
K.Mittel	−1,3	−1,2	−0,8	−0,5	−0,3	−0,1	+0,1	+0,2	+0,2	+0,3	+0,3	+0,3	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1	−0,1	−0,3	−0,4	−0,5	−0,8

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Höhensteig beobachteten absoluten Lufttemperaturen.

Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½
1	291,6	292,4	292,2	292,7	293,3	295,1	295,9	296,6	296,6	297,5	297,9	297,3	297,9	298,5	298,6	299,1	298,5	297,5	297,4	297,7	296,9	296,7	296,5	296,7	295,9	293,8
2		292,7	293,2	294,7	295,4	294,6	295,5	296,7	296,8	297,3	297,8	297,6	298,6	298,9	298,3	298,3	298,7	297,5	298,5	296,9	296,4	296,0	295,8	296,0	293,7	294,8
3			293,2	293,7		296,2	296,6	297,0	297,8	298,4	298,4		299,9	299,9	299,4	300,1	300,1	299,5	300,1	297,7	297,0	296,1	295,7	294,8	293,8	
4							296,8	297,7	299,0	299,4										299,5	299,3	297,7	297,2	297,2	296,2	
Mittel	291,6	292,6	292,9	293,7	294,4	295,3	296,2	297,0	297,6	298,2	298,0	297,5	298,8	299,1	298,8	299,2	299,1	298,2	298,7	298,0	297,4	296,6	296,3	296,2	294,9	294,3
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2
K.Mittel	291,6	292,4	293,0	293,7	294,5	295,3	296,2	297,0	297,6	298,0	297,9	298,0	298,6	299,0	299,0	299,1	298,9	298,6	298,4	298,0	297,4	296,7	296,4	295,9	295,1	294,3

Tafel Nr. 2.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Kampenwand und Höhensteig.

A. Beobachtet auf Kampenwand.

Nr	1885, August		Luftdruck	Absol. Temp.	Refraktion		Höh. Diffr.	Nr	1885, August		Luftdruck	Absol. Temp.	Refraktion		Höh. Diffr.
			mm	°C	Beob.	Ber.					mm	°C	Beob.	Ber.	
		h			″	″	m			h			″	″	m
1	16. Vm	9.—	637,2	282,8	39,2	56,4	+ 2,6	36	17. Nm	3.30	634,2	286,7	33,9	55,6	+ 2,8
2	—	9.30	637,2	282,5	38,8	56,4	2,4	37	—	4.—	634,2	286,6	33,6	55,6	2,9
3	—	10.—	637,5	283,6	39,5	56,3	2,3	38	—	4.30	634.1	286,6	33,5	55,6	2,9
4	—	10.30	637,4	283,1	36,1	56,4	2,6	39	—	5.—	634,0	286,6	31,1	55,6	3,1
5	—	11.—	637,3	284,0	35,7	56,2	2,7	40	—	5.30	634,2	286,1	33,4	55,7	2,9
6	16. Vm	11.30	637,2	284,0	35,8	56,2	+ 2,7	41	17. Nm	6.—	634,0	283,6	34,0	56,1	+ 2,8
7	—	12.—	637,2	283,8	36,5	56,2	2,6	42	19. Nm	1.30	629,4	278,3	35,5	56,6	2,8
8	Nm	1.—	637,2	284,2	35,2	56,2	2,8	43	—	4.—	629,5	277,3	36,4	56,7	2,7
9	—	1.30	637,1	284,1	33,7	56,2	2,9	44	—	4.30	629,4	277,6	35,8	56,7	2,8
10	—	2.—	636,9	285,2	32,8	56,0	3,0	45	—	5.—	629,4	277,7	38,2	56,7	2,5
11	16. Nm	2.30	637,0	285,5	34,0	56,0	+ 2,8	46	20. Vm	7.—	629,3	280,0	41,0	56,3	+ 2,2
12	—	3.—	637,1	285,3	34,8	56,0	2,8	47	—	7.30	629,2	279,3	43,5	56,4	1,9
13	—	3.30	636,8	285,7	39,7	55,9	2,3	48	—	8.—	629,2	280,1	42,3	56,3	2,0
14	—	4.—	636,8	286,1	34,2	55,9	2,8	49	—	8.30	629,3	280,4	42,0	56,2	2,1
15	—	4.30	637,0	285,9	34,2	55,9	2,8	50	—	9.—	629,3	282,9	40,7	55,8	2,2
16	16. Nm	5.—	636,9	285,5	33,4	56,0	+ 2,9	51	20. Vm	9.30	629,2	284,5	41,1	55,6	+ 2,1
17	—	5.30	637,0	285,8	34,6	55,9	2,8	52	—	10.—	629,2	283,2	39,4	55,8	2,3
18	—	6.—	637,0	285,2	37,3	56,0	2,6	53	—	10.30	629,2	282.9	37,0	55,8	2,5
19	—	6.30	636,8	284,8	35,2	56,1	2,7	54	—	11.—	629,2	283,1	37,3	55,8	2.5
20	17. Vm	7.—	635,2	281,9	41,6	56,4	2,1	55	—	11.30	629,0	284,9	37,7	55,5	2,5
21	17. Vm	7.30	635,2	282.5	35,5	56,3	+ 2,7	56	20. Nm	12.—	628,9	285,1	36,8	55,5	+ 2,5
22	—	8.—	635,0	282,9	44,6	56,2	1,8	57	—	1.—	628,8	283,6	36,8	55,7	2.5
23	—	8.30	635,0	283,3	36,5	56,2	2,6	58	—	1.30	628,9	283,8	40,3	55,7	2,2
24	—	9.—	634,9	283,0	41,0	56,2	2,2	59	—	2.—	628,9	281,8	35,8	56,0	2,7
25	—	9.30	635,0	283,1	39,4	56,2	2,3	60	—	2.30	629,0	281,7	35,2	56,0	2,7
26	17. Vm	10.—	634 8	283,4	38,9	56,1	+ 2,4	61	20. Nm	3.—	629,1	283,1	36,3	55,8	+ 2,6
27	—	10.30	634,6	283,3	36,9	56,1	2,6	62	—	3.30	628,8	282,6	35,7	55,8	2,7
28	—	11.—	634,9	283,3	36,9	56,2	2,6	63	—	4.—	628,8	283,3	35,3	55,7	2,7
29	—	11.30	634,7	283,1	36,6	56,2	2,6	64	—	4.30	629,0	283,3	36,6	55,7	2,6
30	—	12.—	634,7	283,6	36,3	56,1	2,6	65	—	5.—	628,8	282,6	36,4	55,8	2.6
31	17. Nm	1.—	634,6	284,5	33,5	55,9	+ 2,9	66	20. Nm	5.30	629,0	281,1	36,0	56,1	+ 2,7
32	—	1.30	634,6	285,0	32,9	55,9	3,0	67	—	6.—	628,9	282,0	37,4	55,9	2,5
33	—	2.—	634,5	285,3	32,8	55,8	3,0								
34	—	2.30	634,6	285.2	33,1	55,8	3,0								
35	—	3.—	634,3	286,4	32,7	55,6	2,9								

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der auf Kampenwand beobachteten Refraktionen.

Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½
1	41,6	35,5	44,6	36,5	39,2	38,8	39,5	36,1	35,7	35,8	36,5	35,2	33,7	32,8	34,0	34,8	39,7	34,2	34,2	33,4	34,6	37,3	35,2
2	41,0	43,5	42,3	42,0	41,0	39,4	38,9	36,9	36,9	36,6	36,3	33,5	32,9	32,8	33,1	32,7	33,9	33,6	33,5	31,1	33,4	34,0	
3					40,7	41,1	39,4	37,0	37,3	37,7	36,8	36,8	35,5	35,8	35,2	36,3	35,7	36,4	35,8	38,2	36,0	37,4	
4													40,3					35,3	36,6	36,4			
Mittel	41,3	39,5	43,5	39,2	40,3	39,8	39,3	36,7	36,6	36,7	36,6	35,2	35,6	33,8	34,1	34,6	36,4	34,9	35,0	34,8	34,7	36,2	35,2
Anzahl	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	1
Komb. Mittel	41,3	40,9	41,4	40,6	39,9	39,8	38,7	37,3	36,7	36,6	36,2	35,6	35,1	34,3	34,1	34,9	35,6	35,3	34,9	34,8	35,1	35,6	35,2

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Kampenwand aus Kampenwand-Höhensteig.

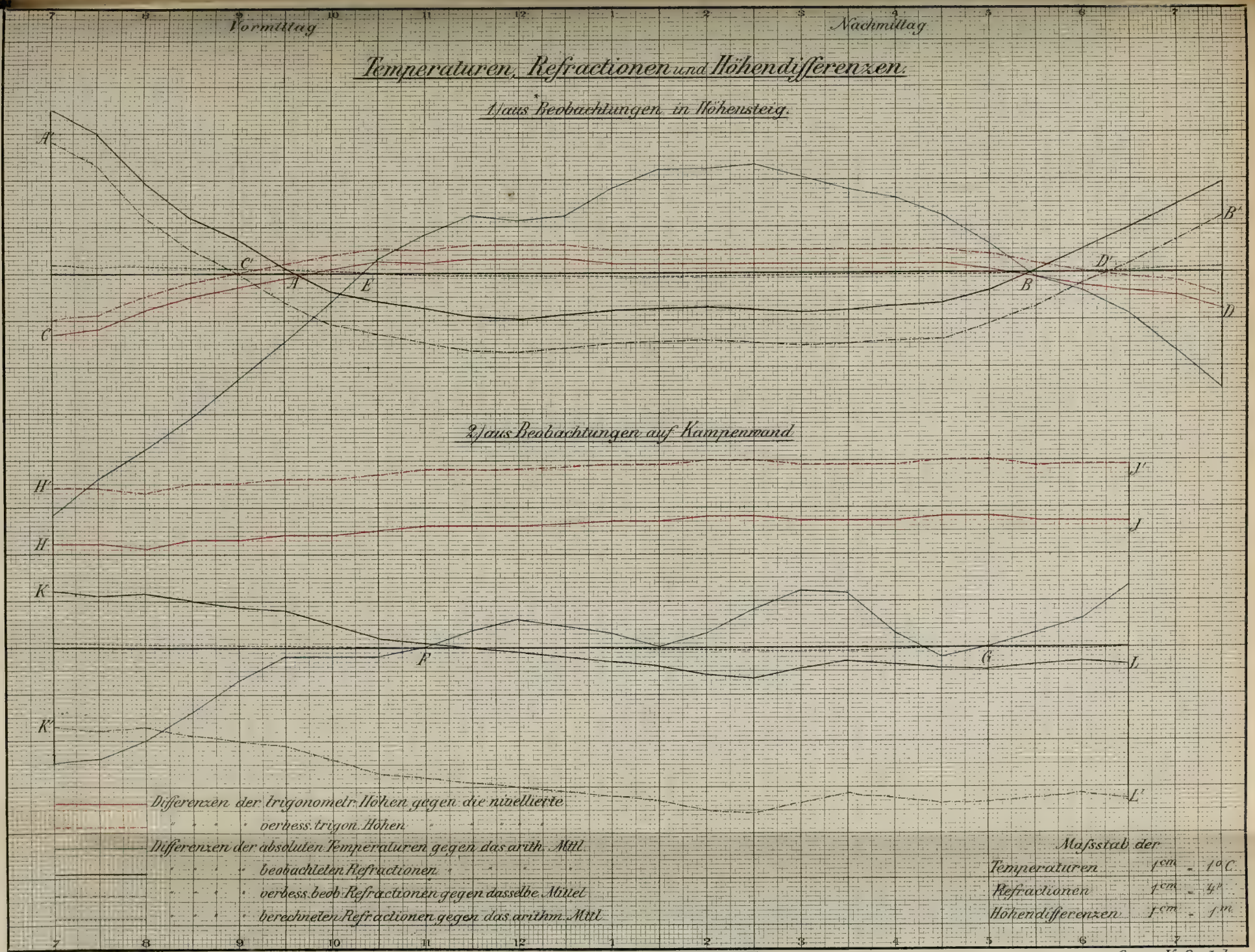
Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½
1	56,4	56,3	56,2	56,2	56,4	56,4	56,3	56,4	56,2	56,2	56,2	56,2	56,2	56,0	56,0	56,0	55,9	55,9	55,9	56,0	55,9	56,0	56,1
2	56,3	56,4	56,3	56,2	56,2	56,2	56,1	56,1	56,2	56,2	56,1	55,9	55,9	55,8	55,8	55,6	55,6	55,6	55,6	55,6	55,7	56,1	
3					55,8	55,6	55,8	55,8	55,8	55,5	55,5	55,7	56,6	56,0	56,0	55,8	55,8	56,7	56,7	56,7	56,1	55,9	
4													55,7					55,7	55,7	55,8			
Mittel	56,3	56,4	56,3	56,2	56,1	56,1	56,1	56,1	56,1	56,0	55,9	55,9	56,1	55,9	55,9	55,8	55,8	56,0	56,0	56,0	55,9	56,0	56,1
Anzahl	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	1
Komb. Mittel	56,3	56,3	56,3	56,2	56,1	56,1	56,1	56,1	56,0	56,0	55,9	56,0	56,0	56,0	55,9	55,8	55,8	55,9	56,0	56,0	56,0	56,0	56,1

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Kampenwand-Höhensteig.

Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½
1	+2,1	+2,7	+1,8	+2,6	+2,6	+2,4	+2,3	+2,6	+2,7	+2,7	+2,6	+2,8	+2,9	+3,0	+2,8	+2,8	+2,3	+2,8	+2,8	+2,9	+2,8	+2,6	+2,7
2	2,2	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,6	2,6	2,6	2,9	3,0	3,0	3,0	2,9	2,8	2,9	2,9	3,1	2,9	2,8	
3					2,2	2,1	2,3	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,8	2,7	2,7	2,6	2,7	2,7	2,8	2,5	2,7	2,5	
4													2,2					2,7	2,6	2,6			
Mittel	+2,2	+2,3	+1,9	+2,4	+2,3	+2,3	+2,3	+2,6	+2,6	+2,6	+2,6	+2,7	+2,7	+2,9	+2,8	+2,8	+2,6	+2,8	+2,8	+2,8	+2,8	+2,6	+2,7
Anzahl	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	1
K.Mittel	+2,2	+2,2	+2,1	+2,2	+2,3	+2,3	+2,4	+2,5	+2,6	+2,6	+2,6	+2,7	+2,7	+2,8	+2,8	+2,7	+2,7	+2,7	+2,8	+2,8	+2,7	+2,7	+2,7

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der auf Kampenwand beobachteten absoluten Lufttemperaturen.

Anzahl	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½	12	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½
1	281,9	282.5	282,9	283,3	282,8	282,5	283,6	283,1	284,0	284,0	283,8	284,2	284,1	285,2	285,5	285,3	285,7	286,1	285,9	285,5	285,8	285,2	284,8
2	280,0	279,3	280,1	280,1	283,0	283,1	283,4	283,3	283,3	283,1	283,6	284,5	285,0	285,3	285,2	286,4	286,7	286,6	286,6	286,6	286.1	283,6	
3					282,9	284,5	283,2	282,9	283,1	284,9	285,1	283,6	278,3	281,8	281,7	283,1	282,6	277,3	277,6	277,7	281,1	282,0	
4													283,8					283,3	283,3	282,6			
Mittel	281,0	280,9	281,5	281,9	282,9	283,4	283,4	283,1	283,5	284,0	284,2	284,1	282,8	284,1	284,1	284,9	285,0	283,3	283,4	283,1	284,3	283,6	284,8
Anzahl	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	1
K.Mittel	281,0	281,1	281,5	282,1	282,8	283,3	283,3	283,3	283,5	283,9	284,1	283,8	283,5	283,8	284,3	284,7	284,6	283,8	283,3	283,5	283,8	284,1	284,8


Vormittag
Nachmittag
Temperaturen, Refractionen und Höhendifferenzen.
1/ aus Beobachtungen in Höhensteig.
A
C
A
E
B
B'
D'
D
C
2/ aus Beobachtungen auf Kampenwand
H'
H
J'
J
K
F
G
L
K'
L'
Differenzen der trigonometr. Höhen gegen die nivellierte
" " " verbess. trigon. Höhen " " "
Differenzen der absoluten Temperaturen gegen das arith. Mttl.
" " " beobachteten Refractionen " " "
" " " verbess. beob. Refractionen gegen dasselbe Mittel
" " " berechneten Refractionen gegen das arithm. Mttl.
Maßstab der
Temperaturen 1cm = 1°C.
Refractionen 1cm = 4"
Höhendifferenzen 1cm = 1m.

BRITISH MUSEUM

Ueber die

Grundlagen der Bestimmungsmethode

des

longitudinalen Elastizitätsmoduls.

Von

Andreas Miller.

§ 1. Einleitung.

Die Abweichungen, welche in den Zahlenwerten des longitudinalen Elastizitätsmoduls (E—M) sich nicht nur bei verschiedenen Individuen derselben Substanz, sondern selbst bei dem nämlichen Versuchsobjekt zuweilen ergeben, dürften eine Prüfung der Grundlagen der Bestimmungsmethode dieses Moduls nicht nur rechtfertigen, sondern sie in Anbetracht der hervorragenden Bedeutung und Wichtigkeit, welche der Modul auch in der theoretischen Physik erlangt hat, sogar geboten erscheinen lassen.

Arbeiten, die ich über die Dehnungselastizität von Metalldrähten und fadenförmigen organischen Materien früher ausgeführt habe, brachten mich zu der Ueberzeugung, dass das in den physikalischen Handbüchern beschriebene Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M nicht dazu geeignet ist, Werte desselben zu liefern, die seiner Definition entsprechen. Selbst bei wiederholten Versuchen an dem gleichen Individuum und unter sonst gleichen Umständen zeigen sich für den Dehnungsmodul der Elastizität Abweichungen in dessen Zahlenwerten von solchem Betrage, dass man Bedenken haben kann, ob das übliche Verfahren zur Bestimmung dieses Moduls auf sicherer Grundlage beruht. Diese Erscheinungen treten um so mehr hervor, je verfeinerter die Mittel sind, deren man sich zur Messung bedient. Auch die Tabellen der anerkannt höchst schätzbaren Untersuchungen von G. Wertheim [1]) über die Elastizität liefern in erklecklicher Anzahl Beispiele zu dem Gesagten. Gleichwohl finden heute noch die Angaben von Wertheim über den Wert des Dehnungsmoduls selbst in theoretischen Problemen ausschliesslich Ver-

1) Wertheim, Annalen d. Physik u. Chemie. Ergänzungsbd. II. 1848.

wendung. Vielleicht liefert vorliegende Untersuchung genügende Anhaltspunkte, ein Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M anzubahnen, wodurch die elastische Reaktion der Körper mit jener Exaktheit gemessen werden könnte, die anzustreben der heutige Stand der theoretischen Physik wohl erfordern dürfte.

§ 2. Voraussetzungen bei dem üblichen Verfahren.

Dem üblichen Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M liegen u. a. auch folgende Annahmen zu grunde:

1) es diene die ständige oder Anfangsbelastung nur zum Geradehalten des Drahtes und sei von keinem Einflusse auf die Grösse der elastischen Reaktion der durch die Dehnung erregten inneren Kräfte; d. i. der E—M sei unabhängig von der anfänglichen Spannung des Körpers;

2) es setzt voraus, das elastische Verhalten einer Substanz entspreche bei konstanter Temperatur genau dem Proportionalitätsgesetze;

3) nimmt es keine Rücksicht auf die Aenderungen, welche die Elastizität während der Dehnung des Körpers erfährt.

Die Voraussetzungen, deren in Ziffer 1) und 2) gedacht ist, treffen nicht zu. Was den ersten Punkt anlangt, so habe ich dies schon in einer früheren Abhandlung [1]) bewiesen und er soll hier in quantitativer Hinsicht noch genauer studiert werden. Der zweite Punkt soll hier seine, wenigstens teilweise Erledigung finden. Anlangend den dritten Punkt, so wird allerdings in den Handbüchern die Vorschrift gegeben, dass man sich nach jeder Entlastung des Körpers zu überzeugen habe, ob der gedehnte Stab oder Draht seine frühere Länge wieder annehme. Allein letzteres trifft selbst für ganz geringe Dehnungen erst nach verhältnissmässig langer Zeit — Stunden, Tagen, Wochen — wieder ein, ein Umstand, der bei Anwendung nicht hinlänglich feiner Messvorrichtungen freilich entgehen kann. Ueberdies ist eine sichere Kontrolle hierüber wegen der Wirkung selbst kleiner Temperaturänderungen ziemlich schwierig.

1) A. Miller, Sitzungsbericht der math.-physikal. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften. 1885. Heft 1.

NB. (1885. Heft 1.) soll in Zukunft dieses Zitat ersetzen.

§ 3. Vollkommene Elastizität.

Ein vollkommen elastischer Körper ist ein solcher, welcher, wenn er in irgend einen Deformationszustand gebracht ist, zu allen Zeiten denselben Zwang [1]) erfordert, um in diesem Zustande zu bleiben, wie lange er auch deformiert geblieben sein mag, oder wie schnell er auch aus einem Zustande anderer Deformation oder aus seinem undeformierten Zustande in den betrachteten Zustand versetzt sein mag.

Der longitudinale E—M eines vollkommen elastischen Körpers ist somit eine von der Zeit unabhängige Funktion der Grösse der Gestaltsänderung und der deformierenden Kraft. Wenn somit auch der gedehnte Körper nach Verlauf einer gewissen Zeit seine frühere Gestalt wieder vollkommen annimmt, so entspricht das übliche Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M doch nicht der ihm zu grunde liegenden Definition. Um dieser zu genügen, darf bei der Messung der Dehnung nur jener Teil derselben in Rechnung genommen werden, welcher der zunehmenden Belastung augenblicklich folgt, und der mit ihrer sofortigen Abnahme auch unverzüglich wieder verschwindet.

§ 4. Ueberführung eines Drahtes in den vollkommen elastischen Zustand.

Versuche, die ich [2]) vor mehreren Jahren mit Eisendrähten anstellte, haben gezeigt, dass man durch etwa 5 malige ununterbrochene An- und Abspannung eines Körpers diesen in einen Zustand versetzen kann, in dem er sich vorübergehend wie ein vollkommen elastischer Körper verhält; d. h. der Draht nimmt nach etwa der 4. und jeder folgenden Entlastung sofort jene Länge wieder vollkommen an, die er vor der vorhergehenden Belastung besass. Dies hat sich auch bei allen anderen Metallen, Legierungen und organischen Substanzen herausgestellt, auf welche ich später die Untersuchung ausdehnte (1885. Heft 1.).

1) Thomson u. Tait, Handbuch der theoretischen Physik. II. Teil. S. 193. § 658.

2) A. Miller, Sitzungsbericht der math.-physik. Klasse d. k. b. Akademie der Wissenschaften. 1882. Heft 4.

NB. (1882. Heft 4.) soll in Zukunft dieses Zitat ersetzen.

§ 5. Der Apparat.

Der Apparat, den ich zu den im vorigen Paragraphen erwähnten Versuchen angewendet habe, und mit welchem ich auch die dieser Abhandlung zu grunde liegenden Messungen ausführte, ist in den Aufsätzen (1882. Heft 4.) und (1885. Heft 1.) genau beschrieben und gezeichnet. Eine nähere Beschreibung desselben kann ich daher hier füglich unterlassen und mich auf kurze Andeutungen beschränken. (Siehe Fig. im Anhange.)

Er besteht aus einem ungleicharmigen eisernen Hebel (Schnellwage), der auf indifferentes Gleichgewicht gestellt werden konnte und es auch bei allen Versuchen war. Der Hebel war bei jedem Versuch in einem Punkte ständig belastet und konnte durch Drehung einer vertikalen Schraubenspindel, auf welcher ein Tischchen befestigt war, ohne Stösse auch mit einer Mehrbelastung versehen werden. An drei Thermometern konnte die Temperatur des untersuchten Drahtes und des Apparates, dessen Dimensionen gegen den Querschnitt des ersteren sehr gross waren, mit hinlänglicher Genauigkeit gemessen werden. Die Ablesevorrichtung bestand in einem Spiegel mit Skala, die ca. 0,001 mm der wirklichen Längenveränderung des Drahtes mit ziemlicher Sicherheit zu beobachten gestattete. Ein Kathetometer hätte die hier nötige Genauigkeit der Messung nicht zugelassen. Der Nullpunkt der Skala lag mit der Fernrohrachse in einer horizontalen Ebene. Der zu prüfende Draht ging bei diesen Versuchen durch eine ca. 1 cm weite Glasröhre, um vor plötzlichen Temperaturänderungen geschützt zu sein. In diese Glasröhre ragte das Gefäss eines der drei oben erwähnten Thermometer. Um jede seitliche Spannung des Drahtes, die erhebliche Fehler verursachen könnte, zu vermeiden, war die Röhre oben und unten nur mit Wolle, durch die der Draht lose ging, geschlossen.

§ 6. Beobachtungsweise.

Diese war die gleiche, wie sie bei den in (1885. Heft 1.) ausgeführten Versuchen, sowie in einer anderen derartigen Arbeit[1]) von mir eingehalten worden ist. Nachdem der Draht bleibend gestreckt worden

1) A. Miller, Abhandlungen der k. b. Akademie der Wissenschaften II. Cl. XV. Bd. III. Abteil. NB. (II. Cl. XV. Bd. III. Abteil.) soll dieses Zitat künftig ersetzen.

war und die ständige Belastung noch einige Zeit gewirkt hatte, wurden die eigentlichen Versuche in der Art angestellt, dass zuerst die drei Thermometer, dann die Spiegelskala abgelesen wurde. Hierauf begann die weitere Belastung des Hebelarmes, indem der Gehilfe das Tischchen mittelst der Schraube langsam und gleichmässig in Bewegung setzte. Sobald die Mehrbelastung voll wirkte, wurde sofort wieder die Skala abgelesen, das Tischchen dann unverzüglich ebenso langsam und gleichmässig hinaufgeschraubt, und wenn das Gewicht den Hebelarm nicht mehr berührte, sofort die Skala wiederum abgelesen. Damit war eine „Beobachtungsreihe" beendet. Solche Beobachtungsreihen folgten mit denselben Ablesungen 5 unmittelbar aufeinander und bildeten eine „Versuchsgruppe". Die beobachteten Zahlen sowohl, als die hieraus berechneten, sind in den am Schlusse der Abhandlung angefügten Tabellen angegeben. Ich habe diese aus dem Texte ausgeschieden, um ihn nicht mit allzu viel Einzelnheiten zu stören. Aber, obschon es sich im allgemeinen nicht empfiehlt, zu viel Beobachtungsmaterial mitzuteilen, glaubte ich doch, diese Beigabe nicht unterlassen zu sollen, nicht allein um eine Kontrolle zu ermöglichen, sondern auch weil ich meine, es könnte vielleicht dieses Material noch anderweitig ausgenützt werden. Die meisten im Texte vorkommenden Uebersichten oder Zusammenstellungen sind diesen Tabellen entnommen.

§ 7. Einrichtung der Tabellen.

Die sämtlichen Versuche wurden an einem Drahtindividuum von Kupfer ausgeführt. Ich habe diese Substanz gewählt, weil mir aus meinen früheren Arbeiten die besondere Brauchbarkeit des Kupfers für den vorbezeichneten Zweck bekannt war. Auch stand mir fast chemisch reines Kupfers — 99,88% — zu gebote. Die einzelnen Versuchsgruppen folgten in der Reihenfolge, wie solche durch römische Ziffern bezeichnet ist. Jeder Gruppe ist das Datum beigefügt. Es wurden an einem Tage mehrere Gruppen, und zwar so ausgeführt, dass vom Ende der einen bis zum Beginn der nächsten 5 Minuten verstrichen. Das Nähere ist aus den Tabellen zu entnehmen. In den Gruppen der Tabelle B war für denselben Tag die ständige Belastung (π_1) konstant und die Mehr-

belastung (π_2) variierte von Gruppe zu Gruppe. Das Umgekehrte ist in Tabelle C der Fall. Zwischen dem Ende der Versuche an einem Tage und dem Beginne derselben am nächsten verstrichen 18 und 24 Stunden. Die ständige Belastung für die erste Versuchsgruppe des nächsten Tages wurde schon am Ende der Versuche tags vorher mit der grössten Behutsamkeit (ohne Stösse) angebracht. Den Versuchen in Tabelle B und C gingen jene in Tabelle A, an zwei aufeinanderfolgenden Tagen angestellt, voraus. Die Gruppen I der Tabelle A wurden nach dem gewöhnlichen Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M ausgeführt, wobei die Mehrbelastung (π_2) in der einen Gruppe 5 Minuten, in der anderen 15 Minuten wirkte; ebenso wurde wieder 5 beziehungsweise 15 Minuten nach der Entlastung erst abgelesen. Die beiden anderen Gruppen II wurden nach dem Verfahren, wie ich es zur Bestimmung des primären und sekundären E—M (II. Cl. XV. Bd. III. Abteil. § 14) angegeben habe, ausgeführt.

Die Bedeutung der Zeichen in den Tabellen ist folgende:

1) L die Länge des Drahtes zwischen den Klemmen in Metern;

2) d der Durchmesser und

3) F der Querschnitt des Drahtes in mm.

4) T_0, T_1 und τ_0, τ_1 bezeichnen Temperaturen (C^0) der Apparatteile, und zwar die ersten des unteren, die zweiten des oberen Teiles. t_0 und t_1 sind Temperaturen (C^0) des Drahtes. Durch Vorversuche war festgestellt worden, dass die Temperaturangabe des in der Mitte der Röhre angebrachten Thermometers als die mittlere Temperatur des Drahtes — bis mindestens $0{,}1^0$ C genau — genommen werden durfte. Die mit dem Index 0 versehenen Temperaturangaben waren bei Beginn der Versuchsgruppe, die mit 1 versehenen am Schluss derselben abgelesen.

5) a_ν die Skalenablesung am Anfange der Gruppe, b_ν bei voller Wirkung der Mehrbelastung, c_ν jene nach jeder Entlastung. Die Ablesung geschah, wie erwähnt, sofort nach Eintritt jeder vollen Wirkung der Be- oder Entlastung. 1 Skalenteil = 2 mm.

6) π_1 bezeichnet die ständige Belastung und π_2 die Mehrbelastung auf das Quadratmillimeter des Querschnittes des Drahtes in Kilogrammen.

7) λ_1 ist die aus den letzten 2 Versuchsreihen jeder Gruppe sich ergebende mittlere Beobachtung der nahezu gleichen Verlängerungen und

Verkürzungen des Drahtes in Skalenteilen, bezogen auf die Drahtlänge L zwischen den Klemmen.

8) l_1 die Längenzunahme, welche der Draht bei derselben ständigen Belastung π_1 nach den einzelnen Versuchsgruppen zeigt, in Skalenteilen angegeben und ebenfalls auf die ganze Drahtlänge L bezogen. Diese Grösse ist eine Funktion der Zeit; ich werde sie nach dem Vorgange von Weber und Herrn Kohlrausch mit „elastische Nachwirkung" (E—N) bezeichnen.

9) Die letzte Kolumne enthält das Datum des Tages, an dem die Versuchsgruppe ausgeführt worden ist.

10) Die Zeit, welche eine Versuchsgruppe in Anspruch nahm, ist in den Tabellen nicht angegeben, obwohl sie jedesmal beobachtet worden ist. Sie war bei den verschiedenen aufsteigenden Mehrbelastungen π_2 jedesmal ungefähr bezw. 4, 5, 6 Minuten. Indes habe ich früher an Eisen Versuche mit stark differierenden Geschwindigkeiten in der Belastung und Entlastung vorgenommen, aber einen entschiedenen Einfluss dieser Differenz auf die Werte λ_1 nicht konstatieren können. Nichts destoweniger wurde bei den eben vorliegenden Versuchen die grösste Gleichmässigkeit in den Bewegungen bei dem Be- und Entlasten angestrebt und von meinem Gehilfen infolge seiner häufigen Uebung auch erreicht.

§ 8. Reduktionsformeln.

Die Werte λ_1 in den Tabellen geben, wie oben erwähnt, die mittlere Dehnung bei der 4. und 5. An- und Abspannung des Drahtes an und berechnen sich für die Dehnung der ganzen Drahtlänge L nach der Formel:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left[(b_4 + b_5) - c_4 - \frac{c_3 + c_5}{2}\right] \qquad 1)$$

Dabei ist der Einfluss der Temperaturänderungen während der Beobachtung auf die Drahtlänge schon eliminiert (1882. Heft 4. § 21.), vorausgesetzt dass, was bei den vorliegenden Versuchen immer zutrifft, die Temperatur während einer Versuchsgruppe sich nur in einem Sinne ändert. Hiernach berechnet sich der mittlere Wert λ_1 aus 5 beobachteten Werten, so dass der 2. Dezimale desselben noch einige Bedeutung beigelegt werden darf. Die während einer Versuchsgruppe entstandene Längenveränderung l_1, (E—N) des Drahtes ist nach Formel 2), (1885.

Heft 1. § 15.) auf die Temperatur (t_0, T_0, τ_0) am Beginne der Versuchsgruppe zu reduzieren. Für unseren Kupferdraht von der Länge L = 1,1 m = 550 Skalenteile und dessen gefundenen thermischen Ausdehnungskoëffizienten $\alpha = 0{,}000016$ ist:

$$l_1 = (c_5 - a_1) - 1{,}406(t_1 - t_0) - 0{,}3(T_1 - T_0) - 0{,}5(\tau_1 - \tau_0) + \frac{0{,}07}{2} \cdot (\tau_1 - \tau_0) \quad 2)$$

§ 9. Berechnung der wirklichen Längenveränderungen des Drahtes.

Für eine allgemeine Beurteilung der hier in Frage kommenden Beziehungen zwischen den Elementen der Erscheinung würden die Angaben der Skalenbeobachtungen genügen, wie in (1885. Heft 1.). Da hier aber zunächst Verhältnisse quantitativ festzustellen sind, so erscheint es notwendig, die wirklichen Dehnungen und Zusammenziehungen des zu untersuchenden Drahtes thunlichst genau zu berechnen, weil sie den Skalendifferenzen nicht genau proportional sind. Ich habe mich deshalb mit der in meinen früheren Arbeiten hiezu verwendeten Formel nicht begnügt, sondern, da die äusserste Genauigkeit geboten, eine noch grössere Annäherung an den wahren Wert der Dehnung zu erzielen gesucht. Die Ableitung der neuen Formel (3) ist in der als Anhang nachfolgenden Theorie des Apparates enthalten. Ist z das Stück des Hebels von dessen Stützpunkt bis zu jenen Punkt, in welchem die elastische Zugkraft des untersuchten Drahtes ihn angreift, L_1 die Entfernung dieses Punktes bis zum unteren Befestigungspunkt des Drahtes, h die Entfernung der Skala vom Spiegel, endlich n_1 der v o r und n der n a c h der Dehnung a b g e l e s e n e Skalenteil, so ist die w i r k l i c h e Längenänderung λ_t des Drahtes von der Länge L bei t^0 C, alle Grössen in Skalenteilen gemessen:

$$\lambda_t = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2} z \left\{ \left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3 \right] - \frac{z}{L_1} \left[\left(\frac{n}{2h}\right)^4 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^4 \right] \right\} \quad 3)$$

Da für unseren Apparat:
z = 35,4; h = 2806; L_1 = 705 Skalenteile, so ergibt sich zur Berechnung der wirklichen Längenänderung λ_t und l_t der Ausdruck:

$$= 63079 \cdot 10^{-7}(n - n_1) - 30042 \cdot 10^{-14}(n^3 - n_1^3) + 26880 \cdot 10^{-17}(n^4 - n_1^4) \quad 4)$$

Nur im ersten Glied ist bei den Berechnungen die Berücksichtigung von 5 Stellen des Koëffizienten nötig.

§ 10. Einflüsse auf die Messung der Dehnung und Verkürzung.

Bei der hier erforderlichen Genauigkeit der Messung dürfen aber auch die Einflüsse untergeordneter Art auf dieselbe nicht ausser acht gelassen werden. Sie sind nun entweder zufällige, welche von der jeweiligen Temperatur des Drahtes resp. der ihn umgebenden Luft herrühren, oder solche, die jede Dehnung naturgemäss begleiten. Der erstere dieser Einflüsse äussert sich in einer Veränderung der elastischen Dehnung λ_t und der E—N $\cdot$ l_t des Drahtes sowohl, als auch durch Veränderung seines Querschnittes.

Die Einflüsse, welche jede Dehnung und Verkürzung des Drahtes naturgemäss begleiten und die Grösse derselben verändern müssen, sind die Querkontraktion des Drahtes und die durch die Dehnung und Verkürzung in diesem selbst bewirkte Temperaturveränderung. Es wird sich zeigen, dass diese beiden Einflüsse für die hier hervorgerufenen Dehnungen zu geringfügig ausfallen, um gegenüber den Grenzen der Beobachtungsfehler in Betracht zu kommen. Aber abgesehen hievon, erscheint es sehr fraglich, ob es angezeigt ist, sie in Rechnung zu nehmen, wenn es sich um die Bestimmung des longitudinalen E—M handelt. Beide Einflüsse verändern die Dichtigkeit des Körpers und nach Wertheim damit auch die Elastizität in einer nicht näher bekannten Weise, so dass es geraten erscheinen möchte, sie vorerst schlechterdings als in den jeweiligen elastischen Zustand des Drahtes inbegriffen anzusehen.

§ 11. Der primäre und sekundäre Elastizitätsmodul.

Es seien L_t, F_t Länge und Querschnitt des zu prüfenden Drahtes bei der während des Versuches stattfindenden Temperatur t (in den Tabellen t_1) desselben. Z_1 sei der Zug, welcher von der ständigen Belastung π_1 im Querschnitte F_t bewirkt wird, und l_t' die vor der Versuchsgruppe von ihm hervorgebrachte Dehnung. Der E—M in diesem Zustande sei E_t; ich nenne ihn wie früher (II. Cl. XV. Bd. III. Abteil. § 1.) den primären E—M. Ferner ist unter der successiven Vermehrung und Verminderung des Zuges um den Betrag Z_2 während der 4. und 5. Dehnung und Zusammenziehung des Drahtes das Mittel dieser Verlängerungen und Verkürzungen λ_t. Der E—M, welcher diesem Zu-

stande des Drahtes entspricht sei E_t'; ich nenne ihn, wie in der vorhin erwähnten Abhandlung den sekundären E—M. Endlich zeige sich nach der 5. Abspannung unter dem ständigen Zuge Z_1 eine Längenveränderung des Drahtes vom Betrage l_t, die nach mehr oder minder langer Zeit wieder verschwindet; diesen vorübergehenden Längenzuwachs habe ich bereits als elastische Nachwirkung bezeichnet.

Darnach bestehen für diese drei Zustände des Drahtes folgende Beziehungen:

$$\frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_1}{F_t} = l_t' \qquad \text{I.}$$

$$\frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_2}{F_t} = \lambda_t \qquad \text{II.}$$

$$\frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_1}{F_t} = l_t' + l_t \qquad \text{III.}$$

Eliminiert man aus I und III, da es nicht beobachtbar, l_t', so ergibt sich:

$$\frac{L_t \cdot Z_1}{F_t} \cdot \left(\frac{1}{E_t'} - \frac{1}{E_t}\right) = l_t \qquad \text{IV.}$$

Beziehen sich die Indices 0 auf die Temperatur 0^0 und bezeichnet α den linearen, thermischen Ausdehnungskoëffizienten, γ aber die thermische Konstante des sekundären E—M, wie ich sie früher schon (II. Cl. XV. Bd. III. Abt. § 40.) genannt und dort auch ihrem Werte nach festgestellt habe, so ergibt sich aus IV:

$$\frac{L_0 Z_1}{F_0}\left(\frac{1}{E_0'} - \frac{1}{E_0}\right) \cdot \frac{1}{1-\gamma t} \cdot \frac{1+\alpha t}{1+2\alpha t} = l_t \text{ oder}$$

$$\frac{1}{E_0'} - \frac{1}{E_0} = l_t \cdot (1-\gamma t) \cdot \frac{1+2\alpha t}{1+\alpha t} \cdot \frac{F_0}{L_0 Z_1}.$$

Wird ein für allemal L_0 und F_0 bei 0^0 gemessen, und setzt man $\frac{Z_1}{F_0} = \pi_1$, so ergibt sich mit Zulassung von Annäherungen bei nicht zu hohen Werten von t (bei unseren Versuchen stets unter 10^0 C.).

$$\frac{1}{E_0'} - \frac{1}{E_0} = \frac{l_t}{L_0 \pi_1}[1-(\gamma-\alpha)t] = l_0 \qquad 5)$$

In gleicher Weise erhalten wir aus II, wenn $\frac{Z_2}{F_0} = \pi_2$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{E_0'} = \frac{\lambda_t}{L_0 \pi_2}[1 - (\gamma - \alpha)t] = \lambda_0 \qquad 6)$$

Es beziehen sich also λ_0 und l_0 auf $L_0 = 1$ Meter, dann $\pi_1 = \pi_2 = 1$ kg. Wir wollen nun den Wert $\frac{1}{E_t'} = \lambda_t$ den obigen Bezeichnungen analog sekundären, $\frac{1}{E_t} = \delta_t$ primären Elastizitätskoëffizienten (E—K) nennen.

Wird 5) und 6) kombiniert, so erhält man

$$\frac{1}{E_0} = \lambda_0 - l_0 = \delta_0 \qquad 7)$$

$$E_0 = \frac{1}{\lambda_0 - l_0} = \frac{1}{\delta_0} \qquad 8)$$

Man hat also zuerst nach Formel 4) die Werte von λ_t und l_t aus den Skalenablesungen und den Werten λ_1 und l_1 der angefügten Tabellen zu berechnen. Aus 6) lässt sich dann der sekundäre E—M ableiten. Berechnet man aus 5) den Wert l_0, so ergibt sich aus 7) δ_0 und dann liefert 8) den primären E—M. Diese Berechnungen wurden für die E—K durchgeführt und die Werte von λ_0, l_0 und δ_0 in kommenden Uebersichten passend zusammengestellt. Von der Berechnung der E—M selbst wurde, weil hier zwecklos, abgesehen.

§ 12. Anordnung der Versuchsgruppen.

Bevor ich auf eine nähere Betrachtung der Uebersichten eingehe, ist die Anordnung der Versuche noch darzulegen.

Nachdem der Draht durch Anwendung einer Belastung, die beträchtlich grösser als die bei den späteren, eigentlichen Versuchen zur Verwendung kommende höchste Belastungssumme $\pi_1 + \pi_2$, bleibend gestreckt worden war, und nachher wieder einige Tage bei der kleinsten ständigen Belastung $\pi_1 = 1{,}6234$ kg pro qmm geruht hatte, ging ich zu den beabsichtigten Versuchen über. Das in den Tabellen angegebene Datum lässt erkennen, wie viele Versuchsgruppen an jedem der unmittelbar aufeinanderfolgenden Versuchstage ausgeführt worden sind.

Die Versuchsgruppen Nr. I in Tabelle A sollen zeigen, welche Verlängerung $+\lambda$ und Verkürzung $-\lambda$ sich ergibt, wenn man die Mehrbelastung π_2 während 5 bezw. 15 Minuten wirken lässt, und 5 Minuten bezw. 15 Minuten nach Aufhebung derselben wieder abliest. Wie man sieht, fallen die Differenzen der Werte $+\lambda$, sowie jener $-\lambda$, nämlich 0,25 bezw. 0,15 Skalenteile, schon nicht mehr entschieden innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Das ist indes nicht die Hauptsache. Vielmehr ist wichtig, dass die Verkürzungen $-\lambda$ ganz erheblich hinter den Verlängerungen $+\lambda$ zurückbleiben. Der Draht nimmt also 5 Minuten bezw. 15 Minuten nach seiner Entlastung die frühere Länge nicht wieder an.

Bei den Versuchsgruppen Nr. II hingegen, in denen der Draht in den vorübergehend vollkommen elastischen Zustand übergeführt worden war, zeigt sich schon in den Zahlen λ eine grössere Uebereinstimmung. Reduziert man aber diese Werte λ nach Formel 6) auf die Temperatur 0^0 etc. so erhält man $\lambda_0 = 0{,}07639$ und $\lambda_0 = 0{,}07646$ mm, deren Differenz nur 0,00007 mm beträgt, so dass diese Werte als vollkommen übereinstimmend erachtet werden können, obschon zwischen diesen Versuchsgruppen eine jener Nr. I liegt.

Die in den Versuchsgruppen Nr. I Tabelle A angewandte und allgemein übliche Methode zur Bestimmung des longitudinalen E—M erweist sich also nicht geeignet zur Erreichung einer Genauigkeit, welche der heutige Stand der Physik erfordert; sie entspricht überdies schon deshalb nicht vollkommen den zu stellenden Anforderungen, weil der E—M darnach eine Funktion auch der Zeit wäre. Beiden Umständen wäre Rechnung getragen, sobald man den sekundären E—M, wie in den Gruppen Nr. II Tabelle A, bestimmt, ein Verfahren, das ich schon in (1885. Heft 1. X. § 46.) angewendet habe.

Allein so einfach ist die Sache trotz alledem nicht; denn es hat sich bei der eben zitierten Arbeit mit aller Bestimmtheit herausgestellt, dass die elastische Reaktion eines Drahtes resp. dessen sekundärer E—M auch von der beständigen Belastung π_1 d. i. von seinem ursprünglichen Spannungszustande abhängt. Ob bei dem üblichen Verfahren zur Bestimmung des E—M das Proportionalitätsgesetz von den Körpern genau befolgt wird, halte ich noch für fraglich. Diesen Punkt

zu untersuchen, hielt ich jedoch nach den dargelegten Anschauungen über den gewöhnlichen E—M für überflüssig. Es handelt sich nach meinem Dafürhalten jetzt vielmehr darum: befolgen die Körper, wenn sie in den vorübergehenden Zustand der vollkommenen Elastizität übergeführt worden sind, in diesen alsdann das Proportionalitätsgesetz genau? Und ferner, wenn ein Körper verschieden grosse Längsdeformationen in verschiedenen Spannungszuständen (π_1) bei wenigstens nahezu konstanter Temperatur durchgemacht hat, zeigt er nachher bei gleicher Spannung π_1 und unter Anwendung der gleichen Mehrbelastung π_2 wenigstens wieder denselben primären und insbesonders sekundären E—M? Sind nicht die vorausgegangenen Deformationen von Einfluss auf die elastische Reaktion, d. h. auf die Werte dieser Modul?

§ 13. Fortsetzung.

Um diesen Fragen experimentell näher zu treten, habe ich mit dem gleichen Individuum eines Kupferdrahtes die in den Tabellen B und C verzeichneten Versuchsgruppen in unmittelbar aufeinanderfolgenden Tagen angestellt. Bei den Versuchsgruppen an den einzelnen Tagen ist eines der Versuchselemente π_1 oder π_2 konstant, indes das andere von Gruppe zu Gruppe, die mit einer zeitlichen Unterbrechung von 5 Minuten aufeinander folgen, wechselt. In der Tabelle B ist täglich die ständige Belastung π_1 konstant, dagegen die Mehrbelastung π_2 wechselt; π_1 ändert sich nur von tag zu tag. Hiedurch soll sich zeigen, ob die Dehnungen das Proportionalitätsgesetz bei konstanter Spannung π_1 genau befolgen, und ob sich die elastische Reaktion mit der Spannung ändert.

Diese sämtlichen Versuchsgruppen wurden alsdann mit denselben Belastungen π_1 und π_2, aber in anderer Aufeinanderfolge und zwar in der Weise nochmal ausgeführt, dass die Mehrbelastung π_2 täglich konstant war und die ständige Belastung π_1 variierte. Diese Versuchsergebnisse sind in Tabelle C enthalten. Aus den Tabellen B und C wurden nach Formel 5), 6) und 7) der primäre und sekundäre E—K nämlich δ_0, λ_0 und deren Unterschied l_0 für die gleiche, ständige Belastung $\pi_1 = 1$ gerechnet und in den Uebersichten B und C (§ 15) zusammengestellt.

§ 14. Die Uebersichten.

Diese — siehe § 15 — lassen die Anordnung und deren Zweck übersichtlicher erscheinen als die Tabellen, wenn ich zur Erläuterung noch hinzufüge, dass in Uebersicht B täglich eine horizontale, in C täglich eine vertikale Zahlenreihe entstanden ist.

Da die Beobachtungen auf die Temperatur 0^0 reduziert worden sind, so haben wir als veränderliche Elemente nur mehr π_1 und π_2 und als drittes die Veränderlichkeit, welcher die elastische Reaktion des Drahtes nach Massgabe der nach verschiedenen, vorhergegangenen Deformationen bestehenden von der Zeit abhängigen elastischen Nachwirkungen unterworfen ist. Gerade wegen dieses Elements wurde die ganze erste Versuchskette (Tabelle B) in der bezeichneten Weise (Tabelle C) wiederholt. Durch diese Anordnung nämlich wurde der Draht bei der gleichen Spannung π_1 und Belastungsmehrung π_2 zweimal geprüft und zugleich mit dem ebenbezeichneten dritten Element der Zeit, kombiniert. So ist z. B. die Versuchsgruppe: Vertikalreihe 1 und Horizontalreihe 3 in Uebersicht B die erste, in Uebersicht C die dritte der an einem Tag entstandenen Gruppen. In Uebersicht B ist also an demselben Tag der gedachten Gruppe noch keine andere, in Uebersicht C sind deren bereits zwei vorausgegangen.

Was die Grenzen der Genauigkeit dieser Zahlen betrifft, so ersieht man aus Formel 4), dass die Messung auf 0,01 mm noch eine vollkommen sichere, indes die 3. Dezimale nicht mehr ganz sicher ist, und die nächste gar keinen Anspruch auf Verlässigkeit machen kann. Es ist in den Resultaten die erste gänzlich unsichere Stelle noch angegeben. Darnach können solche Werte als gleich erachtet werden, die in den beiden ersten Stellen übereinstimmen.

§ 15. Betrachtung der in den Uebersichten B und C enthaltenen Resultate.

Würde das untersuchte Kupfer dem Proportionalitätsgesetz genau folgen, so müssten die Werte λ_0 jeder Horizontalreihe unter sich wenigstens in Uebersicht B übereinstimmen, da sie sich auf die gleiche Drahtlänge (1 m), gleiche Belastung (1 kg) und die Temperatur 0^0 beziehen. Nun

steigen nicht nur die Werte λ_0 jeder Horizontalreihe in Uebersicht B stetig, sondern es ist dies selbst in C, also bei Versuchen, die unter nur zum Teil gleichen Umständen überdies an verschiedenen Tagen ausgeführt wurden, der Fall.

Uebersicht B.

Konstant: π_1.

⇝		$\pi_2 = 3{,}5813$ 1)	$\pi_2 = 5{,}5527$ 2)	$\pi_2 = 7{,}3938$ 3)
1) $\pi_1 = 1{,}6234$	$\lambda_0 =$	**0,07486**	**0,07529**	**0,07660**
	$l_0 =$	0,00218	0,00366	0,00422
	$\delta_0 =$	*0,07268*	*0,07164*	*0,07238*
2) $\pi_1 = 3{,}6526$	$\lambda_0 =$	**0,07322**	**0,07421**	**0,07541**
	$l_0 =$	0,00019	0,00116	0,00269
	$\delta_0 =$	*0,07303*	*0,07305*	*0,07272*
3) $\pi_1 = 7{,}7110$	$\lambda_0 =$	**0,07194**	**0,07378**	**0,07461**
	$l_0 =$	0,00113	0,00209	0,00656
	$\delta_0 =$	*0,07081*	*0,07169*	*0,06804*
4) $\pi_1 = 15{,}8280$	$\lambda_0 =$	**0,07037**	**0,07285**	**0,07410**
	$l_0 =$	0,00137	0,00254	0,00444
	$\delta_0 =$	*0,06900*	*0,07031*	*0,06967*

Das Kupfer folgt also selbst im vorübergehenden Zustande der vollkommenen Elastizität dem Proportionalitätsgesetz bei konstanter Spannung nicht genau. Der longitudinale sekundäre E—M nimmt vielmehr bei konstanter Spannung π_1 mit zunehmender Amplitude der Dehnung d. i. mit zunehmender Belastungsmehrung π_2 ab.

Die Werte λ_0 jeder Vertikalreihe der Uebersicht C nehmen bei konstantem π_2 mit steigendem π_1 stetig ab. Dies ist sogar ausnahmslos in den Vertikalreihen der Uebersicht B der Fall, obschon diese Werte an verschiedenen Tagen beobachtet wurden.

Uebersicht C.

Konstant: π_2.

↓		$\pi_2 = 3{,}5813$ 1)	$\pi_2 = 5{,}5527$ 2)	$\pi_2 = 7{,}3938$ 3)
1) $\pi_1 = 1{,}6234$	$\lambda_0 =$	**0,07417**	**0,07547**	**0,07607**
	$l_0 =$	—0,00101	0,00120	0,00091
	$\delta_0 =$	*0,07518*	*0,07427*	*0,07516*
2) $\pi_1 = 3{,}6526$	$\lambda_0 =$	**0,07333**	**0,07420**	**0,07534**
	$l_0 =$	0,00228	0,00278	0,00400
	$\delta_0 =$	*0,07105*	*0,07141*	*0,07135*
3) $\pi_1 = 7{,}7110$	$\lambda_0 =$	**0,07211**	**0,07354**	**0,07432**
	$l_0 =$	0,00189	0,00344	0,00419
	$\delta_0 =$	*0,07022*	*0,07019*	*0,07013*
4) $\pi_1 = 15{,}8280$	$\lambda_0 =$	**0,07057**	**0,07307**	**0,07381**
	$l_0 =$	0,00202	0,00324	0,00485
	$\delta_0 =$	*0,06856*	*0,06983*	*0,06896*

Der sekundäre E—M des Kupfers hängt somit von der Spannung π_1 des Drahtes ab und wächst mit derselben.

Dagegen ist der sekundäre E—M von dem dritten Element, der Zeit, während welcher der Draht unter irgend einer Spannung gestanden, und von den Deformationen, die er während derselben erlitten hat, unabhängig. Bei derselben Spannung π_1 und der gleichen Mehrbelastung π_2 zeigt sich immer wieder die gleiche Amplitude λ_0.

Man sieht dies, sobald je zwei in der gleichen Horizontal- und Vertikalreihe der Uebersichten B und C liegende Werte λ_0 verglichen werden. Diese Differenzen sind:

+ 0,00069	— 0,00018	+ 0,00053
— 0,00011	+ 0,00001	+ 0,00007
— 0,00017	+ 0,00024	— 0,00029
— 0,00020	— 0,00022	+ 0,00029.

Nur in zwei Fällen übersteigt die Differenz 5 Einheiten der 4. Dezimale um Geringes; in allen übrigen erreicht sie nicht einmal 3 Einheiten

derselben Stelle. Das Vorzeichen der Unterschiede ist gerade zur einen Hälfte positiv, zur anderen negativ.

Diese Uebereinstimmung zeigen die ersten Dehnungen der korrespondierenden Gruppen in den Tabellen B und C nicht. Nicht nur, dass das Vorzeichen der Differenzen (siehe unten), wie oben, nicht wechselt, und dieselben bei den höheren Werten von π_1 oder π_2 erhebliche Werte annehmen; auch das Vorzeichen der Differenzen der ersten Dehnung ist ein anderes, als jenes der Dehnung (λ) am Schlusse derselben Gruppe. Die ersten Dehnungen bei der höchsten der gebrauchten ständigen Spannung π_1 sind sogar grösser als bei der nächst niederigen ständigen Belastung, Unregelmässigkeiten, die im vollkommen elastischen Zustande des Drahtes niemals in die Erscheinung treten. Gerade die letzte Thatsache macht es recht klar, wie so sich beim gewöhnlichen E—M so auffallende Unterschiede der Werte desselben selbst bei dem gleichen Versuchsobjekte ergeben können, Unterschiede, die man bei verschiedenen Versuchsobjekten der gleichen Substanz auf zufällige physikalische oder chemische Verschiedenheit zurückführen zu müssen glaubte. Ich lasse nun eine Uebersicht der ersten Dehnungen aus den Tabellen B und C folgen, die das Ebengesagte bestätigen soll:

		$b_1 - a_1$ aus der Tabelle		
π_1	π_2	B	C	Δ
1,6234	3,5813	24,0	23,6	+ 0,4
„	5,5527	37,3	37,1	+ 0,2
„	7,3938	49,9	50,0	— 0,1
3,6526	3,5813	23,8	23,9	— 0,1
„	5,5527	36,9	37,2	— 0,3
„	7,3938	49,4	50,1	— 0,7
7,7110	3,5813	23,5	23,9	— 0,4
„	5,5527	36,3	37,7	— 1,4
„	7,3938	49,2	50,6	— 1,4
15,8280	3,5813	24,4	24,2	+ 0,2
„	5,5527	37,0	38,7	— 1,7
„	7,3938	50,0	53,1	— 3,1

§ 16. Betrachtung der Werte l_0 in den Uebersichten B und C.

Hinsichtlich der Werte l_0 muss daran erinnert werden, dass jene in Uebersicht B vom Zeitpunkte des Beginnes der ersten Gruppe einer horizontalen Reihe an gerechnet sind, die nachfolgenden l_0 somit die Werte aller vorhergehenden enthalten, und dass dieses bezüglich der vertikalen Reihen in Uebersicht C nicht der Fall ist, weil eben hier von Gruppe zu Gruppe π_1 sich ändert.

Im allgemeinen scheint der Verlauf der Werte l_0 die Annahme zu rechtfertigen, dass die Molekularvorgänge in den Körpern während und nach einer Deformation sehr komplizierter Art sein mögen. Nach den bisher gemachten Erfahrungen hätte mich in der That eine irgendwie deutlich hervortretende Regelmässigkeit im Verlaufe dieser Zahlen l_0 mehr überrascht, als das sich zeigende Gegenteil. Denn abgesehen davon, dass die in Frage stehenden Werte zum Teil schon ziemlich nahe an die Grenze fallen, wo die Beobachtung unsicher zu werden beginnt, ist es nach den Untersuchungen von F. Kohlrausch,[1]) G. Wiedemann,[2]) F. Braun[3]) etc. wahrscheinlich, dass diese Aenderungen der elastischen Reaktion von sekundären molekularen Vorgängen herrühren, die von verschiedenen Umständen wieder modifiziert sein mögen. Insbesonders darf auch nicht übersehen werden, dass in den in Uebersicht B angegebenen Werten l_0 auch Einwirkungen hineinspielen, die in den Zeitzwischenräumen von 5 Minuten eintreten können, und die bei gleichbleibendem π_1 sich geltend machen. Die Werte l_0 dagegen, welche unter Uebersicht C verzeichnet sind, rühren vorzugsweise nur von einem einzigen Einflusse, der wiederkehrenden Deformation nämlich, her. Die Zeit der Ruhe des Drahtes, die Geschwindigkeit der Dehnung, unvermeidliche Erschütterungen, die Zufälligkeiten beim Uebergang von einer ständigen Belastung zur anderen, mag dieser auch noch so behutsam bewerkstelliget werden, nicht unwahrscheinlich sogar kleine Temperaturänderungen etc. mögen ausser Spannung und Amplitude der Dehnung noch von Einfluss auf den jeweiligen elastischen Zustand des Drahtes d. h. auf die Drehung der Moleküle sein.

1) Annalen, 1876. Bd. 158 u. a.
2) Annalen, 1859. Bd. 107, S. 439. — 1879. Bd. 242. S. 485.
3) Annalen, 1876. Bd. 159. S. 337.

§ 17. Die Werte δ_0 und der primäre E—M.

Die Werte δ_0 werden aus den beobachteten λ_0 und l_0 nach Gl. 7) berechnet. Nach dem, was über letztere gesagt werden musste, ist eine Uebereinstimmung der korrespondierenden Werte δ_0 in den Uebersichten B und C, wie diese bei den Werten λ_0 sich herausstellte, im allgemeinen nicht mehr zu erwarten. In der That sind sie auch, besonders bei den niedrigen Spannungen mehr von einander verschieden, als die Grössen λ_0. Indes müsste, wenn der Einfluss der Spannung π_1 ein überwiegender über die mehr zufälligen Einflüsse ist, sich wenigstens in jeder horizontalen Reihe für sich, deren Zahlenwerte von δ_0 sich ja auf dieselbe Spannung π_1 beziehen, eine ziemliche Uebereinstimmung in den Werten δ_0 zeigen. Diese ist in der That auch in dem Masse vorhanden, dass von einem Mittelwerte δ_0 gesprochen werden kann, indem sich weder ein stetiges Fallen noch Steigen dieser Zahlenwerte geltend macht.

Die folgende Zusammenstellung enthält den Mittelwert der δ_0 jeder Horizontalreihe und die Abweichungen der Einzelnwerte δ_0 von diesem.

Aus Uebersicht B:

Mittelwerte δ_0:	Abweichungen:		
0,07223	— 0,00045	+ 0,00059	— 0,00015
0,07293	— 0,00010	— 0,00012	+ 0,00021
0,07018	— 0,00063	— 0,00151	+ 0,00114
0,06966	+ 0,00066	— 0,00065	+ 0,00001

Aus Uebersicht C:

0,07487	— 0,00031	+ 0,00060	— 0,00029
0,07127	+ 0,00022	— 0,00014	— 0,00008
0,07018	— 0,00004	— 0,00001	+ 0,00005
0,06912	+ 0,00056	— 0,00071	+ 0,00016.

Nur in zwei Fällen wächst die Abweichung bis auf eine Einheit der 3. Dezimale an. Und wenn man beachtet, dass die Zahlen aus Uebersicht C sich auf Versuche beziehen, die an verschiedenen Tagen angestellt worden sind, und die Versuche einer Horizontalreihe durch solche bei verschiedenen Spannungen π_1 und Deformationen von verschiedenen Am-

plituden getrennt sind, so ist die ziemliche Uebereinstimmung um so auffallender und es ist kaum zu verkennen, dass doch die Spannung den überwiegenden Einfluss auf den elastischen Zustand vor der jeweiligen Dehnung, d. i. auf den primären E—M übt. Zu dem kommt noch zu beachten, dass selbst die Mittelwerte δ_0 in B und C, die in beiden obigen Zusammenstellungen im allgemeinen sinken, bei den höheren Spannungen π_1 als völlig gleich zu betrachten sind.

Der primäre E—M scheint also ebenfalls, wie der sekundäre, mit der Grösse der Spannung π_1 unter sonst gleichen Umständen zuzunehmen.

Bei gleich bleibender Spannung π_1 jedoch scheint der primäre E—M bei Dehnungen von verschiedenen Amplituden, gleichgiltig, ob diese zeitlich unmittelbar aufeinander folgen oder nicht, nahezu konstant zu bleiben.

Die Konstante kann aber, jenachdem die Dehnungen fast unmittelbar aufeinander folgen (B) oder nicht, (C) verschiedene Werte haben. Für höhere Spannungen scheinen jedoch auch diese Unterschiede zu verschwinden.

§ 18. Zusammenhang zwischen den primären und sekundären E—M.

Um diesen hervortreten zu lassen, kombinieren wir Gl. 5) und 6) und erhalten:

$$E_0 - E_0' = E_0 E_0' l_0$$

$$E_0' = \left(1 - \frac{l_0}{\lambda_0}\right) E_0 \qquad 9)$$

und

$$E_0 = \frac{1}{1 - \frac{l_0}{\lambda_0}} \cdot E_0' \qquad 10)$$

oder, so lange $\frac{l_0}{\lambda_0}$ einen geringen Wert gegen 1 hat:

$$E_0 = \left(1 + \frac{l_0}{\lambda_0}\right) E_0' \qquad 11)$$

woraus die Bedeutung des Verhältnisses der gemessenen Grössen l_0 und λ_0 erhellt.

Da sich E_0 für dieselbe Spannung π_1 als wenig veränderlich erweist, und E_0' für wachsende Amplituden der Dehnung nach den Uebersichten B und C abnimmt, so kann das Verhältnis $\frac{l_0}{\lambda_0}$ nicht konstant sein, sondern es muss mit λ_0 im allgemeinen wachsen. Aus der Uebersicht C berechnet sich für:

$$\begin{aligned} \pi_1 = \ & 3{,}6526; \ \frac{l_0}{\lambda_0} = 0{,}0311; \ 0{,}0375; \ 0{,}0531. \\ = \ & 7{,}7110; \ \ = 0{,}0262; \ 0{,}0468; \ 0{,}0564. \\ = \ & 15{,}8280; \ \ = 0{,}0286; \ 0{,}0443; \ 0{,}0657. \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Aenderung des elastischen Zustandes mit der Amplitude der wiederkehrenden Dehnungen λ_0 ganz entschieden wächst, indes es unentschieden bleibt, ob sie auch von der Spannung π_1 wesentlich abhängt.

§ 19. Die Unbeständigkeit des elastischen Zustandes bei konstanter Spannung π_1 nach vorhergegangenen Deformationen.

Die Gl. III (§ 11) beruht auf der Annahme, in l_t sei keine für alle Zeiten bleibende Streckung des untersuchten Drahtes enthalten, sondern jedes l_t verschwinde allmählich nachwirkungsweise gänzlich. Dass der Draht während aller Versuchsgruppen die Fähigkeit, sich auf seine ursprüngliche Länge zusammenzuziehen, beibehalten hat, ist schon aus dem Entstehen von Nachwirkungen l_t bei jeder folgenden Gruppe zu schliessen. Nichtsdestoweniger habe ich wegen der Wichtigkeit der Frage nach Abschluss der Versuchsgruppen C, am 4./2. 87 den Draht mit dem bisher verwendeten geringsten $\pi_1 = 1{,}6234$ kg belastet, und seine Nachwirkungsbewegungen alsdann noch mehrere Wochen hindurch verfolgt, indem ich zeitweise Skalen- und Thermometerablesungen vornahm und auf nachfolgende Art berechnete, welchen Stand der Skalenzeiger haben würde, wenn die Temperatur jener Versuchsgruppe, auf deren Zeigerstellung alle weiteren Zeigerstellungen reduziert werden, konstant geblieben wäre.

Werden nämlich in Formel 2) a_1, t_0, T_0, τ_0 und c_5, t_1, T_1, τ_1 je gleichzeitig abgelesen, so gibt l_1 die im zweiten Zeitpunkt der Ablesung noch bestehende elastische Nachwirkung in Skalenteilen, oder den Ab-

stand des Skalenzeigers vom ursprünglichen Skalenteilstrich a_1, unter der Annahme, die zu diesem Skalenteil gehörigen Temperaturen t_0, T_0, τ_0 seien fortwährend bestanden. Der Temperatureinfluss auf die Zeigerstellung ist eliminiert, die Beobachtungen sind auf den Stand in einem bestimmten Zeitpunkt reduziert. Auf diese Weise wurden Reduktionen der Stellung des Skalenzeigers auf den Stand bei der ersten Versuchsreihe der Gruppe Nr. I Tabelle B (am 29./1. 87) nach Formel 2) vorgenommen. Selbstverständlich muss jeder dieser Reduktionen die gleiche Anfangsbelastung π_1 zu grunde liegen. Die während der in Tabelle A verzeichneten 4 Versuchsgruppen entstandene E—N war am folgenden Tage (29./1. 87), wie die Rechnung ergab, völlig verschwunden. Es ergab Formel 2) sogar $l_1 = -0{,}4$ Skalenteile.

Bei den sämtlichen Versuchsgruppen der Tabelle B, ausgeführt vom 29./1. 87 bis 1./2. 87, sind 20,9 Sktl. der Nachwirkung l_1 entstanden; am nächsten Tag (2./2. 87) waren hievon, nach Formel 2) berechnet, noch 7,0 Sktl. vorhanden. Es sind also während der Versuche der Tab. B 20,9 Sktl. entstanden und während der Ruhepausen des Drahtes bis am 2./2. 87 wieder $20{,}9 - 7{,}0 = 13{,}9$ Sklt. verschwunden. Nun folgten die Versuche der Tab. C. Es entstanden während dieser Versuche neuerdings 23,5 Sktl., also während der Dauer der Versuchsgruppen der Tab. B und C $20{,}9 + 23{,}5 = 44{,}4$ Sktl. Am 3./3. 87, also nach 27 tägiger Ruhe bestanden — 2,0 Sktl. E—N. Nun wurden noch weitere Beobachtungen angestellt und ebenfalls auf den Stand am 29./1. 87 nämlich $a_1 = 5{,}0$; $t_0 = 4{,}10$; $T_0 = 4{,}43$; $\tau_0 = 4{,}45$ reduziert. Es war der Abstand des Skalenzeigers vom Teilstriche 5,0:

am	17./3. 87	+ 1,6 Sktl.
„	18./3. 87	— 0,4 „
„	19./3. 87	— 1,5 „
„	20./3. 87	— 1,9 „
„	21./3. 87	— 0,3 „

Das negative Vorzeichen muss dahin verstanden werden, dass schon vor Beginn der Versuchsgruppe I, am 29./1. 87, etwa infolge der anfänglichen Streckung des Drahtes E—N bestanden hat und hievon mindestens ein Teil verschwunden ist.

Wie die vorstehenden Zahlen zeigen, findet fortgesetzt und unabhängig von den Längenänderungen infolge von Temperaturänderungen bei konstanter Belastung $\pi_1 = 1{,}6234$ kg eine Aenderung der elastischen Reaktion des Drahtes statt. Diese Schwankungen der Elastizitätskräfte hätten mich überrascht, wenn mir nicht schon die höchst interessanten Wahrnehmungen bereits bekannt gewesen wären, welche Herr Professor F. Kohlrausch [1]) an Kautschukfäden gemacht hat. In Anbetracht dieser Kenntnis habe ich die sich thatsächlich zeigenden Schwankungen der Elastizität des Kupfers geradezu erwartet. Es sind vermutlich Elastizitätsänderungen infolge sich übereinanderlegender Nachwirkungsbewegungen der Moleküle im Spiele, herrührend von den verschiedenen vorausgegangenen dauernden und plötzlichen Gestaltsänderungen.

So viel aber ist sicher, und das ist hier ausschlaggebend, dass in keiner der angestellten Versuchsgruppen die sog. Elastizitätsgrenze überschritten worden ist. Bleibende Streckungen sind nicht entstanden, die Gl. III § 11 hat ihre volle Giltigkeit für alle hier angestellten Versuche.

§ 20. Fortsetzung der Versuche mit Kupferdrähten.

Die in Tabelle B und C dargestellten Versuchsgruppen wurden nach einem gewissen System auch insoferne ausgeführt, als an einem Tage entweder nur die Anfangsbelastung π_1 oder die Mehrbelastung π_2 geändert worden ist.

Nun habe ich in Tabelle D noch einige Versuche dargestellt, bei denen in beliebiger Ordnung die Belastungen π_1 und π_2, auch beide zugleich, geändert wurden, um zu sehen, ob auch dann der sekundäre E—K, reduziert auf die Temperatur 0^0 wieder denselben Wert λ_0 annimmt, den er in den Uebersichten B und C für dieselben Werte von π_1 und π_2 hat. Die folgende Uebersicht enthält die aus Tab. D berechneten Werte λ_0 und die Differenz Δ zwischen diesem und dem Mittel der entsprechenden Werte in Tab. B und C.

1) F. Kohlrausch, Annalen Bd. 158. S. 371. (3). 1876.

π_1	π_2	λ_0	Δ
1,6234	7,3938	0,07588	— 0,00046
7,7110	5,5527	0,07352	— 0,00014
15,8280	5,5527	0,07282	— 0,00013.

Man sieht, dass die Werte λ_0 in den sicheren Dezimalen vollkommen mit den entsprechenden Werten der Tabellen B und C übereinstimmen.

Die Versuche der Tabellen B, C und D wurden an demselben Kupferdrahtindividuum vorgenommen. Es stand mir aus einer meiner früheren Arbeiten (1885. Heft 1.) auch noch Versuchsmaterial mit einem anderen Kupferdrahtindividuum, aber von der nämlichen Spule zur Verfügung. Die nachfolgende Uebersicht gibt die Werte λ_0 in der gleichen Bedeutung wie die vorige.

π_1	π_2	λ_0
10,146	12,467	0,07731
8,117	12,467	0,07755
4,059	12,467	0,07787

Auch hier nimmt bei konstantem π_2 mit der Abnahme von π_1 der Wert von λ_0 zu. Da jedoch die Werte von π_1 und π_2 mit jenen in Uebersicht B und C nicht übereinstimmen, so ist ein genauer Vergleich obiger Werte von λ_0 mit jenen in den Uebersichten B und C nicht möglich. Eine angenäherte Interpolation, die leicht thunlich, zeigt aber, dass auch diese Werte von λ_0 an jene Stellen von Uebersicht B und C fallen, wohin sie, entsprechend den Werten π_1 und π_2 gehören, wenn einem bestimmten π_1 und π_2 unter allen sonstigen Umständen bei konstanter Temperatur dieselbe Amplitude der Dehnung entspricht.

Endlich ist mir noch ein Versuch mit Kupferdraht aus (1885. Heft 1.), aber von einer anderen Spule und anderem Querschnitt zur Verfügung gestanden. Während die bisherigen Zahlen sich auf Material von nahezu chemischer Reinheit beziehen, war dieser Kupferdraht käuflich erworben. Die Reduktion auf λ_0 lieferte:

$$\pi_1 = 1{,}248; \quad \pi_2 = 17{,}430; \quad \lambda_0 = 0{,}08927.$$

Auch dieser Wert λ_0 fällt in Uebersicht C an die ihm entsprechende Stelle.

Aus diesen Thatsachen ersieht man, dass beim Kupfer, wenn es durch fortgesetztes An- und Abspannen in den Zustand vorübergehender vollkommener Elastizität übergeführt wird, dasselbe stets jenen Grad von Elastizität zeigt, der der jeweiligen Temperatur, Spannung (π_1) und Mehrbelastung (π_2) entspricht, gleich viel, welches der Elastizitätsgrad für dieselbe Temperatur vor der Ueberführung zu verschiedenen Zeiten war.

Der sekundäre E—M ist für eine bestimmte Temperatur, Spannung und Mehrbelastung konstant, der primäre jedoch nicht; letzterer ist zunächst eine Funktion der Zeit.

§ 21. Abhängigkeit des sekundären E—M von π_1 und π_2 bei anderen Metallen als Kupfer.

An anderen Metallen als Kupfer habe ich für die vorliegende Abhandlung Versuche nicht angestellt, da ich den Gegenstand nur an dieser Substanz eingehend studieren wollte. Zwar ständen mir aus einer früheren Arbeit (1885. Heft 1.) auch für andere Substanzen Versuche mit konstantem π_1 und veränderlichem π_2 zu gebote. Allein die Werte von π_2 differieren bei den meisten Substanzen so wenig, dass die Versuchsresultate, welche zwar fast ausnahmslos die bei Kupfer gemachten Erfahrungen bestätigen, nicht überzeugend wirken können. Ich übergehe deshalb die nähere Darlegung dieser Ergebnisse. Bei Blei nur lagen die Werte von π_2 günstig. Ich lasse das Ergebnis folgen, jedoch bezieht sich hiebei λ_0 zwar auch auf die Temperatur 0^0, die Drahtlänge 1 Meter und $\pi_2 = 1$ kg, aber angegeben in Teilen der Ablesung auf der Spiegelskala.

$$\pi_1 = 0{,}0889 \begin{cases} \pi_2 = 0{,}1762; & \lambda_0 = 37{,}16 \text{ Sktl.} \\ \pi_2 = 0{,}4423; & \lambda_0 = 46{,}03 \text{ Sktl.} \end{cases}$$

Dieses Resultat bestätiget die Abnahme des sekundären E—M des Bleies mit der Zunahme der Dehnungsamplitude d. h. die Nichtbefolgung des Proportionalitätsgesetzes schlagend. Es hatte dieses Ergebnis für mich noch insoferne ein grosses Interesse, als mir hiedurch jeder Zweifel darüber, ob nicht die von mir gefundene Abweichung vom Proportionalitätsgesetz auf einer Fehlerquelle, beruhend in einer, wenn auch noch so kleinen Durchbiegung des Balkens, an dem der Hebel aufgehängt war, herrühre, genommen wurde. Denn die bei Blei angewendeten Be-

lastungen (π_2) sind zu gering, um solche Differenzen, wie sie sich bei diesem Metall bezüglich λ_0 ergeben haben, hervorzubringen.

Was nun ferner die Aenderung des sekundären E—K mit der Spannung π_1 des Drahtes anderer Substanzen als Kupfer anlangt, so verfügte ich über ein ziemlich umfangreiches Beobachtungsmaterial aus meinen früheren Versuchen (1885. Heft 1.). Ich lasse auch diese Resultate der Vollständigkeit halber im Auszuge hier folgen, bemerke jedoch, dass sich die Verlängerungen λ zwar auch auf 1 Meter Drahtlänge, aber auf die beigefügte Mehrbelastung π_2 (nicht 1 kg) pro qmm beziehen. Auch sind die auf der Spiegelskala sich zeigenden Verlängerungen (λ) nicht auf die Temperatur 0^0 reduziert, da die Verschiedenheit der Temperaturen t nicht so bedeutend ist, um den Zweck der Zusammenstellung zu vereiteln. Die Zahlen sind der Uebersichtlichkeit der Erscheinung wegen von den kleineren zu grösseren π_2 fortschreitend dargestellt, obwohl eine bestimmte Ordnung bei den Versuchen nicht eingehalten ward. Die Versuche sind immer an dem gleichen Exemplar einer Substanz vorgenommen. Zum Teil ist λ das Mittel aus zwei oder mehreren Versuchsgruppen.

Substanz:	π_1	π_2	λ	t.
Silber:	1,6422	6,4192	73,86 Sktl.	
	2,4633	„	71,52	5—6^0
	3,2844	„	70,04	
Platina:	2,0773	9,1098	40,23	
	4,1546	„	37,56	
	8,3092	„	36,74	7—8^0
	12,4638	„	36,46	
	16,6184	„	36,32	
	20,7730	„	36,21	
Kupfer:	4,0590	12,4670	77,57	
	8,1170	„	77,09	6—8^0
	10,1460	„	76,99	
Eisen:	4,8892	16,6110	71,40	
	9,7784	„	70,66	5—6^0
	14,6676	„	70,42	
	19,5568	„	70,04	

Blei:	0,0889	0,4423	20,53 Sktl.	3— 4°
	0,1778	„	20,32	
Messing:	2,3216	9,0153	69,75	
	4,6431	„	68,96	
	6,9647	„	68,54	4— 5°
	9,2862	„	68,65!	
	11,6078	„	68,36	
Neusilber:	4,2890	4,4783	26,35	
	5,7187	„	25,66	7— 8°
	7,1484	„	25,30	
Fischbein:	0,0978	0,1200	52,52	
	0,1956	„	52,20	12—13°
	0,3911	„	51,77	
	0,5867	„	51,56	

Es springt in die Augen, dass bei allen diesen Substanzen mit zunehmender Spannung π_1 die Dehnungsamplitude abnimmt, also der sekundäre E—M wächst. Es gewinnt hiebei den Anschein, als ob der sekundäre E—M sich einer Grenze näherte. Allein es ist diese Frage nicht spruchreif; denn fürs erste müssten die Versuche wenigstens an einem Metall hinsichtlich π_1 weiter fortgesetzt und ausserdem die wirklichen Dehnungen berechnet und auf gleiche Temperatur reduziert werden.

§ 22. Ueber die Ursache der Abweichung vom Proportionalitätsgesetz.

Jede Dehnung und Zusammenziehung des untersuchten Drahtes veranlasst eine Aenderung seines Querschnittes sowohl, als auch seiner Temperatur und es entsteht die Frage, ob die Abweichung vom Proportionalitätsgesetz durch eine dieser zwei Zustandsänderungen allein, oder durch deren Zusammenwirken im gleichen Sinne verursacht werden kann. Wir wollen zuerst dem Einflusse der Querkontraktion und zwar an dem hier untersuchten Kupferdrahte näher treten.

Behalten wir die früher (§ 11) gebrauchten Bezeichnungen bei und nennen den ursprünglichen Querschnitt des Drahtes, der bisher als konstant betrachtet wurde, F_t, seinen Radius R_t. Bei der Verlängerung l'_t mag alsdann der Radius r'_t und der Querschnitt F'_t bestehen. Infolge

der weiteren Verlängerung λ_t gehe der Halbmesser in r_t, der Querschnitt in f_t über. Ist ferner für die Verlängerung l_t' der Koëffizient der Querkontraktion ϱ', für jene $l_t' + \lambda_t$ der Wert desselben ϱ, so ist:

$$F_t = R_t^2 \pi$$
$$F_t' = F_t(1 - \varrho')^2 \quad \text{und}$$
$$f_t = F_t(1 - \varrho)^2$$

Wird mit q das Verhältnis zwischen Dilatation und Querkontraktion bezeichnet, so ist, wenn man l_t wegen seiner relativen Kleinheit vernachlässiget:

$$\varrho' = q \cdot \frac{l_t'}{L_0} \quad \text{und} \quad \varrho = q \cdot \frac{l_t' + \lambda_t}{L_0}$$

Nun ist:

$$\frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_2}{f_t} = \lambda_t = \frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_2}{F_t(1-\varrho)^2}$$

Geht man auf die Temperatur 0^0 über, so wird:

$$\frac{L_0(1+\alpha t)}{E_0'(1-\gamma t)} \cdot \frac{Z_2}{F_0(1+2\alpha t)(1-\varrho)^2} = \lambda_t \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{E_0'} = \frac{\lambda_t}{L_0 \pi_2} \cdot [1 - (\gamma - \alpha)t] \cdot (1 - \varrho)^2$$

$$\frac{1}{E_0'} = \lambda_0(1 - \varrho)^2 = \lambda_0(1 - 2\varrho)$$

Da für die bei den vorliegenden Versuchen herrschenden niedrigen Werten von t angenähert $l_t' = \pi_1 \lambda_0 L_0$ und $\lambda_t = \pi_2 \lambda_0 L_0$ gesetzt werden darf, ist:

$$\varrho = q(\pi_1 + \pi_2)\lambda_0, \text{ folglich:}$$

$$\frac{1}{E_0'} = \lambda_0[1 - 2q(\pi_1 + \pi_2)\lambda_0] \qquad 9)$$

Der Wert von q ist bekanntlich nicht ganz sicher festgestellt. Das arithmetische Mittel der von Poisson und Wertheim angegebenen Werte ist $\frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}) = 0{,}3$. Ob q für alle Metalle konstant sei, ist nicht bestätiget. Kirchhoff, Okatow, Schneebeli fanden für Stahl übereinstimmend ungefähr $q = 0{,}3$. Aber gerade für Kupfer fand W. Thomson [1]),

1) Handbuch d. theoretischen Physik v. W. Thomson u. Tait. Uebersetzt v. Helmholz u. G. Wertheim. I. Bd. II. Teil. § 684.

dass das Verhältnis der seitlichen Kontraktion zur longitudinalen Ausdehnung zwischen 0,226 und 0,441 liegt, was als Mittel ebenfalls ca. 0,3 gibt. Nach alledem können wir für Kupfer q = 0,3 setzen und erhalten:

$$\frac{1}{E_0'} = \lambda_0 [1 - 0{,}6\,(\pi_1 + \pi_2)\,\lambda_0] = \lambda_\varrho \qquad 10)$$

In Gl. 10) ist $\frac{1}{E_0'}$ der sekundäre E—K des Kupfers, der sich ergibt, wenn man die Querkontraktion berücksichtiget. Ich habe mit den Zahlenwerten der Uebersichten B und C einige Berechnungen ausgeführt, darunter auch für die höchste der in diesen Versuchen angewendeten Summe $\pi_1 + \pi_2$. Das Ergebnis der Berechnung ist:

	π_1	π_2	λ_ϱ	$\lambda_0 - \lambda_\varrho$
Aus B:	1,6234	3,5813	0,07484	0,00002
	1,6234	5,5527	0,07527	0,00002
	1,6234	7,3938	0,07657	0,00003
Aus C:	15,8280	7,3938	0,07374	0,00007

Man sieht, dass selbst bei der stärksten Querkontraktion ihr Einfluss auf die Dehnung kein 0,0001 mm erreicht, derselbe sich somit überhaupt der direkten Beobachtung in den hier angestellten Versuchen entzog.

Die seitliche Kontraktion allein verursacht also die beobachtete Abweichung von dem Proportionalitätsgesetze mit der Zunahme der Dehnungsamplitude nicht.

Was nun die Temperaturveränderung infolge der wiederkehrenden An- und Abspannungen des Drahtes betrifft, so lässt sich auch ihr Einfluss auf die Messung der Dehnungen mit Benützung einer früher von mir angestellten mathematischen Untersuchung in quantitativer Richtung beurteilen. Bezeichnet man nämlich die Veränderung, welche jede Dehnung infolge dieser Temperaturschwankung erlitten hat, mit F′ und jene, welche jede Verkürzung aus gleichem Grunde erleidet, mit F″, so ist:

$$b_\nu - a_\nu = \lambda' + F' \quad \text{und}$$
$$c_\nu - b_\nu = \lambda'' + F'' \quad \text{oder:}$$
$$\lambda' = (b_\nu - a_\nu) - F'$$
$$\lambda'' = (c_\nu - b_\nu) - F''$$

wenn λ' und λ'' die unabhängig von der Temperaturänderung entstehende Verlängerung resp. Verkürzung des Drahtes bedeutet. Nun wurde von mir gezeigt,[1]) dass

$$F' = \gamma_1 \cdot L\alpha \cdot k \cdot \lambda' \cdot \frac{1}{hz} \cdot \frac{e^{hz}-1}{e^{hz}+1}\left[2 - \frac{1}{(e^{hz})^{2\nu}} \cdot (e^{hz}-1)e^{hz}\right] \quad 11)$$

$$F'' = \gamma_1 \cdot L\alpha \cdot k\lambda'' \cdot \frac{1}{hz} \cdot \frac{e^{hz}-1}{e^{hz}+1}\left[2 + \frac{1}{(e^{hz})^{2\nu}}(e^{hz}-1)\right] \quad 12) \text{ ist.}$$

Darin haben L und α die bisherige Bedeutung. Der Faktor γ_1 verwandelt die wirkliche Verlängerung resp. Verkürzung des Drahtes in die Anzahl von Skalenteilen, welche die durch sie bewirkte Zeigerverstellung beträgt. Es ist e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, z die Zeit einer An- oder Abspannung des Drahtes in Sekunden, ν die Ordnungszahl derselben. Es bedeutet ferner h die Konstante des Newton'schen Abkühlungsgesetzes und k das Verhältnis der Temperaturänderung Δt des Drahtes zur Dilatation λ' resp. λ''. Schon nach einer geringen Anzahl von An- und Abspannungen kann

$$F' = F'' = 2\gamma_1 \cdot L\alpha \cdot k\lambda \cdot \frac{1}{hz} \cdot \frac{e^{hz}-1}{e^{hz}+1} \quad 13)$$

gesetzt werden, wobei nach den Versuchsergebnissen bekanntlich auch $\lambda' = \lambda'' = \lambda$ wird. Bei der 4. und 5. Dilatation kann dies in der Regel schon geschehen. Zahlenwerte für k und h habe ich in einer früheren Arbeit,[2]) jedoch nur für Eisen, ermittelt. Es ergab sich, dass für $z = 24$ Sek. bei Eisen nach der 5. An- und Abspannung $F' = 0{,}16$, $F'' = 0{,}15$ Skalenteile beträgt. Die Zeit ist indes von verschwindendem Einflusse. Für Kupfer stehen mir die Zahlenwerte der Konstanten k und h nicht zu gebote. Wenn aber die Werte dieser Konstanten bei Eisen und Kupfer nicht sehr verschieden vorausgesetzt werden müssen, so lässt sich eine ungefähre Schätzung des fraglichen Einflusses bewerkstelligen, da dann F' und F'' ausser von α zunächst nur noch von λ und zwar in proportionaler Weise abhängt. Aus den von E. Edlund[3])

1) A. Miller, Sitzungsbericht der math.-physik. Klasse der k. b. Akademie d. Wissenschaften 1883. Heft 1.

2) A. Miller, Annalen d. Physik etc. 1883. Bd. 20. S. 94.

3) E. Edlund, Annalen d. Physik etc. 1865. Bd. 124. S. 539. Ziff. 7.

angegebenen Zahlen berechnete ich für Eisen $k = 96{,}9$,[1]) für Kupfer $k = 106{,}3$, also in der That nicht sehr erheblich abweichende Werte. Die zum obigen Wert $F'' = 0{,}15$ Sktl. gehörige Dehnung bei Eisen betrug ca. 150 Sktl., bei Kupfer für die grösste Dehnung ca. 50 Sktl. Berücksichtiget man noch, dass die Werte α bei Kupfer und Eisen ca. das Verhältnis $\frac{3}{2}$ haben, so wäre der Einfluss auf die bei unseren Versuchen stattgehabte grösste Dehnung des Kupferdrahtes $F' = F'' = \frac{0{,}15}{150} \cdot 50 \cdot \frac{3}{2}$ $= 0{,}08$ Skalenteile. Es würde hiernach der in Rede stehende Einfluss auch innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler fallen.

Die Abweichung vom Proportionalitätsgesetze dem Einflusse der durch die Dilatation des Drahtes verursachten Temperaturänderung desselben allein zuzuschreiben, ist sonach ausgeschlossen.

Die in diesem Paragraphen dargelegten Ergebnisse bieten aber auch keinen Grund, anzunehmen: beide in gleichem Sinne wirkenden Einflüsse zusammen seien die Ursache der bei unseren Versuchen beobachteten Abweichung von dem Proportionalitätsgesetze. Der Grund dürfte vornehmlich in der drehenden Nachwirkungsbewegung der Moleküle während der Dehnung zu suchen sein. Je grösser die Amplitude der Dehnung, desto grösser ist nach den hier vorliegenden Versuchen die Nachwirkung und damit auch die Abnahme der elastischen Reaktion, welche die Abweichung vom Proportionalitätsgesetze zur Folge haben kann.

§ 23. Allgemeine Betrachtungen über die Bestimmung des longitudinalen E—M.

Gewöhnlich lautet in den physikalischen Handbüchern die Anleitung zur Bestimmung des longitudinalen E—M dahin, dass er aus den Verlängerungen, die einem bekannten Zuge entsprechen, zu bestimmen sei. Die Zahlenwerte, welche Wertheim vor etwa 40 Jahren für den E—M der Metalle angegeben hat, werden heute noch in allen grösseren Lehrbüchern der Physik angeführt. Wertheim hat aber diese Modul aus den Verkürzungen berechnet. Tomlinson legt ebenfalls die Verkürzung

1) Hier mag bemerkt werden, dass ich aus meinen Versuchen der oben zitierten Arbeit für Eisen $k = 97{,}3$ berechnet habe.

der fadenförmigen Körper der Beurteilung ihres elastischen Verhaltens zu grunde. Da diese Forscher nicht begründen, warum sie statt der Verlängerung infolge der Belastung die Verkürzung nach der Entlastung zur Ermittelung des longitudinalen E—M anwenden, so scheint mir nicht so fast eine abweichende Meinung darüber zu bestehen, ob es richtiger sei, den E—M aus der Verlängerung statt aus der Verkürzung zu bestimmen; sondern die Anwendung verschiedener Verfahren dürfte vielmehr ihren Grund in der Annahme haben, es sei einerlei, welche von den beiden Längenveränderungen zur Anwendung komme. Dem wäre auch so, wenn sich der untersuchte Körper immer im Zustande vollkommener Elastizität befände. Dann wären Verlängerung und Verkürzung gleich und es ergäbe sich aus beiden Längenveränderungen der gleiche longitudinale E—M. Die mit I bezeichneten Versuchsgruppen in Tab. A zeigen indes, dass dies ebenso wenig der Fall ist, selbst wenn man 5 oder 15 Minuten nach der Entlastung abliest, als wenn man, wie in den Versuchsgruppen II Tab. A, die Ablesung sofort nach der Entlastung vornimmt. Es handelt sich hier freilich um Längen, die noch kaum 0,01 mm betragen, deren Messung somit bei der gebräuchlichen Ablesungsvorrichtung, dem Kathetometer, sehr unsicher wird, wenn sie nicht ganz entgehen, obschon sie, wie unsere Versuche zeigen, thatsächlich existieren.

Es scheint mir geboten, der Sache etwas näher zu treten. Um dies zu können, lasse ich die Verlängerungen und Verkürzungen der ersten Versuchsreihe jeder Gruppe der Tabelle C folgen. Da es kein strenges Kriterium gibt, wann nach der vollen Be- oder der gänzlichen Entlastung abgelesen werden soll, so dürfte die erreichbare Gleichheit hinsichtlich dieses Punktes auch erzielt sein, wenn, wie in den hier aufgeführten Versuchsreihen geschehen, die Ablesung sofort nach jeder vollen Be- und Entlastung geschieht. Dass die Temperaturänderung während der Dehnung ($b_1 - a_1$) und Verkürzung ($c_1 - b_1$), die im Draht selbst entsteht, oder durch die umgebende Luft veranlasst wird, nicht von erheblichem Belange für die vorliegende Frage ist, lässt sich aus einer einfachen Schätzung ermessen. Die Tab. C liefert nun:

π_2	π_1	$b_1 - a_1$	$c_1 - b_1$	$c_1 - a_1$	$\frac{c_1 - a_1}{\pi_1}$	$\frac{m}{\pi_2}$
3,5813	1,6234	23,6	— 23,3	0,3	0,19	0,052
„	3,6526	23,9	— 23,0	0,9	0,25	
„	7,7110	23,9	— 22,7	1,2	0,16	
„	15,8280	24,2	— 22,0	2,2	0,14	
					m = 0,185	
5,5527	1,6234	37,1	— 36,7	0,4	0,25	0,047
„	3,6526	37,2	— 36,0	1,2	0,33	
„	7,7110	37,7	— 35,8	1,9	0,25	
„	15,8280	38,7	— 35,2	3,5	0,22	
					m = 0,263	
7,3938	1,6234	50,0	— 49,2	0,8	0,49	0,051
„	3,6526	50,1	— 48,8	1,3	0,36	
„	7,7110	50,6	— 48,2	2,4	0,31	
„	15,8280	53,1	— 47,8	5,3	0,34	
					m = 0,375	

Beschränkt man die Betrachtung zuerst auf irgend eine Versuchsgruppe allein, so sieht man aus der Zunahme des Wertes $\Sigma\,(c_\nu - a_\nu)$ — Tabellen — dass der E—M während der Dehnungen und Verkürzungen in den einzelnen Versuchsreihen anfänglich rasch, dann langsam abnimmt und sich einer Grenze nähert. Wird die erste Dehnung und Verkürzung irgend einer Versuchsgruppe in's Auge gefasst, so lässt die obige Uebersicht ersehen, dass stets $b_1 - a_1 > c_1 - b_1$ ist. Würde somit der E—M aus $b_1 - a_1$ berechnet, so würde er kleiner ausfallen als durch die Berechnung aus $c_1 - b_1$. Diese Ungereimtheit zwingt, eine Entscheidung zu treffen, ob der E—M, aus der Verlängerung $b_1 - a_1$ oder der Verkürzung $c_1 - b_1$ bestimmt, seiner Definition mehr entspricht, insofern er, wie dies zur Bestimmung des gewöhnlichen longitudinalen E—M üblich ist, aus der ersten Deformation und nicht wie der sekundäre E—M bestimmt wird. Denn durch die Vorschrift, mit der Ablesung nach der Entlastung einige Zeit abzuwarten. verbessert sich die Sachlage nicht wesentlich, da ja die Versuche I in Tabellen A darthun, dass selbst nach längerer Zeit der Körper seine frühere Länge nicht vollständig

annimmt, obschon die Elastizitätsgrenze sicher (§ 19) nicht überschritten worden ist.

Nachdem aber festgestellt ist, woher der Unterschied $(c_1 - a_1)$ zwischen $(b_1 - a_1)$ und $-(c_1 - b_1)$ rührt, so kann die fragliche Entscheidung nicht mehr schwer fallen. Ich habe schon in früheren Arbeiten (1885. Heft 1. § 44.) und (II. Bl. XV. Bd. III. Abt. § 16.) auseinander gesetzt, dass die Längenzunahme $(c_\nu - a_\nu)$ des Drahtes nach jeder Dehnung und Verkürzung eine Abnahme des E—M während dieser Gestaltsänderung verrät. Es entspricht also dem π_1 während der Dehnnng nicht mehr jene Drahtlänge, die ihm vor derselben zukam, sondern in der Regel eine um $c_1 - a_1$ grössere. Somit entspricht auch dem Zuge π_2 nicht die Verlängerung $b_1 - a_1$, sondern:

$$(b_1 - a_1) - (c_1 - a_1) = b_1 - c_1 = -(c_1 - b_1).$$

Daher muss man sich dafür entscheiden, den E—M nicht aus der Verlängerung, wie es in Handbüchern gefordert wird, sondern aus der Verkürzung zu berechnen. Es bietet dieses Ergebnis in der That nichts Ueberraschendes, sobald man bedenkt, dass eben nicht die Gestaltsänderung eines Körpers, der äusseren Kräften unterworfen wird, sondern die Wiederannahme der früheren Gestalt das Merkmal des Vorhandenseins der elastischen Eigenschaft der Substanz ausmacht. Der aus den Verkürzungen berechnete E—M kommt dann dem sekundären E—M, welcher dem Zustande vollkommener Elastizität entspricht, näher als der aus der Dehnung abgeleitete.

Vergleichen wir nun in obiger Zusammenstellung die Werte von $b_1 - a_1$ und $c_1 - b_1$ verschiedener Versuchsgruppen für ein konstantes π_2, so ersieht man, wie die ersteren mit wachsendem π_1 zunehmen, indes die letzteren abnehmen. Der E—M würde also nicht nur von der Anfangsbelastung π_1 abhängen, sondern sogar beim Uebergang von kleineren π_1 zu grösseren abnehmen oder wachsen, je nachdem man ihn aus den Verlängerungen $b_1 - a_1$ oder den Verkürzungen $c_1 - b_1$ berechnet. Dieser Widerspruch hebt sich, sobald man aus den oben angegebenen Gründen des Einflusses von π_1 auf $b_1 - a_1$ den E—M aus der Verkürzung $c_1 - b_1$ bestimmt. Dann nehmen die gewöhnlichen E—M mit der beständigen Belastung π_1 zu, wie dies auch der sekundäre E—M thut.

§ 24. Abhängigkeit der Grösse der Nachwirkung $\Sigma (c_r - a_r)$ von π_1 und π_2.

In der letzten Zusammenstellung (§ 23) sind auch die Werte $\frac{c_1 - a_1}{\pi_1}$ berechnet. Ich betrachte sie für ein konstantes π_2 versuchsweise ebenfalls als konstant. Diese Quotienten stellen die E—N, welche der Einheit von π_1 entspricht, dar. Die darin auftretenden erheblicheren Abweichungen könnten in der Kleinheit der zu messenden $c_1 - a_1$ leicht ihre Erklärung finden. Darnach wären diese, nach der ersten Deformation sich zeigenden elastischen Nachwirkungen $c_1 - a_1$ der Grösse der ständigen Belastung π_1 nahezu proportional. Dies wäre ein Zeichen für die Richtigkeit meiner schon früher ausgesprochenen Ansicht, dass, wenn die Weber-Kohlrausch'sche Hypothese von der Drehung der Moleküle neben der Verschiebung wahr ist, die dadurch hervorgerufene Abnahme der inneren Reaktion durch eine proportionale elastische Dehnung zur Herstellung des Gleichgewichtes ausgeglichen werden müsse. Die Mittelwerte m der Quotienten $\frac{c_1 - a_1}{\pi_1}$ steigen mit π_2 proportional, denn der Quotient $\frac{m}{\pi_2}$ scheint für Kupfer konstant zu werden und den beiläufigen Wert $0{,}050 = C_1$ anzunehmen. Es ist diese Zahl C_1 die E—N, welche L Meter des Kupferdrahtes zeigen, wenn er mit 1 kg pro qmm ständig belastet und mit 1 kg einmal gedehnt und dann sofort wieder entlastet wird. Sonach wäre allgemein: $\frac{c_1 - a_1}{\pi_1} : \pi_2 = C_1$ oder $c_1 - a_1 = C_1 \pi_1 \pi_2$. Für einen Draht von 1 Meter Länge ergibt sich als E—N die Grösse $l_1 = \frac{C_1}{L} \cdot \pi_1 \pi_2 = C \pi_1 \pi_2$. Für Kupfer hätte man dann

$$C = \frac{C_1}{L} = \frac{0{,}050}{1{,}1} = 0{,}0455 \text{ Skalenteile} = 0{,}0455 \cdot 0{,}00631 \cdot 2 \text{ mm} = 0{,}00057 \text{ mm}$$

für die 1. Deformation durch einmaliges An- und Abspannen des Drahtes.

Ein ungleich höheres Interesse hätte die Konstante, welche sich etwa ergäbe, wenn die Deformationen bis zum Uebergang des Körpers in den vorübergehend vollkommen elastischen Zustand fortgesetzt würden.

Das nötige Zahlenmaterial für Verfolgung dieser Frage findet sich in Uebersicht C (§ 15) und zwar, entgegen dem oben für die erste Deformation benützten, in Bezug auf Temperatureinfluss etc. bereits

korrigiert. Da jedoch die Zahlen l_0 der ersten Horizontalreihe wegen der Kleinheit der gemessenen Grössen an Zuverlässigkeit hinter jenen der übrigen Reihen sicher zurückstehen, und noch mehr, weil auch die der ersten Reihe vorangehende längere Ruhe des Drahtes unter der Anfangsbelastung π_1 (§ 7), sowie der Uebergang von der grösseren zur kleineren Belastung π_1, die Grösse von l_0 beeinflussen kann, ja voraussichtlich wird, so will ich zur Bestimmung der Mittelwerte m nur die Zahlen l_0 der drei letzten Horizontalreihen gebrauchen.

$m = l_0$	$\frac{m}{\pi_2}$
0,00206	0,000575
0,00315	0,000567
0,00435	0,000588

Der Mittelwert der Quotienten $\frac{m}{\pi_2}$ ist: $C = 0{,}000577$, so dass die Konstante C für eine und fünf Deformationen als gleich angesehen werden darf. Da der letzte Wert von C ein höheres Vertrauen beanspruchen kann als der vorige aus der ersten Gestaltsänderung hervorgegangene, so dürften wir annehmen, dass 1 Meter des Kupferdrahtes für die Kilogramm-Einheit von π_1 und π_2 um 0,00058 mm sich vorübergehend verlängert, wenn er bis zum Uebergang in den vorübergehend vollkommen elastischen Zustand ununterbrochen deformiert wird. Für Kupferdraht von der Länge L und die Belastungen π_1 und π_2 wäre sonach bei der Temperatur 0^0 die Grösse der E—N

$$l_0 = 0{,}00000058\,L \cdot \pi_1 \pi_2 = C \cdot L \cdot \pi_1 \pi_2 \text{ Meter}, \qquad 13)$$

hiemit den Belastungen π_1 und π_2 proportional.

Wenn man allgemein mit E_s den sekundären und mit E_p den primären E—M bezeichnet, so ist (II. Cl. XV. Bd. III. Abt. § 14. Gl. J und L)

$$E_s = \frac{\pi_2}{\lambda} \quad \text{und}$$

$$E_p = \frac{\pi_2}{\lambda - kl} = \frac{\pi_2}{\lambda - \frac{\pi_2}{\pi_1} \cdot C\pi_1\pi_2} = \frac{\pi_2}{\lambda - C\pi_2^2} = \frac{E_s}{1 - C\pi_2 E_s}.$$

Folglich:

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{1}{1 - C \pi_2 E_s}.$$

Hiernach ist das Verhältnis $\frac{E_p}{E_s}$ nicht konstant, sondern alles was bei konstantem π_2 den Wert E_s erhöht, also insbesonders die Zunahme der Spannung π_1, würde dieses Verhältnis vergrössern, oder E_p würde rascher als E_s wachsen.

Allein diese Darlegung macht es nur wahrscheinlich, dass unter sonst gleichen Umständen die Grösse l_0 der E—N bei aufeinanderfolgenden Versuchsgruppen nahezu gleich sei. Sie unter allen Umständen als nur von π_1 und π_2 allein abhängig zu betrachten, ist nach den sonstigen Wahrnehmungen kaum zulässig. Es ist vielmehr anzunehmen, sie hänge auch, abgesehen von der Temperatur, was ja nach meinen früheren Versuchen (II. Cl. XV. Bd. III. Abt.) zweifellos ist, von der Dauer ϑ der vorhergegangenen Ruhe des Drahtes ab. Sobald man Versuche nicht in der geordneten Aufeinanderfolge, wie hier geschehen, vornehmen würde, dürfte sich dies voraussichtlich deutlich zeigen. Der letzte der obigen Ausdrücke liefert

$$C = \frac{1}{\pi_2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_p}\right) = \frac{1}{\pi_2^2}(\lambda - \delta).$$

Es müsste also mit π_2 auch $\lambda - \delta = \varrho$ konstant sein, was in unseren Versuchen auch thatsächlich ziemlich zutrifft. Sobald jedoch die Anordnung der Versuchsgruppen in Bezug auf π_1 und π_2 nicht nur, sondern auch in Rücksicht auf die Dauer ϑ der Ruhepausen des Drahtes von Gruppe zu Gruppe eine sehr wechselnde ist, so lässt sich ein konstantes ϱ nicht mehr erwarten. In der That stellt sich dies bei meinen früheren Versuchen (1885. Heft 1.) zweifellos heraus.

Die in Tabelle D dargestellten Versuche wurden mit dem stets gebrauchten Drahtexemplar ausgeführt. Die Zeitzwischenräume der einzelnen Versuchsgruppen sind ebenfalls 5 bis 10 Minuten. Sie wurden also hinsichtlich der Ruhepausen unter den gleichen Bedingungen wie die Versuche der Tab. C ausgeführt, jedoch in Bezug auf die Belastungen π_1 und π_2 davon wesentlich abweichend. Es liesse sich also erwarten, dass die nach Gl. 5) auf 0^0 reduzierten E—N, wie solche beobachtet

worden sind, auch aus Gl. 13) sich ergeben, wenn man L = 1,1 und für π_1 und π_2 die in Tab. D angeführten Werte nimmt. Die folgende Uebersicht enthält diese Werte in mm:

l_0 beobachtet:	l_0 berechnet:	Δ
0,0095	0,0077	0,0018
0,0298	0,0273	0,0025
0,0653	0,0561	0,0092

Im allgemeinen richten sich die berechneten Werte zwar nach den beobachteten, doch sind jene durchwegs kleiner als diese. Dies wird begreiflich, wenn man erwägt, dass zwischen den Versuchen der Tabelle C und D eine Ruhe des Drahtes vom 4. Februar bis 23. März, also von 46 Tagen liegt. Die Moleküle hätten darnach grössere Drehungen von ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage weg vollführt als bei den Versuchen der Tab. C, weil sie auch genügend Zeit gehabt haben, sich dieser Lage mehr zu näheren, indem den Versuchen der Tab. C fast unmittelbar jene der Tab. B vorausgingen. Der Wert der Konstanten C hängt somit voraussichtlich von der Dauer ϑ ab. Aus den beobachteten Werten l_0 der vorigen Uebersicht berechnet sich denn auch nach Gl. 13) C = 0,00072; 0,00063; 0,00068 und als Mittel hievon 0,00068, indes sich aus Tab. C 0,00058 (in mm) ergab. Die Differenz ist dem Einflusse der oben erwähnten langen Ruhepause zuzuschreiben. Nahe liegt es anzunehmen, der unbekannte Einfluss der Dauer der Ruhe des Drahtes mache sich mit der Zunahme der Summe $\pi_1 + \pi_2$ mehr geltend und hiedurch würde das Wachsen der Grösse Δ erklärlich.

§ 25. Die Bestimmung des longitudinalen E—M.

Aus den in § 23 dargelegten Ergebnissen geht hervor, dass die Bestimmung des longitudinalen E—M aus der ersten Dehnung, gleich viel, ob sofort nach dem Eintreten der vollen Wirkung der Belastung abgelesen, oder der grösste Teil der Nachwirkung abgewartet wird, zu einem ungenauen Zahlenwert für den Modul führt.

Der auf diese Weise berechnete Modul wird zu klein und ist, was viel mehr von Belang, in ganz erheblicher Art von der ständigen Belastung π_1 abhängig. Will man dennoch aus der ersten Gestalts-

änderung den E—M berechnen, so empfiehlt es sich, hiebei die erste Verkürzung statt der Verlängerung in Rechnung zu ziehen, wodurch man der Wahrheit sich sehr bedeutend nähert. Auf diese Weise ist, wie bereits erwähnt, Wertheim bei seinen bekannten Untersuchungen, abweichend von den jetzigen Vorschriften der physikalischen Handbücher, verfahren. Wenn sich auch bei ihm selbst an dem nämlichen Individuum Unterschiede in den Zahlenwerten des E—M ergeben haben, die in zufälligen Beobachtungsfehlern ihre Erklärung nicht finden können, so rührt dies, von den Temperaturverhältnissen abgesehen, augenscheinlich zum grossen Teil von den von mir konstatierten Einflüssen, die Wertheim nicht beachten konnte, her.

Einen konstanten Wert hat, wie die Ergebnisse dieser Untersuchung darthun dürften, bei gleicher Spannung π_1 und gleicher Amplitude der Dehnung, also gleichem π_2, nur der sekundäre E—M. Dieser Wert ist zu allen Zeiten bei sonst gleichen Umständen derselbe, welche anderen Längsgestaltänderungen der Körper zwischen zwei Versuchen mit den gleichen Werten von π_1 und π_2 erlitten haben mag.

Um also die sekundären E—M verschiedener Individuen einer Substanz vergleichsfähig zu erhalten, müsste eine Normalspannung π_1 vereinbart werden. Eine Vereinbarung einer bestimmten Dehnungsamplitude (π_2) wäre alsdann nicht mehr nötig, sobald als feststehend erachtet werden würde, dass ein für allemal $\pi_2 = \pi_1$ zu nehmen sei. Die Grösse π_1 dürfte zur Erlangung der nötigen Genauigkeit der Messung und der Sicherheit des Geradehaltens des Drahtes nicht zu klein sein und müsste so gewählt werden, dass bei 0^0 der Temperatur des Drahtes $\pi_1 + \pi_2 = 2\,\pi_1$ die Elastizitätsgrenze sicher nicht überschritten werden würde. Anderseits müsste $\pi_2 = \pi_1$ gross genug sein, um eine möglichst sichere Beobachtung zu erzielen. Für Kupfer beispielsweise könnte sich nach meinen Erfahrungen etwa $\pi_1 = 5$ kg empfehlen. Allein damit sind nicht alle Schwierigkeiten gehoben, wenn man auch auf die Vergleichung des sekundären E—M verschiedener Substanzen Rücksicht nimmt; denn bei diesen müsste die Normalspannung sich auch nach ihrer Elastizitätsgrenze richten. Würde man für die verschiedenen Metalle als Normalspannung π_1 jene voraussetzen, die gleiche Verlängerungen liefert, etwa dieselbe, welche 5 kg bei Kupfer hervorbringen, so ergäbe sich

beispielsweise für Platina $\pi_1 = 7{,}544$ kg, Blei $\pi_1 = 0{,}9793$ kg. Während der Wert für Platina für den praktischen Bedarf fast zu klein ist, ist der für Blei geradezu unbrauchbar; denn bei ca. 2 kg pro qmm Belastung reisst Blei schon. Auf diesem Weg wird sonach das Ziel schwerlich erreicht werden können und kaum ein anderer überbleiben, als die Elastizitätsgrenze zum Ausgangspunkt für die Normalspannung π_1 zu wählen. Nehmen wir an, es gäbe für die Elastizitätsgrenze ein sicheres Merkmal und es wäre die ihr entsprechende Dehnungsbelastung π_0 pro qmm des Querschnitts und 1 Meter Länge des Drahtes für die einzelnen Substanzen sicher bestimmt, so könnte man, vorausgesetzt dass, wie oben vorgeschlagen, $\pi_1 = \pi_2$ genommen würde, zur Fixierung des π_1 die Gleichung $3\pi_1 = \pi_0$ zu grunde legen. Es würde sonach ein Draht durch die Belastung $\pi_1 + \pi_2 = 2\pi_1$ Zweidritteile jener elastischen Dehnung erleiden, deren er überhaupt fähig ist. Das übrige Drittel böte die volle Sicherheit, dass man innerhalb der Elastizitätsgrenze arbeitet. Auf diese Weise ständen allerdings die Drähte verschiedener Substanzen nicht unter gleicher Spannung π_1, aber verschiedene Experimentatoren würden unter den gleichen jener Umstände arbeiten, die für die Bestimmung des sekundären E—M überhaupt in erster Linie in Betracht kommen. Alle Körper würden stets gleichsam an korrespondierenden Stellen ihrer grössten elastischen Dehnung geprüft, nämlich immer in demjenigen Zustande, in dem die Moleküle zu dieser grösstmöglichen elastischen Dehnung proportionale Verschiebungen durch die ständige Belastung π_1 bereits erlitten haben, und durch die Dehnungsbelastung π_2 noch erleiden werden. Abweichende Resultate könnten alsdann der zufälligen physikalischen und chemischen Beschaffenheit der Individuen gleicher Substanz mit einiger Berechtigung zugeschrieben werden. Nach dem dermalen üblichen, in den physikalischen Handbüchern vorgeschriebenen Verfahren, den gewöhnlichen longitudinalen E—M zu bestimmen, ist eine genügende Uebereinstimmung der Versuchsergebnisse nicht zu erwarten, und wo diese eintrifft, darf sie meist lediglich als zufällig erachtet werden. Nicht nur Temperatur, sondern auch die Grösse der ständigen Belastung π_1 und der Dehnungsbelastung π_2 ist auf den gewöhnlichen longitudinalen E—M sowohl, als auch auf den sekundären von Einfluss. Der Nachwirkungszustand, mit welchem der Draht in den

Versuch eintritt, ist für den Wert des gewöhnlichen E—M sehr von Belang, und erklärt die abweichenden Wertangaben desselben. Würde man die von Wertheim bestimmten Werte von π_0 zugrunde legen, so ergäbe sich als Normalspannungen π_1, also auch als Dehnungsbelastungen π_2 bei nicht angelassenen Metallen für Temperaturen zwischen 0^0 und 15^0 C. für:

Blei	0,08 kg	Zink	0,25 kg	Eisen	11,0 kg
Gold	4,0 „	Kupfer	4,0 „	pro qmm.	
Silber	4,0 „	Platina	9,0 „		

Für höhere Temperaturen müssten freilich diese Angaben sich ändern. Wenn es sich aber nur um die Kenntnis des sekundären E—M handelt, wird es sich überhaupt empfehlen, ihn für die Temperatur 0^0 zu bestimmen, und mit Zuhilfenahme der thermischen Konstanten seinen Wert für höhere Temperaturen zu berechnen.

Wenn man die Spannung π_1 des Drahtes fortgesetzt erhöht, so steigt sein sekundärer E—M. Es ist nicht ganz unwahrscheinlich, dass dieser sich einer bestimmbaren Grenze nähert und es könnte vielleicht sein, dass die dieser Grenze entsprechende Spannung π_1 ein geeignetes natürliches Merkmal für einen bestimmten elastischen Zustand abgäbe. Diese Andeutung müsste jedoch einer eingehenden experimentellen Prüfung noch unterzogen werden.

§ 26. Ergebnisse.

Um die Uebersicht der Ergebnisse dieser Arbeit zu erleichtern, fasse ich sie in Folgendem zusammen, wobei ich jedoch einige Male auch auf Resultate meiner früheren Arbeiten der Vollständigkeit halber zurückgreife. Zugleich verweise ich in der Regel auf die Paragraphen dieser Abhandlung, worin sich die näheren Ausführungen vorfinden.

1) Durch mehrmals wiederholtes An- und Abspannen oder Ab- und Anspannen eines bereits gespannten Drahtes kann dieser in vorübergehend vollkommen elastischen Zustand übergeführt werden. (§ 4.)

2) Während dieser Gestaltsänderungen ändert der Körper seine elastische Reaktion. Den longitudinalen Elastizitätsmodul (E—M), welchen der Körper vor der Deformation besitzt, heisse ich den primären E—M,

jenen nach derselben, im vollkommen elastischen Zustande also, den sekundären E—M. (§ 11.)

3) Der sekundäre E—M ist kleiner als der primäre, wenn die Deformationen mit einer Anspannung beginnen und mit einer Abspannung endigen; die Elastizität vermindert sich während dieses Vorganges. Bei Umkehrung des Versuches tritt eine Erhöhung der Elastizität ein. (§ 11.)

4) Die in Handbüchern der Physik gegebene Vorschrift, den longitudinalen E—M aus der ersten Dehnung zu berechnen, führt zu einem nicht sehr genauen Zahlenwert desselben. Einen genaueren, sich mehr dem des sekundären E—M nähernden Wert liefert die erste Verkürzung. (§ 23.)

5) Als richtiges Mass der elastischen Reaktion eignet sich der sekundäre E—M. (§ 15.)

6) Der Wert des gewöhnlichen — aus der ersten Dehnung oder Zusammenziehung berechnete — E—M hängt von der ständigen Spannung (π_1) ab; jedoch kann sich sein Wert sogar mit π_1 in verschiedenem Sinne ändern, jenachdem er aus der ersten Dehnung oder Verkürzung berechnet wird. (§ 23.)

7) Auch der sekundäre E—M ändert sich mit der Spannung π_1, jedoch mit dieser stets in gleichem Sinne und erreicht vermutlich ein Maximum für einen gewissen Wert von π_1. (§ 15. § 20. § 21.)

8) Selbst im Zustande temporärer vollkommener Elastizität befolgen die Körper das Proportionalitätsgesetz nicht genau. (§ 15. § 20. § 21.)

9) Mit Zunahme der durch die Mehrbelastung (π_2) erzeugten Dehnungsamplitude nimmt der sekundäre E—M bei konstanter ständiger Spannung (π_1) ab. (§ 15. § 20. § 21.)

10) Dagegen nimmt der sekundäre E—M bei zwei Versuchen mit der gleichen ständigen Belastung π_1 und der gleichen Mehrbelastung π_2 immer wieder den gleichen Wert an, welche Gestaltsänderungen bei beliebigen Werten von π_1 und π_2 der Draht zwischen dem ersten und zweiten Dehnungsversuch auch bestanden haben mag. (§ 15. § 20.)

11) Hierin (Ziff. 10.) liegt die eigentliche Bedeutung des sekundären E—M; denn diese Eigenschaft wohnt dem Körper, so lange er nicht in

den vollen elastischen Zustand übergeführt worden ist, nicht bei. Daraus erklären sich auch die erheblichen Differenzen in den Werten des nach dem gewöhnlichen Verfahren bestimmten longitudinalen E—M, die nicht nur bei der gleichen Substanz, sondern sogar bei dem nämlichen Versuchsobjekt gefunden werden. (§ 12.)

12) Selbst bei nicht überschrittener Elastizitätsgrenze nimmt ein gedehnter Draht, habe die dehnende Kraft dauernd oder nicht gewirkt, nach der Entlastung seiner frühern Länge nicht sogleich, sondern erst nach längerer Zeit wieder an. (§ 12. § 19.)

13) Behufs Erzielung einer Vergleichsfähigkeit der Resultate der experimentellen Bestimmung des longitudinalen E—M ist es notwendig, für jede Substanz eine Normalspannung π_1 pro qmm — Belastung zum Geradehalten — festzusetzen, bei welcher verschiedene Experimentatoren untersuchen. (§ 25.)

14) Desgleich ist auch für jede Substanz die Mehrbelastung π_2 pro qmm zu vereinbaren; es empfiehlt sich, für jede Substanz $\pi_2 = \pi_1$ zu nehmen. (§ 25.)

15) Nur bei Beachtung der in Ziff. 13) und 14) gemachten Vorschläge ist bei thatsächlich gleicher elastischer Beschaffenheit zweier Körper der gleichen Substanz auch der gleiche sekundäre E—M zu erwarten. Diese Vorsicht ist in noch höherem Masse für den gewöhnlichen E—M (aus der ersten Dehnung oder Verkürzung berechnet) geboten, der aber selbst dann kein sehr zuverlässiges Mass der elastischen Reaktion bietet. (§ 23.)

16) Als alleinige Ursache der Abweichung der Grösse der elastischen Dehnung vom Proportionalitätsgesetze kann die die Dehnung begleitende Querkontraktion nicht angesehen werden. (§ 22.)

17) Die durch mehrmals wiederholte Dehnung und Zusammenziehung des Drahtes bewirkte Temperaturerhöhung desselben beeinflusst zwar in geringem Grade die Messung der Dehnung und Verkürzung in gleichem Sinne wie die Querkontraktion; jedoch auch dieser Einfluss kann nicht als alleinige Ursache der Abweichung vom Proportionalitätsgesetze betrachtet werden. (§ 22.)

18) Die Quantität beider in Ziff. 16) und 17) erwähnten Einflüsse zusammen, obwohl in gleichem Sinne wirkend, reicht kaum hin, um die Abweichung vom Proportionalitätsgesetze zu erklären. (§ 22.)

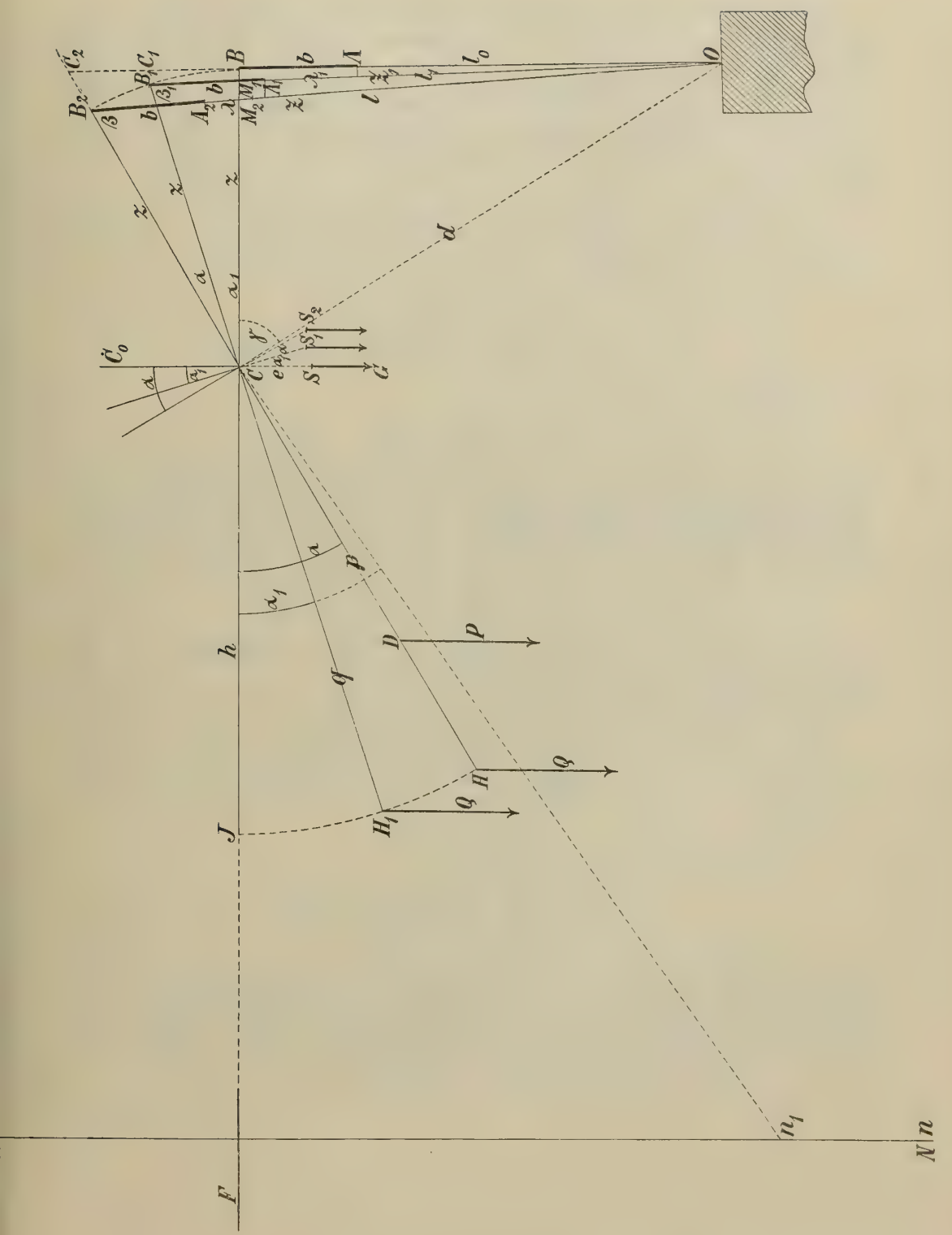
19) Der Grund dieser Abweichung dürfte in der mit der Zunahme der Dehnungsamplitude sich erhöhenden elastischen Nachwirkung zunächst zu suchen sein, da diese die elastische Reaktion vermindert. (§ 22.)

Anhang.

Die Theorie des zu den vorhergehenden Versuchen verwendeten Apparates.

Ein Bild der Vorrichtung findet sich in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften 1882. Heft 4. Die nachfolgende Untersuchung nimmt auf die hier beigefügte schematische Zeichnung Bezug.

Die Vorrichtung ist ein ungleicharmiger, in C unterstützter Hebel B J vom Gewichte G. Das Drahtstück O A ist bei O und A eingeklemmt. Der Punkt O ist fest. Anfänglich ist B J horizontal. Senkrecht zu B J steht der Spiegel $C C_0$. Die Spiegelskala N N ist senkrecht, und rechtwinkelig dazu steht das Ablesefernrohr F, in dessen horizontalen Achsenebene der Nullpunkt liegt. O B ist vertikal. Durch die Anfangsbelastung (ständige Belastung) Q kommt B J in die Lage $B_1 H_1$ und der Draht in die Richtung $O B_1$. Infolge des Anhängens eines weiteren Gewichtes P im Punkte D erhält die Achse der Hebelstange die Lage $B_2 H$ und der Draht die Richtung $O B_2$. Alle in Betracht kommenden Dimensionen des Apparates sind in Skalenteilen gemessen. Die Entfernung der Skala N N vom Spiegel $C C_0$ sei h. Ferner ist $C B = z$, $C H_1 = C H = q$, $C D = p$ und $C S = e$ die Entfernung des Schwerpunktes S des Hebels samt dem um B drehbaren Stück $B A = b$ von C. Durch Anhängen des Gewichtsstückes Q (Kilogramm) in H_1 dreht sich die Achse der Hebelstange aus der horizontalen Lage um den Winkel α_1 und es entsteht zugleich der Winkel β_1; im Fernrohr wird nun der Skalenteil n_1 abgelesen.


C2
C1
B
b
Λ
l0
O
B2
B1
β1
b
A2
b
λ
M2
M1
λ1
x1
x
x
x
x
l
l1
d
a
a1
C0
α
α1
C
e
r
S1
S2
S
C1
a
P
α1
h
D
P
q
Q
H
Q
H1
J
n1
F
N
n

Die Anbringung des Laststückes P im Punkte D gibt entsprechend die Winkel α und β, sowie den abgelesenen Skalenteil n. Es ist l_0 die Länge des ungespannten Drahtes; l_1 ist die Länge und Z_1 die spannende Kraft, unter welcher der Draht in der Lage OB_1 steht; λ_1 sei die hiebei erlittene Verlängerung. Die gleiche Bedeutung haben l und Z, wenn der Draht die Stellung OB_2 einnimmt, wobei die Verlängerung λ der Zugänderung $Z - Z_1$ entspricht.

Es ergeben sich für die beiden Gleichgewichtslagen B_1H_1 und B_2H des Hebels die Gleichungen:

$$Q \cdot q \cos\alpha_1 = G \cdot e \sin\alpha_1 + Z_1 \cdot z \sin\beta_1 \qquad 1)$$

$$Q \cdot q \cos\alpha + P \cdot p \cos\alpha = G \cdot e \sin\alpha + Z \cdot z \sin\beta \qquad 2).$$

Hieraus ergibt sich:

$$Z - Z_1 = \frac{P\,p}{z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{Q\,q}{z} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) - \frac{G\,e}{z}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) \quad 3).$$

Der Hebel BJ einschliesslich BA ist auf indifferentes Gleichgewicht gestellt, so dass $e = o$ ist. Hiedurch wird:

$$Z - Z_1 = \frac{P\,p}{z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{Q\,q}{z}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) \qquad 4).$$

Ist nun E der Elastizitätsmodul und F der Querschnitt des gespannten Drahtes, so hat man:

$$\lambda = \frac{l_1 \cdot (Z - Z_1)}{E \cdot F} \qquad 5)$$

und daraus:

$$Z - Z_1 = \frac{E \cdot F \cdot \lambda}{l_1} \qquad 6).$$

Aus Gl. 4) und 6) ergibt sich:

$$\lambda = \frac{l_1}{E} \cdot \frac{P\,p}{z\,F} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{l_1}{E} \cdot \frac{Q\,q}{z\,F}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) \qquad 7).$$

Der Zug Z setzt sich zusammen aus dem Zuge Z_Q, herrührend von Q (im Punkte H) und jenem Z_P, herrührend von P; dem Zuge Z_Q entspricht die Verlängerung λ_1', dem Zuge Z_P jene λ'. Die zu bestimmende Grösse ist somit λ', indes nur λ direkt gemessen werden kann.

Nun bestehen ohne Berücksichtigung der Querschnittkontraktion die Relationen:

$$Z_Q \cdot z \sin\beta = Q \cdot q \cos\alpha, \text{ sowie } \frac{l_0 \cdot Z_Q}{E \cdot F} = \lambda_1';$$

$$Z_P \cdot z \sin\beta = P \cdot p \cos\alpha, \text{ sowie } \frac{l_0 \cdot Z_P}{E \cdot F} = \lambda';$$

$$Z_1 \cdot z \sin\beta_1 = Q \cdot q \cos\alpha_1, \text{ sowie } \frac{l_0 \cdot Z_1}{E \cdot F} = \lambda_1.$$

Diese Gleichungen liefern paarweise die Werte:

$$\lambda_1' = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{Q\,q}{F\,z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \qquad 8)$$

$$\lambda' = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{P\,p}{F\,z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \qquad 9)$$

$$\lambda_1 = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{Q\,q}{F\,z} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1} \qquad 10)$$

und man sieht, dass das Produkt der zweiten und dritten Faktoren die Grösse der spannenden Kraft der Flächeneinheit des Querschnittes in der jeweiligen Stellung des Drahtes ausdrückt. Diese spannende Kraft ist somit veränderlich. Setzt man die Konstanten:

$$\frac{Q\,q}{F\,z} = \pi_1 \text{ und } \frac{P\,p}{F\,z} = \pi_2,$$

so bedeuten π_1 und π_2 die spannenden Kräfte, welche durch die Gewichte Q und P in der Flächeneinheit des Querschnittes hervorgebracht würden, wenn während der Anspannung der Draht seine ursprüngliche vertikale Lage beibehielte. Darnach ergibt sich:

$$\lambda_1' = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\lambda' = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\lambda_1 = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}$$

Es gestaltet sich die Gleichung 7) um in:

$$\lambda = \frac{l_1}{E} \cdot \pi_2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{l_1}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{l_1}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1} \qquad 11)$$

Führt man die obigen Werte in 11) ein, so wird:

$$\lambda = \frac{l_1}{l_0} \cdot \lambda' + \frac{l_1}{l_0} \cdot \lambda_1' - \frac{l_1}{l_0} \cdot \lambda_1, \qquad 12)$$

woraus sich

$$\lambda' = \frac{l_0}{l_1} \lambda + (\lambda_1 - \lambda_1') \qquad 13)$$

ergibt.

Da aber $l_1 = l_0 + \lambda_1$ und $l = l_1 + \lambda = l_0 + \lambda_1 + \lambda$ ist, so geht Gl. 13) über in:

$\lambda' = \frac{l_0}{l_0 + \lambda_1} \cdot \lambda + (\lambda_1 - \lambda_1')$ oder

$\lambda' = \left(1 - \frac{\lambda_1}{l_0}\right) \lambda + (\lambda_1 - \lambda_1')$ und, wenn man das Glied $\frac{\lambda}{l_0} \cdot \lambda_1$ vernachlässiget:

$$\lambda' = \lambda - (\lambda_1' - \lambda_1). \qquad 14)$$

Nimmt man somit für die zu messende Grösse λ' den gemessenen Wert λ, so frägt es sich, wie gross der Fehler

$$f = \lambda_1' - \lambda_1 = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) \qquad 15) \text{ ist.}$$

Setzen wir: $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1} = \chi$, so ist zunächst χ zu ermitteln und der Fehlerbetrag

$$f = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \cdot \chi. \qquad 16)$$

Wenn man nun $OC = d$ und $\sphericalangle OCB = \gamma$ setzt, so ist:

$$\sin\beta_1 = \frac{d}{OB_1} \cdot \sin(\gamma + \alpha_1) = \frac{1}{OB_1}[OB \cdot \cos\alpha_1 + z \sin\alpha_1], \text{ ferner:}$$

$$\sin\beta = \frac{d}{OB_2} \cdot \sin(\gamma + \alpha) = \frac{1}{OB_2}[OB \cdot \cos\alpha + z \sin\alpha].$$

Folglich wird:

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{OB_1 \cdot \cos\alpha_1}{OB \cdot \cos\alpha_1 + z \sin\alpha_1} = \frac{OB_1}{OB + z\,tg\,\alpha_1} = \frac{OB_1}{OC_1} \text{ und}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{OB_2 \cdot \cos\alpha}{OB \cdot \cos\alpha + z \sin\alpha} = \frac{OB_2}{OB + z\,tg\,\alpha} = \frac{OB_2}{OC_2}.$$

Nun ist: $OB = b + l_0 = L$

$OB_1 = L + \lambda_1$

$OB_2 = L + \lambda_1 + \lambda$ daher:

$$\chi = \frac{L + \lambda_1 + \lambda}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{L + \lambda_1}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} . \qquad 17)$$

Für λ_1 und λ genügen vorerst angenäherte Werte. Nun ist $\mathrm{tg}\,2\alpha_1 = \frac{n_1}{h}$ und, da $\measuredangle C M_1 B_1$ als rechtwinkelig angesehen werden kann, $\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{z}$. Weil selbst $\sphericalangle 2\alpha_1$ nach den thatsächlichen Verhältnissen noch als klein angenommen werden darf, so hat man:

$$2\alpha_1 = \frac{n_1}{h} \text{ und}$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{z}, \text{ sowie entsprechend:}$$

$$2\alpha = \frac{n}{h} \text{ und}$$

$$\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda}{z}$$

Hieraus berechnet sich:

$$\lambda_1 = \frac{z}{2h} \cdot n_1 = \eta\, n_1 \text{ und}$$

$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) = \eta(n - n_1), \text{ wenn}$$

$$\frac{z}{2h} = \eta \text{ gesetzt wird.}$$

Die Gl. 17) liefert, wenn man die vorigen Werte darin substituiert:

$$\chi = \frac{L + \eta n}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{L + \eta n_1}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} \text{ oder}$$

$$\chi = \frac{1 + \frac{\eta n}{L}}{1 + \frac{z\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L}} - \frac{1 + \frac{\eta n_1}{L}}{1 + \frac{z\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}{L}} . \qquad 18)$$

Wird beachtet, dass man $\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda}{z}$ und $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{z}$ nehmen darf, so erkennt man die Kleinheit der von 1 verschiedenen Grössen in Gl. 18) und es geht diese über in:

$$\chi = \frac{\eta}{L}(n - n_1) - \frac{z}{L}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1). \qquad 19)$$

In Rücksicht auf die bekannte Beziehung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{2h}\left[1 - \left(\frac{n}{2h}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{n_1}{2h}\left[1 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^2\right] \text{ reduziert sich Gl. 19) auf:}$$

$$\chi = \frac{z}{L}\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3\right] \qquad 20) \text{ oder:}$$

$$\chi = \frac{z}{L} \cdot \frac{1}{(2h)^3}(n^3 - n_1^3) \qquad 21).$$

Nach Gl. 16) ist sonach

$$f = \frac{\pi_1}{E} \cdot \frac{z}{(2h)^3} \cdot \frac{l_0}{b + l_0}(n^3 - n_1^3) \qquad 22).$$

In dem verwendeten Apparate ist: $z = 35{,}4$ Skalenteile, $h = 2806$ Sktl., $b = 158$ Sktl. und l_0 darf durchschnittlich $= 547$ Sktl. also $L = 705$ Sktl. genommen werden. Darnach ergibt sich:

$$\frac{z}{(2h)^3} \cdot \frac{l_0}{b + l_0} = \frac{35{,}4}{(2 \cdot 2806)^3} \cdot \frac{547}{547 + 158} = 0{,}000\,000\,000\,1554.$$

Somit ist der Fehler

$$f = \frac{\pi_1}{E} \cdot 0{,}000\,000\,000\,1554\,(n^3 - n_1^3) \qquad 23).$$

Bei Metallen wird $\frac{\pi_1}{E}$ den Wert 0,001 nicht erreichen; aber selbst für diesen Wert dürfte $n^3 - n_1^3 = 10^7$ sein, und es würde

$$f = 0{,}0001554 \text{ Sktl.} = 0{,}0001554 \cdot 2 \text{ mm} = 0{,}000311 \text{ mm}.$$

Der Fehler f würde somit bei weitem noch kein 0,001 mm betragen. Die Dehnung 0,001 mm ist aber bei der in Rede stehenden Vorrichtung die kleinste noch mit einiger Sicherheit messbare; denn es ist:

$\lambda_1 = \frac{z}{2h} \cdot n_1 = \frac{\cdot\ 35{,}4}{2 \cdot 2806} = 0{,}0063079 \cdot n_1$ und, weil 0,1 Sktl. noch geschätzt werden kann, für $n_1 = 0{,}1$ $\quad \lambda_1 = 0{,}0063079 \cdot 0{,}1$ Sktl. $= 0{,}0013$ mm.

Es darf also in Gl. 14) das Glied $\lambda_1' - \lambda = f$ vernachlässiget werden. Um λ' zu bestimmen, kommt daher alles darauf an, λ möglichst genau

zu messen, um so die von P allein herrührende Dehnung λ' zu erhalten.

Der Wert von λ muss durch die abgelesenen Skalenteile n und n_1, sowie die Konstanten h, z und L des Apparates ausgedrückt werden. Die Formel 11) eignet sich hiezu wegen der darin enthaltenen Grösse E nicht. Es ist vielmehr λ auf rein geometrischem Wege, wie folgt, zu ermitteln. Nun ist:

$$O B_2 - O B_1 = (l_0 + \lambda_1 + \lambda + b) - (l_0 + \lambda_1 + b) = \lambda, \quad 24)$$

und folglich ist $O B_1$ und $O B_2$ zu berechnen.

Ferner ist:

$$O B_1^2 = d^2 + z^2 - 2 d z \cos(\gamma + \alpha_1) \quad 25)$$

$$O B_1^2 = d^2 + z^2 - 2 z^2 \cos \alpha_1 + 2 z \cdot L \cdot \sin \alpha_1. \quad 26)$$

Bekanntlich ist ferner:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{n_1}{2h}\left[1 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^2\right] \text{ und } \sin \alpha_1 = \frac{n}{2h}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{n_1}{2h}\right)^2\right],$$

$$\text{folglich ist } \cos \alpha_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^2.$$

Diese Werte in Gl. 26) eingesetzt und reduziert wird:

$$O B_1^2 = \left[L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2 - 3 z L \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3 \text{ und analog:}$$

$$O B_2^2 = \left[L + z\left(\frac{n}{2h}\right)\right]^2 - 3 z L \cdot \left(\frac{n}{2h}\right)^3.$$

Es ist also:

$$O B_1 = \sqrt{\left[L + z \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2 - 3 z L \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3}$$

$$O B_1 = \left[L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]\left\{1 - \frac{3 z L \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3}{\left[L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Der Subtrahend des Radikanden ist gegen die 1 klein, daher:

$$O B_1 = \left[L + z \cdot \frac{n_1}{2h}\right] \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 z \cdot L \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3}{\left[L + z \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2}\right\} \quad 27)$$

und ebenso:

$$O B_2 = \left[L + z \cdot \frac{n}{2h}\right] \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3z \cdot L \cdot \left(\frac{n}{2h}\right)^3}{\left[L + z\left(\frac{n}{2h}\right)\right]^2}\right\} . \qquad 28).$$

Werden diese Werte in Gl. 24) substituiert, so liefert sie:

$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2} z \left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 \cdot \frac{L}{L + z\left(\frac{n}{2h}\right)} - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3 \cdot \frac{L}{L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)}\right]. \qquad 29).$$

Da jedoch $\frac{z \cdot \frac{n_1}{2h}}{L}$ und $\frac{z \cdot \frac{n}{2h}}{L}$ gegen 1 kleine Werte sind, ist:

$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2} \cdot z \cdot \left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 \left(1 - \frac{z \cdot \frac{n}{2h}}{L}\right) - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3 \left(1 - \frac{z \cdot \frac{n_1}{2h}}{L}\right)\right] \qquad 30)$$

$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2} \cdot z \left\{\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3\right] - \frac{z}{L}\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^4 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^4\right]\right\} \qquad 31).$$

Um die Formel für die Zahlenrechnung geeigneter zu gestalten, geben wir ihr die Form:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{h}(n - n_1) - \frac{3}{16} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3) + \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{z^2}{h^4}(n^4 - n_1^4) \qquad 32).$$

Dies ist der Ausdruck für $\lambda = O B_2 - O B_1$, wobei auf die während der Dehnung des Drahtes entstehende Abweichung seiner Richtung von der ursprünglichen, vertikal vorausgesetzten, Rücksicht genommen ist. Es kann dieser Ausdruck gegenüber den beiden nachfolgenden die grössere Genauigkeit als Vorzug beanspruchen.

Betrachtet man nämlich $\measuredangle C M_1 B_1$ und $\measuredangle C M_2 B_2$ als rechtwinkelig, so ist:

$$\lambda = M_2 B_2 - M_1 B_1 = z(\sin\alpha - \sin\alpha_1) \text{ oder}$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z}{h}(n - n_1) - \frac{3}{16} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3) \qquad 33).$$

Ein Vergleich des Ausdruckes 33) mit jenem 32) lässt die Bedeutung des 3. Gliedes in dem ersteren erkennen.

Nimmt man zur Auffindung von λ statt der Strecken $M_1 B_1$ und $M_2 B_2$ die Sehnen der entsprechenden Bogen $B B_1$ und $B B_2$, so ergibt sich

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z}{h}(n - n_1) - \frac{11}{64} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3) \qquad 34).$$

Aus 34) berechnet sich sonach λ um den Betrag $\frac{1}{64} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3)$ grösser als aus 33); Gl. 34) schliesst sich genauer als 33) dem Ausdrucke 32) an.

Zur Bestimmung der Zahlenwerte der Konstanten in den Formeln 32), 33) und 34) haben wir bekanntlich:

$$z = 35{,}4 \text{ Sktl.}, \quad h = 2806 \text{ Sktl.}, \quad L = 705 \text{ Sktl.}$$

Darnach wird:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{h} = 0{,}0063079;$$

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{z}{h^3} = 0{,}000\,000\,000\,30042;$$

$$\frac{3}{32} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{z^2}{h^4} = 0{,}000\,000\,000\,000\,2688.$$

Somit gestaltet sich Gl. 32) zu:

$$\lambda = 63079 \cdot 10^{-7}(n - n_1) - 30042 \cdot 10^{-14}(n^3 - n_1^3) + 26880 \cdot 10^{-17}(n^4 - n_1^4) \quad 35).$$

Ferner ist: $\frac{11}{64} \cdot \frac{z}{h^3} = 0{,}000\,000\,000\,27539$; also geht Gl. 34) über in:

$$\lambda = 63079 \cdot 10^{-7}(n - n_1) - 27539 \cdot 10^{-14}(n^3 - n_1^3) \qquad 36).$$

Die Gl. 35) wurde bei der vorliegenden Arbeit ausschliesslich benützt [Gl. 4. § 9.]. Aus Gl. 32) ersieht man, dass nur das letzte Glied derselben von L abhängig ist; ferner zeigt $\frac{d\lambda}{dL}$, wie ganz erhebliche Fehler bei der Messung von L noch gar keinen Einfluss auf das Resultat bei der Berechnung von λ haben würden.

Tabellen.

Tabelle A.

Untersuchte Substanz: **Kupfer.**

L = 1,100 m
F = 0,3696 qmm
d = 0,686 mm

Gruppe	τ_0 u. τ_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_ν	b_ν	c_ν	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	4,55	4,60	4,60	6,2			1,6234				27./1. 87
	nach .	.. 0 ..	. Min.		67,5			8,8946			
	„ .	.. 5 ..	. „		68,7	8,8			+ 62,07		
	„ .	. 10 .	. „			8,0			— 61,14	—	
	4,90	5,00	5,00								
II	5,00	4,90	5,00	8,2	68,6	8,9	„				„
					68,6	9,0		„			
					68,6	9,0					
					68,6	9,1				—	
	5,20	5;10	5,25		68,9	9,0			59.70		
I	4,15	4,10	3,80	4,3			„				28./1. 87
	nach .	.. 0 ..	. Min.		64,9			„			
	„ .	. 15 .	. „		66,9	7.1			+ 61,82		
	„ .	. 30 .	. „			6,7			— 60,99	—	
	4,70	4,65	4,60								
II	4,70	4,65	4,60	6,7	66,9	7,1	„				„
					67,0	7,3		„			
					67,1	7,4					
					67,1	7,5				—	
	5,03	4,90	5,00		67,1	7,6			59,60		

Tabelle D.

Untersuchte Substanz: **Kupfer.**

L = 1,100 m
F = 0,3696 qmm
d = 0,686 mm

Gruppe	τ_0 u. τ_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_ν	b_ν	c_ν	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	8,08	8,10	7,80	12,3	62,8	13,2	1,6234				23./3. 87
					62,9	13,3		7,3938			
					63,0	13,7					
					63,1	13,8				0,76	
	8,43	8,20	8,18		63,1	13,8			49,33		
II	8,80	8,38	8,38	55,9	93,3	58,0	7,7110				„
					94,1	58,2		5,5527			
					94,2	58,5					
					94,5	58,7				2,38	
	9,18	8,53	8,58		94,7	58,8			35,63		
III	9,23	8,70	8,65	116,2	155,6	120,2	15,8280				„
					156,4	121,0		5,5527			
					157,0	121,2					
					157,1	121,5				5,22	
	9,50	8,80	8,80		157,2	121,8			35,65		

Untersuchte Substanz: Kupfer. **Tabelle B.** L = 1,100 m F = 0,3696 qmm d = 0,686 mm

Gruppe	τ_0 u. τ_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_ν	b_ν	c_ν	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	4,45	4,43	4,10	5,0	29,0	5,7	1,6234				29./1. 87
					29,0	5,9		3,5813			
					29,1	5,9					
					29,2	5,9				0,31	
	4.60	4,58	4,50		29,2	6,0			23,48		
II	4,60	4,58	4,50	5,9	43,2	6,6	„				„
					43,2	6,7		5,5527			
					43,3	6,7					
					43,4	6,8				0,52	
	4,83	4,80	4,80		43,4	6,8			36,63		
III	4,83	4,80	4,80	6,7	56,6	7,1	„				„
					56,7	7,2		7,3938			
					56,8	7,2					
					56,8	7,2				0,60	
	5,15	5,05	4,93		56,9	7,3			49,63		
I	3,18	3,13	3,30	18,0	41,8	18,9	3,6526				30./1. 87
					41,9	19,0		3,5813			
					41,9	19,0					
					41,9	19,0				0,06	
	3,50	3,40	3,80		42,0	19,0			22,95		
II	3,50	3,40	3,80	19,1	56,0	19,9	„				„
					56,0	19,9		5,5527			
					56,0	19,9					
					56,0	20,0				0,37	
	3,80	3,80	4,10		56,1	20,0			36,08		
III	3,80	3,80	4,10	20,0	69,4	20,6	„				„
					69,6	20,7		7,3938			
					69,6	20,8					
					69,7	20,9				0,86	
	4,08	4,08	4,23		69,7	20,9			48,83		
I	3,20	3,15	2,98	47,9	71,4	49,0	7,7110				31./1. 87
					71,6	49,1		3,5813			
					71,8	49,2					
					71,8	49,3				0,76	
	3,40	3,30	3,40		71,9	49,4			22,55		
II	3,40	3,30	3,40	50,0	86,3	50,7	„				„
					86,4	50,8		5,5527			
					86,7	50,9					
					86,8	51,0				1,41	
	3,85	3,65	3,85		86,9	51,0			35,88		
III	3,85	3,65	3,85	50,9	100,1	52,0	„				„
					100,6	52,1		7,3938			
					100,8	52,4					
					100,9	52,7				4,43	
	4,20	4,20	4,13		101,0	52,7			48,33		
I	3,40	3,50	3,38	112,9	137,2	115,1	15,8280				1./2. 87
					137,4	115,3		3,5813			
					137,7	115,5					
					137,7	115,7				1,90	
	3.68	3,70	3,88		137,8	115,7			22,10		
II	3,68	3,70	3,88	115,8	152,8	117,4	„				„
					153,1	117,8		5,5527			
					153,1	117,9					
					153,4	118,0				3,52	
	4,00	4,05	4,25		153,6	118,1			35,50		
III	4,00	4,05	4,25	118,0	168,0	120,1	„				„
					168,6	120,7		7,3938			
					168,9	120,8					
					169,0	121,0				6,15	
	4,30	4,40	4,40		169,2	121,1			48,10		

Untersuchte Substanz: **Kupfer.** **Tabelle C.** L = 1,100 m F = 0,3696 qmm d = 0,686 mm

Gruppe	r_0 u. r_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_p	b_p	c_p	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	3,50	3,60	3,50	10,4	34,0	10,7	1,6234				2./2. 87
					34,0	10,7		3,5813			
					34,0	10,8					
					34,1	10,9				— 0,14	
	3,73	3,83	3,90		34,2	11,0			23,25		
II	3,90	3,98	4,13	25,0	48,9	25,9	3,6526				„
					49,0	26,0		„			
					49,0	26,0					
					49,0	26,0				0,73	
	3,95	4,10	4,30		49,0	26,0			23,00		
III	4,13	4,25	4,38	53,9	77,8	55,1	7,7110				„
					77,9	55,2		„			
					77,9	55,3					
					78,0	55,4				1,28	
	4,28	4,40	4,45		78,0	55,4			22,63		
IV	4,38	4,55	4,53	113,0	137,2	115,2	15,8280				„
					137,7	115,7		„			
					137,9	115,9					
					138,0	115,9				2,80	
	4,50	4,70	4,60		138,2	116,0			22,18		
I	4,15	4,30	4,00	10,0	47,1	10,4	1,6234				3./2. 87
					47,2	10,6		5,5527			
					47,2	10,7					
					47,4	10,7				0,17	
	4,38	4,48	4,40		47,5	10,9			36,70		
II	4,48	4,58	4,55	24,7	61,9	25,9	3,6526				„
					62,0	25,9		„			
					62,1	26,0					
					62,1	26,0				0.89	
	4,65	4,72	4,75		62,1	26,0			36,10		
III	4,70	4,80	4,80	53,3	91,0	55,2	7,7110				„
					91,1	55,4		„			
					91,2	55,6					
					91,4	55,7				2,26	
	4,83	4,93	4,90		91,6	55,8			35,80		
IV	4,90	5,03	4,98	112,7	151,4	116,2	15,8280				„
					152,1	116,7		„			
					152,3	117,0					
					152,7	117.2				4,49	
	5,10	5,18	5,10		153,0	117,5			35,63		
I	5,50	5,75	5,25	12,1	62,1	12,9	1,6234				4./2. 87
					62,2	12,9		7,3938			
					62,2	13,0					
					62,3	13,0				0,13	
	5,70	5,90	5,70		62,4	13,1			49,33		
II	5,80	6,00	5,80	26,8	76,9	28.1	3,6526				„
					76,9	28,3		„			
					77,1	28,4					
					77,3	28,5				1,28	
	6,00	6,15	6,00		77,4	28.5			48,88		
III	6,08	6,23	6,10	55,9	106,5	58,3	7,7110				„
					106,8	58,4		„			
					107,0	58,8					
					107,1	58,9				2,83	
	6.25	6,38	6,20		107,2	59,0			48,25		
IV	6,28	6,45	6,20	115,0	168,1	120,3	15,8280				„
					168,9	120,9		„			
					169,4	121,6					
					169,8	122.0				6,73	
	6,45	6,60	6,30		170,0	122,0			48,00		

Ueber den

absoluten elektrischen Leitungswiderstand

des

Quecksilbers.

(Mit 3 Tafeln.)

Von

Friedrich Kohlrausch.

---

1. Ueber den absoluten elektrischen Leitungswiderstand des Quecksilbers oder, wie man jetzt zu sagen gewohnt ist, über die Quecksilbercapacität des Ohms, liegt ausser den älteren Arbeiten [1]) eine reiche Fülle von Literatur aus den achtziger Jahren vor.[2]) In diesen Arbeiten werden erstlich neue Methoden der absoluten Widerstandsbestimmung gegeben oder auch die älteren von Wilh. Weber, Kirchhoff, L. Lorenz stammenden Methoden nach verschiedenen Gesichtspunkten abgeändert und vervollkommnet. Eine andere grosse Gruppe der Abhandlungen beschränkt sich nicht auf diesen theoretischen Inhalt, sondern führt eine absolute Widerstandsbestimmung wirklich aus, etwa in der Art eines Vorstudiums der Anwendung der Methode und meistens unter Vergleichung des absolut gemessenen Widerstandes mit einer Siemens'schen Einheit. Diese Arbeiten, wenn sie auch kein abschliessendes Resultat bieten, verfolgen also den sehr verdienstlichen Zweck, die Schwierigkeiten zu beseitigen. Von Bedeutung sind ferner diejenigen Untersuchungen, welche sich besonders auf die Verwendung des Quecksilbers zu Normalwiderständen richten und meist die bisher gebrauchten Einheiten von Siemens und der British Association neu auf diesen Leiter zurückführen.

Die Arbeit wurde der k. Akademie der Wissenschaften im Auszuge vorgelegt am 7. Januar 1888. Die beiden Resultate haben sich bei der nochmaligen Revision der Rechnungen einander um 0,0002 angenähert. Der Schlusswert ist ungeändert geblieben.

1) Von Wilhelm Weber, Kirchhoff, dem Comittee der British Association, L. Lorenz, Rowland, Fried. Weber, F. Kohlrausch.

2) Von Baille, Dorn, Foster, Fröhlich, Glazebrook und Dodds, Glazebrook und Sargant, Himstedt, Joubert, Lenz, Lenz und Restzoff, Lippmann, L. Lorenz, Mascart mit de Nerville und Benoit, Lord Rayleigh, Rayleigh und Mrs. Sidgwick, Rayleigh und Schuster, Roiti, Rowland, Siemens und Halske, Strecker, Friedr. Weber, Heinr. Weber, Wilh. Weber und Zöllner, G. Wiedemann, Wild, F. Kohlrausch.

Eine letzte, doch nicht so zahlreiche Gruppe von Arbeiten endlich stellt sich die praktisch abschliessende Aufgabe, einen endgiltigen Wert der absoluten Widerstandseinheit, in Quecksilber ausgedrückt, zu erzielen, einerseits kalibrirte Quecksilberwiderstände herzustellen, andrerseits die absolute Messungsmethode durchzuführen, die Schwierigkeiten nicht nur kritisch zu behandeln, sondern dieselben zu überwinden.

Es ist durch die Ergebnisse dieser Arbeiten sehr wahrscheinlich geworden, dass der von der elektrischen Conferenz im Jahre 1884 einstweilen festgesetzte Wert 1 Ohm = 1,06 m/mm^2 Quecksilber 0^0 etwas zu klein ist. Trotz der reichen Literatur aber besteht noch keine genügende Sicherheit über den wahren Quecksilberwert des Ohm. Es hat sich gezeigt, dass die einmal ausgesprochene Behauptung, absolute Widerstandsmessungen lassen sich mit sehr geringen Mitteln in einer Schärfe und Zuverlässigkeit ausführen, die nur in wenigen Gebieten der Physik zu erreichen ist, erst noch bewiesen werden muss. Gerade in den neueren Arbeiten findet man die Anerkennung der Schwierigkeiten genauer Messung rückhaltlos ausgesprochen und macht die Erfahrung, dass grosse Hilfsmittel angewandt werden um diese Schwierigkeiten zu überwinden, was besonders (§ 9) durch die grosse Anzahl der Fehlerquellen erschwert wird.

In Erfüllung des von der königlichen Akademie mir erteilten und durch die Bewilligung der Mittel von den höchsten Staatsbehörden ermöglichten Auftrages beehre ich mich die beiden in den Jahren 1886 und 1887 im physikalischen Laboratorium der Universität Würzburg ausgeführten Ohmbestimmungen jetzt eingehend vorzulegen.

Wahl der Methode.

2. Da die meisten bisher veröffentlichten Arbeiten hier noch mehr fast als auf anderen Gebieten ergeben haben, dass man erst im Laufe der Arbeit die Klippen einer Methode erkennt, so hatte ich für die mir gestellte Aufgabe ein Verfahren zu wählen, welches bereits möglichst durchgearbeitet und in seinen Schwierigkeiten blossgestellt war, und über

welches ich aus eigener Erfahrung schon ein Urteil besitzen konnte. Ich würde diejenige Methode gewählt haben, die ich schon vor längerer Zeit einmal durchgeführt hatte und von der ich später gezeigt habe, wie man dieselbe von einigen Hindernissen befreien kann.[1]) Indessen war das zur Verfügung stehende eisenfreie Observatorium des physikalischen Instituts zu Würzburg für die gleichzeitige Aufstellung eines Erdinduktors und Galvanometers nebst den zugehörigen erdmagnetischen Instrumenten etwas knapp im Platze.

So habe ich die nächstverwandte Weber'sche sogenannte Dämpfungsmethode mit einer von Dorn vorgeschlagenen Modification gewählt. Es wird hier in absolutem Maße der Widerstand eines empfindlichen Galvanometers mit langsam schwingender Magnetnadel gemessen. Derselbe findet sich in der Hauptsache aus der Schwingungsdauer und der Dämpfung, welche die Nadel durch den geschlossenen Multiplikator erfährt, sowie aus dem Verhältnis des Nadelmagnetismus zu der Stärke ihres magnetischen Feldes.

Gefordert ist ferner die Kenntnis der absoluten Galvanometerconstante des Instrumentes. Weber bestimmte diese aus den gemessenen Dimensionen des Multiplicators selbst; Dorn[2]) führte statt dessen das von Bosscha zuerst gebrauchte empirische Verfahren der Vergleichung mit einer Tangentenbussole mittels Stromabzweigung ein. Man erhält dadurch den Vorteil viel stärkerer Dämpfung der Nadel.

Dieses Verfahren habe ich gebraucht. Dem Geschick, dass man manche Schwierigkeiten erst während der Arbeit erkennt, habe ich mich auch nicht entziehen können. Ueber die sehr vereinfachte Gestalt, die ich dem Verfahren schliesslich gegeben habe, vgl. § 8 ff.

In Bezug auf die Arbeiten mit Quecksilber hat mir die von K. Strecker[3]) im hiesigen Laboratorium vor vier Jahren ausgeführte eingehende Untersuchung als Grundlage gedient. Die Leitung, deren absoluter Widerstand gemessen wurde, erhielt zu dem Zweck einen Widerstand, welcher demjenigen des besten, nur mit geringen Kaliberfehlern behafteten Strecker-

---

1) Pogg. Ann. Ergänz. Bd. 6 S. 1, 1871. Sitz.-Ber. d. k. Akad. 1883, S. 315.
2) Dorn, Wied. Ann. Bd. 17, S. 775. 1882.
3) K. Strecker, Abh. d. k. Akad. II. Classe Bd. 15 II. 188; Wied. Ann. Bd. 25 S. 252. 1885.

schen Quecksilberrohres Nr. 3 hinreichend nahe kam, um direct damit verglichen werden zu können. Dies geschah nach dem von mir für diese Zwecke ausgearbeiteten Verfahren des Differentialmultiplikators im übergreifenden Nebenschluss[1]) (§ 36). Schwierigkeiten haben sich bei den Arbeiten mit Quecksilber nicht ergeben.

3. Die Messungen erfordern grossenteils zwei gleichzeitig arbeitende Beobachter. Die erste Reihe habe ich mit Herrn Kreichgauer ausgeführt, welcher auch bei den Vorarbeiten, bei der Herstellung des ersten Multiplikators und des Verzweigungsrheostaten, der Bestimmung der elektrischen und magnetischen Temperaturcoefficienten, der magnetischen Lokaleinflüsse, des Selbstinduktionscoefficienten, dann der Verifikation vieler Skalen und der Controle der Quecksilberröhren eine sehr wertvolle Unterstützung geleistet hat. Bei der zweiten bis vierten Reihe arbeitete ich mit Herrn Sheldon, welchem ich ausser der Teilnahme an den entscheidenden Messungen gleichfalls die geschickte Ausführung zahlreicher kleinerer Aufgaben, einen Teil der vorbereitenden Rechnungen und manche Controle verdanke. Während der zweijährigen Beobachtungszeit hat endlich Herr Heydweiller, der bereits in Florenz bei den Arbeiten von Professor Roiti wertvolle Erfahrungen gesammelt hatte, vielfach an den Messungen Teil genommen, insbesondere so oft drei Beobachter erfordert wurden und dann, was vor allem schätzenswert ist, durch die Ausführung derjenigen Rechnungen, welche zur Beurteilung der Resultate rasch nach den Beobachtungen angestellt werden mussten.

Für diese wertvolle Unterstützung, ohne welche die Arbeit nicht ausführbar gewesen sein würde, spreche ich den Herren meinen aufrichtigen Dank aus.

In mehrfacher Hinsicht ist auch eine Erleichterung der Aufgaben durch die vor einigen Jahren mit W. Kohlrausch ausgeführte Bestimmung des elektrochemischen Aequivalents des Silbers[2]) entstanden. Ich werde diese Arbeit öfters zu zitiren haben.

Die mechanische Herstellung der Hilfsmittel zu der Untersuchung verdanke ich der mechanischen Werkstätte von Herrn Eugen Hartmann

---

1) Berlin. Sitz.-Ber. 1883 März 29; Wied. Ann. Bd. 20, S. 76. 1883.
2) F. und W. K. Wied. Ann. Bd. 27, S. 1. 1886.

und zum grösseren Teile Herrn Universitätsmechanicus Siedentopf in Würzburg, der insbesondere den Verzweigungsrheostaten und die grosse Tangentenbussole sorgfältig und geschickt ausgeführt hat.

Ueber Einzelheiten soll am Orte berichtet werden.

Die schliesslichen Rechnungen habe ich alle selbst besorgt und zwar auf eine Stelle mehr als hier mitgeteilt wird. Da trotz mindestens doppelter Ausführung und vielfacher eigener und fremder Controle in einem der verwickeltesten Rechenmechanismen ein Versehen nicht mit aller Bestimmtheit verneint werden kann, so bleibt nichts übrig, als die Messungen so vollständig mitzuteilen, dass man die Richtigkeit des rechnerischen Verfahrens hinterher controliren kann.

Uebersicht über die absolute Widerstandsbestimmung.

4. Es sollen bedeuten

G die Galvanometerconstante, d. h. das Verhältnis des absolut gemessenen Nadelausschlages zu der Stromstärke für das magnetische Feld Eins,

M den Magnetismus der Nadel,

H die horizontale Feldstärke im Multiplikator,

τ die Schwingungsdauer,

Λ das natürliche logarithmische Dekrement der Nadel.

Von Torsion, Selbstinduction des Stromes, Veränderlichkeit von G und Luftdämpfung sowie von einigen Correctionsgliedern werde zunächst abgesehen. Dann ist der absolute Widerstand der Multiplikatorleitung bekanntlich

$$W = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\tau}\,G^2\,\frac{M}{H}\,\frac{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}{\Lambda}. \qquad 1)$$

5. Die Galvanometerconstante G soll empirisch durch Vergleichung mit einem anderen ausgemessenen Stromkreise bestimmt werden, den wir uns als Tangentenbussole, zunächst mit kurzer Nadel denken. Es bezeichne

G_0' die durch Rechnung bestimmte von einem Strome Eins auf den Mittelpunkt der Tangentenbussole ausgeübte Kraft, d. h. $G_0' = 2\,\pi\,n/r$, wenn r und n Halbmesser und Windungszahl darstellen.

H' sei das horizontale magnetische Feld der Tangentenbussole.

Es gehen nun die Ströme

i und i' durch den Multiplikator und die Tangentenbussole;

α und α' seien die bezüglichen Ausschlagswinkel oder

x und x' die bezüglichen Skalenausschläge, wenn

A und A' die Skalenabstände bedeuten.

Dann hat man, wieder vorbehaltlich einiger Correctionen,

$$2) \qquad G = G_0' \frac{i'}{i} \frac{H}{H'} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = G_0' \frac{i'}{i} \frac{H}{H'} \frac{A'}{A} \frac{x}{x'}.$$

Ist die Nadel der Tangentenbussole nicht sehr kurz, so bedeute

$\mathfrak{l}'$ ihren Polabstand (die reducirte Nadellänge).

Dann ist bekanntlich statt G_0' einzuführen

$$3) \qquad G' = G_0' \left(1 + \tfrac{3}{16} \frac{\mathfrak{l}'^2}{r^2}\right)$$

6. Die Grösse M/H wird durch Ablenkung einer Magnetnadel bestimmt, deren Feld wir zunächst auch gleich H annehmen. Wir nennen

φ den Ablenkungswinkel dieser Nadel, wenn

a ihr Abstand von dem Magnete M ist.

$\mathfrak{L}$ sei der „Polabstand" des Magnetes M.

Man hat dann, wenn die Ablenkung aus der 1. Gauss'schen Hauptlage stattfindet,

$$4_{\mathrm{I}}) \qquad \frac{M}{H} = \tfrac{1}{2} a^3 \operatorname{tg} \varphi \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{L}^2}{a^2}\right);$$

oder aus zweiter Hauptlage

$$4_{\mathrm{II}}) \qquad \frac{M}{H} = a^3 \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \tfrac{3}{8} \frac{\mathfrak{L}^2}{a^2}\right).$$

Setzt man die Ausdrücke für G und M/H in 1) ein, so kommt bei erster Hauptlage

$$5_{\mathrm{I}}) \quad W = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau} G_0'^2 \left(1 + \tfrac{3}{8} \frac{\mathfrak{l}'^2}{r^2}\right) \left(\frac{i'}{i} \frac{H}{H'} \frac{A'}{A} \frac{x}{x'}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} a^3 \operatorname{tg} \varphi \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{L}^2}{a^2}\right) \frac{\sqrt{\pi^2 + A^2}}{A},$$

oder bei zweiter Hauptlage

$$W = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tau}G_0'^2\left(1+\tfrac{3}{8}\frac{l'^2}{r^2}\right)\left(\frac{i'}{i}\frac{H}{H'}\frac{A'}{A}\frac{x}{x'}\right)^2 a^3 \operatorname{tg}\varphi\left(1+\tfrac{3}{8}\frac{\mathfrak{L}^2}{a^2}\right)\frac{V\overline{\pi^2+A^2}}{A}. \quad 5_{\text{II}})$$

7. Beobachtungen aus der zweiten Hauptlage. Ich wünschte die Galvanometernadel M nicht aus dem Multiplikator entfernen zu müssen. Ihr Ablesespiegel sollte sich ferner innerhalb des Multiplikators befinden, man musste also die Visirlinie ungefähr senkrecht zur Multiplikatoröffnung legen. Man sieht sofort, dass für die Anwendung der Instrumente alsdann die Beobachtungen aus zweiter Hauptlage wesentlich einfacher sind. Deswegen wurde im Anfange diese Beobachtungsweise gewählt.

8. Concentrische Aufstellung von Multiplikator und Tangentenbussole. Construirt man einen so grossen Stromkreis, dass die Galvanometernadel M zugleich die Nadel für den ersteren als Tangentenbussole bilden kann, stellt man ferner beide Stromkreise concentrisch auf, so entstehen folgende äussere Vorteile, die nicht nur auf die Bequemlichkeit, sondern zugleich auf die Genauigkeit der Messung günstig wirken.

Erstens fällt die Correction $\left(\frac{H}{H'}\frac{A'}{A}\right)^2$ weg, denn man beobachtet mit derselben Skale dieselbe Nadel. Zweitens kann man ja das Verhältnis i'/i dem Verhältnisse G/G' der beiden Empfindlichkeiten ungefähr gleich wählen und kann somit die Bestimmung von x/x' auf eine Nullmethode zurückführen, indem man beide Ströme entgegengesetzt laufen lässt.

8a. Eliminirung des Polabstandes $\mathfrak{L}$ durch die erste Hauptlage. Würde man so aus zweiter Hauptlage beobachten, so würde der Correctionsfaktor von der Nadellänge, da nun $l = \mathfrak{L}$ ist, $1+\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{L}^2}{R^2}$ werden, also einen grossen Einfluss erlangen. Bei der ersten Hauptlage aber haben die Correctionsglieder entgegengesetztes Vorzeichen, die Gesammtcorrection wird

$$1+\tfrac{3}{8}\frac{\mathfrak{L}^2}{R^2}-\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{L}^2}{a^2}.$$

Die Correction hebt sich also jedenfalls teilweise fort. Wählt man

beiläufig $3\,a^2 = 4\,R^2$ oder $a/R = 1{,}15$, so lässt sich die ganze aus der Nadellänge entspringende Correction auf einen beliebig kleinen Betrag bringen.

Ich habe eine spätere Gruppe von Beobachtungen, welcher ich deswegen ein grösseres Gewicht beilegen muss, mit der letztbeschriebenen Anordnung ausgeführt.

Kritisches.

9. Es wird nicht überflüssig sein, sich von den Operationen, welche zur Fertigstellung einer Ohmbestimmung gefordert werden, Rechenschaft zu geben, um die Fehlerquellen wenigstens angenähert zu übersehen.

Die Galvanometerconstante G, die im Quadrat in das Resultat eingeht, ist abhängig von der Abmessung der Tangentenbussole und von deren Nadellänge, von dem Verhältnis der Abzweigungswiderstände, dem Verhältnis zweier Skalenausschläge, die von dem wechselnden Erdmagnetismus befreit werden müssen. Bei dem ersten Verfahren kommt noch das Verhältnis zweier Skalenabstände, zweier magnetischer Feldstärken und zweier Torsionscoefficienten hinzu, auch der gegenseitige Einfluss der beiden Stromkreise und die besonders zu bestimmende Veränderlichkeit von G selbst mit dem Ausschlage.

M/H enthält den Wirkungsabstand in dritter Potenz, dann Skalen-Ausschlag und Abstand, das Torsionsverhältnis des Magnetometers, das Verhältnis des magnetischen Feldes im Multiplikator zu demjenigen im Magnetometer; weiter die Polabstände des Magnets und der Nadel und die beiden magnetischen Inductionscoefficienten des ersteren.

Einfacher ist die Beobachtung der Schwingungsdauer τ, in welcher ausser den Fehlern der Zeitbestimmung nur der Gang des Chronometers und der verschwindende Einfluss der Amplitude steckt. Deklinationsschwankungen des Erdmagnetismus bilden hier wohl die versteckte wesentlichste Fehlerquelle.

Zu befreien sind aber sowohl M/H wie τ noch von den Schwankungen der Temperatur und der Stärke des Erdmagnetismus.

Jedes log. Dekrement Λ enthält drei Umkehrpunkte der schwingenden Nadel, auch die Inconstanz der Galvanometerfunction, und wird von

den Deklinationsschwankungen beeinflusst. Der Einfluss der Luftdämpfung muss besonders ermittelt werden.

Die genannten Messungsbestandteile sind aber grösstenteils selbst keine Elementarbeobachtungen. Jeder Skalenabstand setzt sich zusammen aus der direkten geometrischen Abmessung, aus zwei Glasdicken, meistens noch einem Abstande des Spiegels vom Aufhängefaden, dann der Neigung und Höhe des Spiegels, auch der Krümmung der Skale. Die Längen, seien es Kreishalbmesser oder Wirkungs- oder Skalenabstände oder Skalenausschläge sind mit dem Comparator nachzumessen und wegen der Temperatur zu reduciren. Die Aenderungen des magnetischen Feldes bestehen aus lokalen und instrumentalen Einflüssen, die einzeln zu ermitteln sind, und zwar jeder durch eine grössere Anzahl von Ablesungen. Die zeitlichen erdmagnetischen Schwankungen enthalten ausser den direkten Ablesungen die Temperatur und die Constante des Variometers. Der Polabstand sowie der Inductionscoefficient des Magnets wird durch eine verwickelte Messungsreihe erhalten.

Endlich sind bei den Quecksilberwiderständen die chemische Beschaffenheit des Quecksilbers, die Vollständigkeit der Rohrfüllung, die Temperaturfehler, die besonders auch den Widerstand des Multiplikators beeinflussen, die Widerstandsvergleichung selbst zu berücksichtigen.

Zu diesen übersehbaren Umständen tritt aber noch eine nicht geringe Summe von Fehlerquellen, z. B. bei der Orientirung und Nivellirung von Instrumenten und Maßstäben, ferner zeitliche Veränderungen, Isolirungsfehler, die Unvollkommenheiten der theoretischen Annahmen und selbst der Zahlenrechnung.

Alles zusammen wird für die in einem Resultat steckenden merklichen elementaren Fehlerquellen die Zahl hundert zu niedrig gegriffen sein.

Man könnte hiernach die Vermutung aufstellen, das gewählte Messungsverfahren sei vielleicht ein ungünstiges. Aber wenn man andere Methoden analysirt, so findet man eine ähnlich grosse überraschende Anzahl von Fehlerquellen. Unsere Methode gewährt jedenfalls den Vorteil, dass sie keine einzelnen an sich besonders schwierigen Bestandteile enthält, was man nicht von allen übrigen sagen kann.

Einer grossen Anzahl kleiner Fehler kommt der Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu gute, dass mit wachsender Anzahl die Fälle

ungünstiger Summirung relativ selten werden. Man darf sich aber nicht wundern, wenn bei einer solchen Anzahl von Fehlern, von denen mancher 1/10000 erreichen mag, die Resultate um Tausendtel auseinandergehen, wie das sich bei den besten absoluten Widerstandsbestimmungen gezeigt hat.

Beschreibungen.

Das Galvanometer (Fig. 1 und 2).

10. Der Rahmen besteht aus Mahagoniholz. Die vertikalen Wände sind 1,4 cm stark, 35 cm lang und 16 cm hoch. Der 24 cm lange Ausschnitt ist in dem mittleren Teil 6 cm hoch; die Enden bilden zwei Halbellipsen von 12 cm grosser und 6 cm kleiner Axe. Das eingeleimte Verbindungsstück hat einen äusseren Durchschnitt von 25 cm Länge, 6,8 cm Höhe und 57 cm Umfang. Die lichte Breite des Multiplikators beträgt 12,0 cm.

Um den Magnet anstatt der gebräuchlichen, um den Rahmen herumgreifenden Suspension mit einem einfachen Stiel versehen zu können, der durch die Drahtwindungen hindurchtritt, ist auf die in der Mitte durchbohrte obere Horizontalfläche des Verbindungsstückes ein 6 cm langes und 4,5 cm hohes, in der Mitte 1 cm dickes und nach den Enden etwas verjüngtes Klötzchen aufgeleimt, welches eine Vertikal-Durchbohrung von 9 mm Durchmesser hat. Die Drahtwindungen weichen also oben nach der Mitte zu um 3 mm aus ihrer sonstigen Windungsebene nach aussen. Die vertikalen Wände sind, um Platz hierzu zu bieten, oben entsprechend ausgeschweift.

Luftabschluss. Um die Abwesenheit magnetischer Einflüsse zu prüfen, sollte die Schwingungsdauer der Nadel in verschiedenen Stellungen des Multiplikators beobachtet werden können. Die Bretter, welche mit $1\frac{1}{2}$ cm Vorsprung die Oeffnung bedecken, sind deswegen ausgeschnitten und tragen aufgeleimte Kästchen, von denen das vordere eine, durch ein Planglas geschlossene, 4,5 cm weite Oeffnung besitzt. Sind die Deckel mit den Kästchen nach aussen aufgesetzt wie in Fig. 2, so ist der innere Spielraum ausreichend gross um den Multiplikator um die Nadel beliebig

drehen zu können. Bei der absoluten Widerstandsbestimmung sassen die Kästchen aber nach innen, damit der Luftraum eng und sicher frei von Luftströmungen war.

Drahtwindungen. Den Draht von 2 mm Stärke hatte Herr Dorn die Güte aus elektrolytischem Kupfer selbst fertigen zu lassen. Er wurde von Herrn Obermaier in Nürnberg mit weisser Seide doppelt besponnen. Der Draht hatte im allgemeinen eine kleine Spur von Diamagnetismus. Es wurden 372 Windungen in 7 Lagen aufgewunden.

11. Um den Extrastrom bei der Widerstandsvergleichung zu vermeiden, wurde 1887 ein zweiter Multiplikator congruent mit dem ersten hergestellt, der bifilar gewunden war. Ein kleiner Commutator aus Kupferklötzen auf Hartkautschuk sass auf dem Rahmen und liess die gewöhnlich hintereinander geschalteten Windungen bei der Widerstandsvergleichung gegen einander schalten. Eine jetzt auftretende Wirkung der elektrostatischen Capacität war nicht so gross, um die Widerstandsvergleichung zu stören.

12. Temperatur. Die Drahtwindungen wurden mit einer Schicht starken Filzes umhüllt, welcher, um etwaige darauf gefallene fremde Körper leicht zu bemerken, noch mit weissem Zeichenpapier umgeben wurde. Eine aus dem Verbindungsstück ausgestemmte Vertiefung liess durch eine Oeffnung der Seitenwand ein in $1/5^0$ geteiltes Thermometer einführen, welches also mit der untersten Drahtlage in Berührung stand. Auch in die von den Drahtwindungen neben dem Klötzchen (vor. S.) frei gelassenen kleinen Dreiecke können Thermometer eingesenkt werden, wovon aber selten Gebrauch gemacht wurde, da die Temperaturänderung meist sehr langsam stattfand.

13. Magnet. Der kreiscylindrische Magnet ist 20 cm lang und 1,5 cm dick. Mittels einer konischen Querbohrung in der Mitte wurde derselbe an einen 4 mm starken, 16 cm langen kupfernen Stiel mit konischem Ende durch eine Mutter unten befestigt (Fig. 1 und 2).

Derselbe Stiel trägt den äquilibrirten Glasspiegel von 4 cm Durchmesser. Die Hülse, mit welcher der Spiegel an den Stiel angeschraubt wird, ist aufgeschnitten und kann also im Hohlraum des Multiplikators über den Stiel geschoben werden. Der Spiegel sitzt mit seinem hori-

zontalen Durchmesser ungefähr in der mittleren Höhe des Magnets, dem letzteren parallel.

Der Magnetismus des gekochten Stabes betrug etwa 7000 [cm, g] und hielt sich sehr constant. Die Schwingungsdauer des mit dem Spiegel belasteten Magnets war = 8,2 sec.

Der messingene 260 m lange Aufhängedraht war zuerst 0,09 mm dick. Nach der Belastung des Magnets (s. unten) wurde 0,12 mm dicker Draht gewählt.

Belastungsgewichte. Um die Schwingungsdauer zu vergrössern, wurde nach der ersten Gruppe von Messungen auf die Enden des Magnets ein Paar messingener Gewichte von je 87 g aufgeschraubt. Um Inductionsströme in den letzteren, die durch Rückwirkung der im Multiplikator inducirten Ströme entstehen könnten, zu vermeiden, waren die Gewichte aufgeschnitten und wurden mit untergelegten Papiercylindern auf die Magnetenden aufgeschoben (vgl. § 27).

14. Drehung des Multiplikators. Derselbe ist auf eine starke hölzerne horizontale Kreisscheibe mit drei kleinen Zapfen concentrisch aufgesetzt. Die Kreisscheibe ist mit einem kupfernen konischen Zapfen auf einer verleimten Holzplatte mit einer Kreisteilung von 42 cm Durchmesser drehbar. Zwei Alhidaden lassen die Stellung auf $0{,}1^0$ sicher ablesen.

Drehung des Magnets mit dem Multiplikator. Auf dem Multiplikator sitzt eine kupferne Hülse mit je drei Klemmschrauben oben und unten. Durch die letzteren kann der durchgehende Stiel des Magnets gefasst und dann also mit dem Multiplikator um gemessene Winkel gedreht werden. Die sechs Schrauben gestatten eine beliebige Einstellung des Stiels. Die Neigung nach vorn und das Azimut werden durch das Fernrohr des grossen Ablesespiegels controlirt, die seitliche Neigung durch einen kleinen Hilfsspiegel an der Fassung, mittels deren der Stiel an den in die Fassung gelöteten Aufhängedraht befestigt wird (Fig. 1 und 2).

So konnte man für die Ablenkungsversuche zu M/H dem Magnet immer genau die Lage geben, welche er bei den Schwingungen inne hatte.

Zugleich hat der Stiel eine Mm-Teilung, an welcher die Höhe des Magnets im Multiplikator controlirt wird, während Verschiebungen gegen die centrische Stellung des Stiels in der Hülse sich ebenfalls dem Auge

leicht merklich machen. Damit Höhenverschiebungen, welche mit der Temperaturänderung des Aufhängedrahtes verbunden sind, unberücksichtigt bleiben konnten, wurde die Höhe maximaler Wirkung gewählt. Von hier aus durfte der Magnet sich um $\pm$ 1,5 mm verschieben, bis eine Aenderung der Empfindlichkeitsconstante um 1/10000 eintrat.

Alle zum Multiplikator verwendeten Teile wurden vorher auf die Abwesenheit von Magnetismus untersucht, der Leim in eisenfreien Gefässen zubereitet.

Das Galvanometer stammt aus den Werkstätten von Hartmann und Braun in Bockenheim und Siedentopf in Würzburg.

Einrichtungen zur Bestimmung der Galvanometerconstante *G*.

Ueber die Bestimmung der Veränderlichkeit mit dem Ausschlage vgl. § 66. Die hierzu dienende Drehvorrichtung des Multiplikators s. § 14. Eine Ansicht der Verbindungen s. Fig. 3, ein Schema Fig. 4.

15. Ein Strom i' geht ungeteilt durch die Tangentenbussole. Ein Zweigstrom i wird von i' abgenommen und durch den Multiplikator geführt. Der, eigentlich für die Widerstandsvergleichung mit Quecksilber dienende, sechsnäpfige Commutator aus Hartkautschuk (Fig. 3 und 4) wurde in diesem Falle benutzt, um die Stromrichtung in dem Kreise der Tangentenbussole allein umzukehren. Ein zwischen der Stromquelle E (ein oder zwei grosse Daniell-Elemente) und C befindlicher zweiter Commutator C_1, welcher den Gesammtstrom wenden liess und der Commutator C_2, welcher die Multiplikatoren des Differentialgalvanometers vertauschte, ist in Fig. 4 nicht gezeichnet.

Der gewöhnliche Rheostat Rh ist im ungeteilten Strom und dient zu dessen Regulirung bez. auch zur Beruhigung der Nadel.

Die Abzweigung des Stromes i von bekanntem Verhältnis zum Stammstrome i' geschieht mittels bekannter Widerstände des Verzweigungsrheostaten.

Der Verzweigungsrheostat (Fig. 3).

16. Die getroffene Einrichtung, um die Abzweigungswiderstände genau verbürgen zu können, ist schon früher erläutert worden.[1]) In einem Hartkautschukdeckel befinden sich zweimal zwei Reihen von je zehn stählernen, amalgamirten Quecksilbernäpfen, welche die Endpunkte von je zehn Widerständen von 10000 bez. 100 Siem. E. bilden, die sich in einem Holzkasten befinden. Diese Widerstände sind in Fig. 4 und 5 durch die schrägen Verbindungsstriche zwischen den durch Punkte angezeigten Näpfen angedeutet. Durch kurze, dicke, gut amalgamirte Kupferbügel von 0,00005 Siem. Widerstand lassen die Widerstände sich beliebig hinter- oder nebenschalten. Die Zehntausender bestehen aus 0,1 mm, die Hunderter aus 0,5 mm dickem Neusilberdraht vom Temperaturcoefficienten 0,00030.

Eine dritte Doppelreihe von Quecksilbernäpfen war noch nicht mit Widerständen versehen. Dieselbe wurde zur Herstellung der notwendigen Stromverbindungen verwendet.

17. Isolirungen. Im Anfange (1886 Feb.) waren die Zuleitungen zu den Verzweigungsrheostaten durch Drähte gebildet, welche an das Fichtenholz des Kastens angeschraubt waren. Die Kabel zu dem Multiplikator waren mit Baumwolle besponnen und lagen zwischen Papier auf dem steinernen Fussboden. Das Holzstativ der Tangentenbussole stand mit seinen Stellschrauben auf gewöhnlichen metallenen Unterlagsscheiben auf einer eingemauerten Console. Nachträglich fanden sich Nebenschlüsse, welche durch das Holz und das Mauerwerk gebildet wurden, von der Ordnung 20.10^6 Ohm. Da solche Nebenleitungen bei Verzweigungswiderständen von 9000 bis 10000 Ohm, wenn sie ungünstig wirken, merkliche Fehler verursachen konnten, so wurden die Ueberzüge der längeren Leitungsdrähte sämmtlich paraffinirt und die Zuleitungen an dem Rheostatenkasten mit Kautschukschlauch bezogen. Das hiermit gewonnene Resultat (1886 Aug.) stimmt indessen merklich mit dem zuerst gewonnenen überein.

---

1) Sitz.-Ber. d. k. Akademie 1887 S. 11.

Nachdem der Kautschukschlauch brüchig geworden war, setzte man die Leitungen zum Verzweigungsrheostaten auf paraffinirtes Holz, welches sogar einem Goldblattelektrometer gegenüber isolirte. Die Tischplatte war mit Guttaperchapapier belegt. Schliesslich wurden auch die Tangentenbussole und der Multiplikator auf Unterlagen aus paraffinirtem Holz oder Hartkautsckuk gestellt. Die Isolirung war nun merklich vollkommen.

18. Stromabzweigungsverhältnis. Die zehn Hunderter werden durch Nebenschaltung zu einem Zehner vereinigt, welcher etwa 2,5 kg Neusilber enthält und daher durch den Strom nur wenig erwärmt wird. Ein viertelstündiger Strom von 0,2 Am änderte den Widerstand um höchstens 1/10000.

Durch diesen Zehner geht der Hauptstrom. Von der Eintritts- und Austrittsstelle wird der Zweigstrom durch den Multiplikator und einen zugefügten aus den Zehntausendern gebildeten Widerstand abgeleitet. In Fig. 3 und 4 ist angenommen, dass das Abzweigungsverhältnis ungefähr 1 : 100 betragen soll: die Zehntausender sind zu diesem Behufe ebenfalls alle nebeneinander geschaltet.

Für das Verhältnis 1 : 1000, welches bei den ersten beiden Bestimmungen gebraucht wurde, wird selbstverständlich in den Zweigstrom einfach ein Zehntausender geschaltet.

Fig. 4a endlich zeigt die angewandte Verbindung für das Verzweigungsverhältnis von etwa 1 : 900. Der Widerstand im Zweigstrome setzt sich zusammen aus einem Zehntausender und der neben denselben geschalteten Summe der übrigen neun Zehntausender und beträgt also $10000 \cdot 90000/100000 = 9000$ Siem.

Der Inductor N, welcher während der Dämpfungsbeobachtungen die Nadelbewegung bewirkt (§ 76). ist durch den Quecksilber-Nebenschluss S hier überall ausgeschaltet.

Um das Verzweigungsverhältnis genau zu bestimmen ist für die Verbindung Fig. 4 nur nötig, die hintergeschalteten Hunderter mit den nebengeschalteten Zehntausendern zu vergleichen. Für die anderen Verbindungen wird noch die Vergleichung der Zehntausender untereinander verlangt (§ 18).

Widerstandsvergleichung. Dieselbe geschah in der gewöhnlichen Differentialverzweigung, und zwar um Unsymmetrien zu eliminiren so, dass mit einem ungefähr gleichen Rheostatenwiderstand zuerst die nebengeschalteten Zehntausender verglichen wurden, wie Fig. 5 zeigt. Dies geschehen, nimmt man die Bügel von den Zehntausendern fort, verbindet mittels der ersteren die Hunderter hintereinander und vergleicht diese Summe mit demselben Stück des Rheostaten. Die kleine Ungleichheit wird durch Interpolation zwischen bekannten Veränderungen bestimmt.

Das Verhältnis der einzelnen Zehntausender zu einander wurde, wo es nötig war, ebenso ermittelt, indem man jedes Stück mit demselben Stücke von *Rh* verglich.

Durch ein einfaches Interpolationsverfahren wurde die ganze Arbeit mit jeder wünschenswerten Genauigkeit in wenigen Minuten ausführbar gemacht. Man verglich die Widerstände entweder vor und nach der correspondirenden Strommessung mit Multiplikator und Tangentenbussole oder schob die Vergleichung umgekehrt mitten ein.

Beispiele, Rechnungsweise und Resultate gibt § 68 und 69.

Tangentenbussole und Bestimmung von *G* 1886.

19. Hier ist die von W. Kohlrausch und mir zur Bestimmung des elektrochemischen Aequivalents benutzte Tangentenbussole mit dickem Kupferreif[1]) benutzt worden. Die Anordnungen sind die gewöhnlichen. Beide Instrumente waren thunlichst entfernt von einander an zwei Punkten aufgestellt, deren Verhältnis der magnetischen Felder zu einander ermittelt worden war (§ 48 bis 51). Der Strom i' der Tangentenbussole und der Zweigstrom i des Multiplikators wurde durch den gemeinsamen Commutator C_1 (Fig. 3) und durch den Rheostaten *Rh* so gehandhabt, dass die Multiplikatornadel immer nur Schwingungen von wenigen Skalenteilen um die jeweilige Gleichgewichtslage machte. Die Nadel der Tangentenbussole kam durch ihre Dämpfung rasch zur Ruhe. Ein Beobachter las dann einige, gewöhnlich fünf Umkehrpunkte der Multiplikatornadel ab, ein zweiter gleichzeitig die Einstellung der Tangentenbussole. Der Strom änderte sich wenig; der Erdmagnetismus war ziemlich ruhig.

1) F. K. Wied. Ann. Bd. 15, S. 552. 1882 und F. u. W. K. ib. Bd. 27, S. 19. 1886.

Ueber den gegenseitigen Einfluss beider Instrumente vgl. § 67; über die Ausführung und Wiederholung der Beobachtungen § 70.

Grosse Tangentenbussole 1887.

20. Um die § 8 und 9 hervorgehobenen Vorteile zu geniessen wurde ein kreisförmiger Holzrahmen von nahe 160 cm Durchmesser hergestellt. Der Ring, 3 cm dick, 5,5 cm breit, ist aus 48 Stücken von altem Mahagoni-Langholz verschraubt, welche lange in Paraffin gekocht worden waren.[1])

Den Kern bilden 16 Stücke von 1,4 cm Dicke, welche mit den kurzen Seiten zusammenstossen. Sie sind verbunden durch je 16 halb so dicke Bretter von jeder Seite, welche mit je 8 Messingschrauben aufgesetzt sind (Fig. 6). Der so zusammengesetzte Ring zeigte schon eine ziemliche Festigkeit. Versteift wurde derselbe dann durch drei ein gleichseitiges Dreieck bildende Sehnen, ebenfalls aus paraffinirtem Mahagoniholz von $3 \times 2{,}5$ qcm Querschnitt. Sechs gleich verteilte weitere Punkte des Ringes sind durch drei Stäbe mit diesen Sehnen verbunden. Die Verbindungspunkte stützen sich gegenseitig durch drei kleinere Sehnen *ab* in dem gleichseitigen Dreiecke (Fig. 7).

Geleimt wurde nichts. Da wo die Verbindungen nur auf Druck beansprucht werden, sind gewöhnliche messingene Holzschrauben verwendet. Wo Zug eintreten könnte, bestehen die Verbindungen aus messingenen Platten (Fig. 7 und 8).

Alle Materialien waren auf Abwesenheit von Magnetismus geprüft.

Herr Siedentopf hatte die Gefälligkeit, die Herstellung des Rahmens eigenhändig auszuführen.

Nach Fertigstellung aller Verbindungen, welche auf einem grossen Brette geschah, wurde der Ring, an diesem Brette befestigt, mit der Drehbank verbunden und nun auf seine Aussenfläche eine cylindrische Nut von etwa 1 mm Tiefe eingedreht und mit 34 Windungen seidebesponnenen Kupferdrahtes, welche eine Lage von 2,4 cm Breite bilden, bewickelt. Dadurch wurden die Empfindlichkeitsconstanten des Multiplikators und der Tangentenbussole nahe in das Verhältnis 100 : 1 gesetzt.

1) Tränken mit Schellacklösung würde ich hinterher vorziehen. Vgl. § 60.

Die Kreisform der Windungen hat sich binnen Jahresfrist sehr gut erhalten (§ 60).

Als Tangentenbussole aufgestellt ruht der grosse Ring an den Enden *a* und *b* des Mittelstückes der oberen horizontalen Sehne mit zwei übergeschobenen Messingrähmchen auf einem 4 cm dicken verleimten dreieckigen Brette mit Stellschrauben (Fig. 8). Damit keine Spannung eintritt, bildet die eine der messingenen Unterlagen eine Wiege.

Ein 140 cm hohes starkes Stativ trägt das genannte dreieckige Brett. Die Versteifung der Stativbeine wird durch ein dreieckiges Querbrett bewirkt (zum Tragen des Multiplikators bestimmt) und durch ein Kreuz und zwei schräge Verbindungsleisten, die zur Uebersicht in der Figur weggelassen sind. Ausschnitte in dem Brett und der Stativplatte lassen Platz für den Aufhängefaden des Magnets.

Zwei Schraubzwingen, deren mit Filz belegte Schraubenspitzen die untere Sehne des grossen Rahmens fassen, dienen zur Fixirung des letzteren.

Der magnetische Meridian wurde nach einer Bussole mit 12 cm langer Nadel bestimmt.

Excentricität und Neigung der Tangentenbussole. Um dem Aufhängedraht des Multiplikatormagnetes Platz zu geben, musste man den grossen Ring excentrisch stellen oder neigen. Die daraus entspringenden Correctionen für seine eigene Wirkung auf die Nadel sind dem Quadrate der Abweichungen proportional. Es war offenbar vorteilhaft, um die Correctionen beide thunlichst zu vermindern, das Ausweichen gegen den Aufhängedraht durch Excentricität und durch Neigung zu bewirken. Jede Correction wurde dadurch auf etwa 2/10000 reducirt, indem die Excentricität auf etwa 0,8 cm, die Neigung auf 1/50 kam.

Näheres vgl. § 62.

Aufstellung des Multiplikators 1887. Das Brett zwischen den Stativbeinen trug den mit drei Zapfen eingesetzten und durch kleine Unterlagen nivellirten geteilten Kreis (§ 14), auf welchem der Multiplikator mit seiner Drehscheibe aufgestellt wurde.

21. Beobachtungen 1887. Man sendet den Strom i' durch den grossen Ring, den Strom i gleichzeitig durch den Multiplikator in ent-

gegengesetzter Richtung. Der kleine Nadelausschlag, positiv in derjenigen Richtung gerechnet, welche dem Multiplikatorstrom entspricht, sei $= x_0$. Man sendet den Strom i' allein durch den grossen Ring; der Ausschlag sei $= x'$. Dann ist, wenn G und G' die beiden Empfindlichkeitsconstanten vorstellen, vorbehaltlich kleiner Correctionen

$$x_0 = C(Gi - G'i') \qquad x' = C \cdot G'i',$$

woraus

$$G = G' \frac{i'}{i}\left(1 + \frac{x_0}{x'}\right). \qquad 6)$$

x' wurde wegen der kleinen Stromschwankungen vor und nach x_0 bestimmt und mit dem Mittelwerte eingesetzt.

Die beobachteten Werte s. § 70.

Die Zuleitungen zur Tangentenbussole wurden dicht nebeneinander geführt. Ein Versuch überzeugte noch von ihrer Wirkungslosigkeit auf die Nadel.

Vorrichtungen zur Messung von *MH*.

Magnetometer.

22. Von den angewandten fünf Magnetometern sind vier bereits beschrieben, nämlich

I) ein Magnetometer mit Holzgehäuse und Stahlspiegel, mit einem sehr guten Kupferdämpfer;[1])

II) und III) zwei Magnetometer mit Elfenbeingehäuse und luftgedämpftem Spiegel mit aufgekitteter Magnetnadel;[2])

IV) Das Gehäuse von Nr. I, aber mit kurzer Magnetnadel mit Luftdämpferflügel. Der Spiegel ist gegen die Nadel verstellbar. Neu war das

23. Cylindermagnetometer, Nr. V (Fig. 9). Die widerwärtigen magnetischen Eigeneinflüsse der Instrumente lassen sich offenbar am ehesten durch einen ganz symmetrischen Bau vermeiden. Zu diesem Zwecke ist sowohl das Mahagonigehäuse wie der aus elektrolytischem

1) Wied. Ann. Bd. 15, Taf. 8, Fig. 1, 1882.
2) F. und W. K., ib. Bd. 27, S. 28. 1886.

Kupfer hergestellte Dämpfer cylindrisch gearbeitet. Der Dämpfer besteht aus einem 11 mm dicken Tiegel, in welchem der Ringmagnet schwingt. Der Ring ist 2 mm dick und hat 18 und 22 mm inneren und äusseren Durchmesser. Die Dämpfung ist vorzüglich; von magnetischem Einfluss war kaum etwas zu bemerken (§ 49). Der Magnet ist gegen den Spiegel beliebig stellbar, indem der Stahlring durch zwei Muttern auf dem Gewinde am Stiel des Spiegels festgeklemmt wird.

Herr Siedentopf hat das Magnetometer angefertigt.

24. Aufstellung und Abstand der Magnetometer. Auf jedes Magnetometer wirkt der ablenkende Magnet zweimal, nämlich in den Aufstellungen links und rechts. Die eine Ablenkung geschah gewöhnlich vor, die andere nach der absoluten Widerstandsbestimmung. Meist wurden zwei Magnetometer zugleich aufgestellt.

Der Wirkungsabstand des Magnets wird als die Hälfte des Abstandes des Magnetometercocons in der Stellung links und rechts bestimmt. Dies geschieht mit einem etwa 4 mm hinter dem Aufhängedrahte des Hauptmagnets befestigten horizontalen Zweimeterstabe aus Ahornholz, dessen recht constante Länge von Zeit zu Zeit an einem an die Teilung angelegten verifizirten gläsernen Maßstabe mit der Lupe oder mit einem Ocular-Mikrometer-Mikroskop gemessen wurde.

Die Einstellung der ebenfalls 4 mm vor den Teilstrichen befindlichen Cocons wurde mit den zum Maßstabe senkrecht gerichteten Ablesefernrohren, oder unter Anwendung der Lupe mit einem an den Massstab gelegten kleinen Spiegel, oder endlich mit Visirmarken an der etwa 1 m hinter dem Maßstabe befindlichen Wand beurteilt.

1886 standen alle Instrumente auf einem von eingemauerten Trägern gehaltenen Holzbalken. Die Anordnung 1887 zeigt Fig. 8. Der Zweimeterstab ist hier, nach Azimut und Höhe gemäss der langen Bussole und der Wasserwage regulirbar, unter dem Stativbrett befestigt, welches den grossen Holzrahmen trägt. Die Magnetometer stehen auf soliden Stativen auf dem Steinfussboden.

Die Magnetometernadeln wurden immer sorgfältig auf die Höhe des Hauptmagnets gebracht.

Ueber die beobachteten Ausschläge vgl. § 73.

25. 1886 fanden die Ablenkungen in zweiter Hauptlage aus nahe $a = 100$ cm Abstand statt.

1887 in erster Hauptlage meistens aus 105 cm Abstand. Um solche Verhältnisse zu haben, bei denen die Magnetlänge sich ganz heraushebt, wurde zum Schluss noch einmal eine Messung mit $a = 93$ cm ausgeführt. Hier wurden die Ausschläge aber grösser als 5^0, also für Skalenablesungen schon etwas unbequem gross.

In der Richtung von Ost nach West, in welcher also 1887 die Apparate angeordnet werden mussten, hat der Beobachtungsraum nur 5 m Länge. Dieser Umstand brachte es mit sich, dass man die Visirlinie der Fernrohre für *M/H* vorteilhaft nicht nordsüdlich, sondern schräg wählte. Fig. 10 stellt den Grundriss des Beobachtungsraumes dar. Die Spiegel standen hier also nicht senkrecht zu den Nadeln. Da die Skalen an demselben Horizontalbalken sassen, so wird der eine (westliche) Skalenabstand also grösser als der andere. Man berechnet die Tangenten der Ausschlagswinkel hier auf jeder Seite für sich, während sonst einfacher das Mittel der Ausschläge zur Rechnung diente.

26. Skalenabstände. Dicht neben den Einstellungsstrichen des Zweimeterstabes werden an dem letzteren kleine mm-Stäbchen befestigt, welche die Richtung der Visirlinie haben. Auf diese Teilungen werden die Magnetometercocons bezüglich ihres Abstandes von der Skale bezogen.

Um den Skalenabstand zu bestimmen, wurde neben dem Nullpunkte der mm-Stäbchen ein Senkel aus feinem weichen Draht aufgehangen. An die Skale wurde ein kleiner, zugeschärfter, horizontaler, spiegelnder Glasmassstab angestossen, vor dem gleichfalls ein Senkel herunterhing.[1]) Die Senkel wurden auf einen langen verifizirten, nivellirten Holzmassstab bezogen.

Zuletzt wurde auch ein etwas bequemeres Verfahren gebraucht. Unter den Skalenmitten einerseits und unter den kleinen Maßstäben an dem Zweimeterstabe befanden sich auf den steinernen Fussböden mm-Teilungen, deren Abstand von einander mit dem Glaszweimeterstabe bestimmt worden war. Nach diesen Teilungen wurde von den Maßstäbchen

1) F. u. W. K. Wied. Ann. Bd. 27, S. 8. 1886. Der Skalenabstand vom Multiplikator wurde ebenso bestimmt; derjenige von dem Spiegel der Tangentenbussole mit zwei spitzen Glasmaßstäben.

und von der Skale herabgesenkelt. Die langstieligen Senkelgewichte hatten unten Nähnadelspitzen, deren Stellung dicht über den Teilungen scharf abgelesen werden konnte. Torsionsschwingungen der Senkel sicherten gegen Fehler der Excentricität.

Sämmtliche Skalen waren aus Glas und auf der Vorderfläche geteilt. Die Ebenheit wurde controlirt oder eine kleine Krümmung corrigirt mittels eines vor der Skale geradlinig ausgespannten feinen Drahtes, dessen scheinbarer Abstand von seinem Spiegelbilde durch 2 geteilt den Drahtabstand von der Skale gibt.

Die Skalenabstände selbst s. § 54 ff.

Die Berechnungsweise von M/H s. § 72.

Ueber Schwingungsdauer und Dämpfung wird das notwendige in § 74 und 76 ff. gesagt; über Selbstinduction, Polabstand, Temperaturcoefficient, Inductionscoefficient, Torsionsverhältnisse, magnetische Lokaleinflüsse etc. s. § 41 bis 52.

Die Quecksilbervergleichung.

Quecksilberrohr.

Bezüglich der angewandten Methoden und Instrumente kann ich mich hier meist auf die genannte Arbeit von Strecker beziehen.

27. Es wurde immer das von Strecker mit Nr. 3 bezeichnete Rohr benutzt. Dasselbe hat bei 10^0 eine Länge (Strecker § 17)

$$L = 1{,}23409 \text{ m}.$$

Die Endhalbmesser r_1 und r_2 verhalten sich nach der von Strecker gegebenen graphischen Darstellung des Kalibers (ib.) zum mittleren Halbmesser r

$$r_1/r = 1{,}012 \qquad r_2/r = 1 - 0{,}024.$$

Da der mittlere Halbmesser (vgl. weiter unten) ungefähr $r = 0{,}000538\,\text{m}$ ist, so wird

$$r_1 = 0{,}000544\,\text{m} \qquad r_2 = 0{,}000525\,\text{m}.$$

Die Rohrenden mündeten in seitlich tubulirte kleine Bechergläser, welche die Elektroden enthielten (Fig. 12 und Strecker § 12).

28. Ausbreitungswiderstand. Nach der Näherungsrechnung von Maxwell setzte Strecker für den Widerstand, welcher der Ausbreitung des Stromes aus einem Rohrende vom Halbmesser r entspricht,

$$\Delta w = 0{,}80 \cdot \sigma / r\pi. \qquad 7)$$

wo σ den specifischen Leitungswiderstand der Flüssigkeit bedeutet.

29. Da zur Zeit des Beginnes meiner Arbeit eine empirische Bestätigung des Faktors 0,80 nicht vorlag, so hat Herr Kreichgauer eine solche nach einer hier genügenden Methode ausgeführt. Hierzu dienten zwei Bechergläser mit Elektroden und mit seitlichen Ansatzröhren von $r = 4{,}28\,\text{mm}$ Halbmesser (Fig. 11). Auf die Enden der Röhren waren senkrecht zu denselben Glasplatten von beiläufig quadratischem Querschnitt mit 12 cm Seite aufgekittet und mit den Rohrenden eben geschliffen. Diese Glasplatten konnten dicht passend zusammengeschoben oder auseinandergezogen werden. Beide Gefässe standen in demselben parallel-epipedischen Trog in sehr verdünnter Schwefelsäure. Die Flüssigkeitssäule hatte denselben Querschnitt wie die Glasplatten.

Man bestimmte mit Wechselströmen den Leitungswiderstand zwischen den Elektroden bei zusammengeschobenen Glasplatten und dann nachdem die letzteren auf 12 cm Abstand auseinandergezogen worden waren. Der Zuwachs des Widerstandes im zweiten Falle kann gleich dem doppelten Ausbreitungswiderstande gesetzt werden. Man fand diesen Zuwachs $= 17{,}6$ Siem. Einh.

Der specifische Leitungswiderstand der Schwefelsäure war anderweitig $= 150000$ bestimmt worden, d. h. 1 cbmm Schwefelsäure hat (bei der Beobachtungstemperatur) einen Widerstand $= 150$ Siem. Einh. Hieraus berechnet sich der doppelte Ausbreitungswiderstand nach obiger Formel $= 2 \cdot 0{,}80 \cdot 150/4{,}28 \cdot \pi = 17.86$ Siem. Einh. Die Uebereinstimmung beider Werte ist so genau, wie sie zu erwarten war und bestätigt die Formel für unsere Correction hinreichend.

Die Herren Mascart, de Nerville und Benoit finden bei ihren Versuchen mit der durchgebrochenen Quecksilberröhre fast genau dasselbe.[1])

30. Kalibrirung des Rohres. Der Querschnitt des Rohres verläuft mit unbedeutenden Wellen ziemlich gleichmässig schwach konisch (vgl. die Zeichnung Strecker § 17). Setzt man die Rohrlänge $= L$, das Rohrvolumen $= V$ und schreibt die Widerstandscapacität des Rohres

$$C\frac{L^2}{V},$$

so hat der Kaliberfactor C nach Strecker den Wert 1,00051. Herr Kreichgauer wiederholte die Kalibrirung und Berechnung und fand $C = 1{,}00048$. Ich setze

$$C = 1{,}00050.$$

31. Quecksilberwägung. Nach der bei Strecker's Messungen adoptirten Einrichtung konnte der Quecksilberinhalt des Rohres, der zur Widerstandsbestimmung gedient hatte, stets nachher abgesperrt und gewogen werden. Da meine Wägungen eine ähnliche grosse Constanz wie diejenigen von Strecker zeigten, so habe ich mir die Mühe nicht jedesmal gemacht, aber doch hinreichend oft, um diese Constanz zu prüfen.

Ich fand, stets auf 10^0 reducirt (cf. Tab. 1)

1886	Feb.	11	m = 15,2123 g
„	„	„	15,2122
„	„	12	15,2121
„	Juni	28	15,2126
1887	Juni	29	15,2124
„	Juli	19	15,2133
„	Nov.	2	15,2126
1888	März	4	15,2126
Im Mittel also			m = 15,2125 g

Strecker hatte gefunden m = 15,2109 g
Ich setze das Mittel m = 15,2117 g.

1) Détermination de l'Ohm p. 66, Paris 1884.

32. Elektroden. Mit dem Quecksilber kam nur Glas, Platin und Kork in Berührung (Fig. 12). Die Zuleitung des Stromes geschah durch Platinbleche von etwa 24×16 qmm Fläche.[1]) Der Widerstand wurde gemessen zwischen zwei Punkten, die etwa 8 mm vor den Rohrmündungen im Quecksilber lagen. Dass für die Ableitungselektroden kurze, aus dünnen Glasröhren vorstehende Platindrähte dienten, hatte eigentlich keinen praktischen Nutzen, da das Potential in dem weiten Quecksilbergefäss in Abständen von mehr als 8 mm sich nicht mehr merklich ändern konnte. Da die Messungsmethode (§ 36) aber diese kleinen Elektroden gestattet, so sind sie beibehalten worden, um genau definirte Verhältnisse zu haben.

33. Herstellung des Quecksilbers. Gewaschenes und bei etwa 100 bis 150^0 getrocknetes Quecksilber wurde nach der von Leonhard Weber angegebenen Weise im Vacuum destillirt.[1]) Ob dasselbe einmal oder zweimal destillirt war, hatte keinen merklichen Einfluss (cf. Tab. 1).

34. Temperatur. Das Quecksilberrohr stand im bedeckten und mit Filz umhüllten Wasserbade. Die Körke, durch welche die Rohrenden in die Gefässe mit den Elektroden eingeführt waren, wurden mit Kollodium oder besser Guttapercha gedichtet. Bei längerem Nichtgebrauch liess man das Wasser aus dem Bade ab. Zwei Thermometer, in $^1/_{10}$ geteilt, durch den Deckel des Wasserbades durchgesteckt und je in 25 cm vom Rohrende mit den Kugeln neben dem Quecksilberrohre befindlich gaben die Temperatur. Herr Strecker hatte dieselben auf das Lufthermometer zurückgeführt. Seine Correctionen, nach den frisch bestimmten Nullpuncten abgeändert, sind an den Ablesungen überall angebracht worden.[3])

Die Temperatur t des Quecksilbers wurde nach der Strecker'schen Formel in Rechnung gesetzt (Str. § 15):

---

1) Diese Platten nach dem Reinigen und Ausglühen in's Quecksilber gebracht, amalgamirten sich von selbst sehr vollkommen.

2) Leonh. Weber, Carl Rep. Bd. 15. S. 52. 1879.

3) Dass nicht, etwa durch Mitwirkung des Wasserdampfes, Nebenschlüsse von 0,00001 Ohm vorhanden waren, wurde constatirt.

$$\sigma_t = \sigma_0 [1 + 0{,}000900\,t + 0{,}00000045\,t^2], \qquad 8)$$

wo σ_t den Leitungswiderstand des Quecksilbers bei der Temperatur t bezeichnet.

Meistens wurden die Rechnungen zunächst auf die Temperatur 10^0 reducirt. Es ist

$$\sigma_{10} = 1{,}00904 \cdot \sigma_0.$$

35. Widerstand γ der Quecksilbernormale. Nach den im Vorigen gegebenen Daten ist bei 10^0 unser Widerstand, wenn $s = 13{,}5713$ die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 10^0 bedeutet,

$$\gamma_{10} = \frac{\sigma_{10}}{\sigma_0} C \frac{s}{m} L [L + 0{,}80\,(r_1 + r_2)] \qquad 9)$$

$$= 1{,}00904 \cdot 1{,}00050 \cdot \frac{13{,}5713}{15{,}2117}\, 1{,}23409\, [1{,}23409 + 0{,}80\,(0{,}00054 + 0{,}00053)]$$

$$= 1{,}37268 \text{ m/qmm Quecksilber } 0^0 \text{ oder Siem. E.}$$

Für eine andere Temperatur t gilt [2])

$$\gamma_t = \gamma_{10} [1 + 0{,}000884\,(t - 10) + 0{,}00000045\,(t^2 - 100)], \qquad 9\,a)$$

oder wenn t sich nicht weit von 10 entfernte

$$\gamma_t = \gamma_{10} [1 + 0{,}00089\,(t - 10)]. \qquad 9\,b)$$

Die Glasausdehnung ist in diesen Formeln einbegriffen.

Die Widerstandsvergleichung mit Quecksilber.

36. Dieselbe geschah immer nach der früher von mir beschriebenen [1]) Methode des Differentialmultiplikators im übergreifenden Nebenschlusse. Ich habe gezeigt, dass dieses Verfahren Uebergangswiderstände ganz ausschliesst und habe das bequeme und genaue Arbeiten der Methode auch jetzt wieder schätzen gelernt.

Fig. 13 stellt den Multiplikator *Mu* in der Verbindung mit dem Quecksilberrohre *Hg* bei dieser Vergleichung dar. Vgl. auch § 80.

---

1) Wied. Ann. Bd. 20, S. 76. 1883.

2) Streckers Zahl 0,000892 ist durch 0,000884 zu ersetzen. Seine Resultate werden nicht merklich hierdurch beeinflusst.

Der mit dem Quecksilber zu vergleichende Widerstand w war stets ein wenig grösser gehalten als der Quecksilberwiderstand.

Durch Nebenschaltung eines Rheostaten neben den ersteren wurde der Unterschied ausgeglichen. Fand man, dass der Widerstand R des Rheostaten neben dem Widerstande w notwendig war, um beide zusammen dem Quecksilberwiderstande γ gleich zu machen, so ist

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\gamma},$$

also

$$w = \frac{R\gamma}{R - \gamma}. \qquad 10)$$

R war gross gegen γ, nämlich zwischen 200 und 1500 gegen 1,4 Siem., so dass für die Rheostatentemperatur diejenige des Zimmers gesetzt, und γ im Nenner mit einem Mittelwert für jede Beobachtungsreihe eingeführt werden durfte.

Schwierigkeiten kamen hier nicht vor. Jede Bestimmung, indem man die beiden Multiplikatorhälften mittels des kreuzförmigen Commutators C_2 (Fig. 3), welcher in Fig. 13 weggelassen ist, vertauschte, controlirte sich obendrein selbst, so dass es unnötig sein würde, Einzelheiten der Messung anzugeben. Es mag nur bemerkt werden, dass die angewandten Ströme, in der Regel von einem kleinen Daniell-Element, nicht stärker genommen wurden, als für die Empfindlichkeit der Messung notwendig war. Ausserdem schloss man den Strom nur ganz kurz, obwohl die Versuche ergaben, dass auch eine Dauer von mehreren Sekunden keinen merklichen Fehler durch Erwärmung bewirkte.

Der Differentialmultiplikator war der von Strecker hergestellte von zweimal 700 Ohm Widerstand.

Bei einigen Versuchen verglich man den Multiplikator, dessen absoluter Widerstand bestimmt worden war, direct mit dem Quecksilber. Dies geschah aber nur bei dem zweiten, bifilar gewickelten Multiplikator; Man stöpselte in diesem Falle den kleinen Commutator, der sich auf diesem Multiplikator (Fig. 1) befand, von derjenigen Stellung, welche die beiden Drahtlagen „hintereinander“ verbunden hatte, in die Verbindung „gegeneinander“ um. Dass der Commutator widerstandsfrei war, zeigte eine besondere Versuchsreihe.

37. Der Multiplikator Nr. I, den man nicht so umschalten konnte, gab bei dem Stromschluss einen bedeutenden Selbstinduktionsstoss, dessen Beruhigung man abwarten musste. Da man hier also nicht mit kurzem Stromschluss arbeiten konnte, erschien die Stromwärme im Quecksilber bedenklich. Aus diesem Grunde wurde der Quecksilberwiderstand in einem 1,2 mm dicken seidebesponnenen Neusilberdraht copiert, welchen man von Zeit zu Zeit mit dem Quecksilber verglich. Es waren zwei solche Neusilberetalons vorhanden. Dieselben waren auf eine offene hohle Holzrolle bifilar aufgewunden (Fig. 14) und befanden sich die ganze Zeit der Messungen hindurch nebeneinander in einem mit Filz umhüllten 5 bis 6 l haltenden Petroleumbade mit einem in $^1/_{10}$ geteilten Thermometer. Die Kugel des letzteren hatte die mittlere Höhe der Neusilberdrähte. Durch oben in den Holzrollen angebrachte Löcher cirkulirte das Petroleum. Dass man nach grösseren Temperaturänderungen hinreichend lange wartete, bis die Temperatur ausgeglichen war und dass, wenn nötig, vor einer Messung hinreichend gerührt wurde, braucht kaum erwähnt zu werden.

Diese mit dem Petroleum in unmittelbarer Verbindung stehenden Drähte von grosser Masse und ausserdem von grösserer specifischer Wärme und von kleinerem Temperaturcoefficienten als das Quecksilber wurden auch durch längeren Schluss [1]) der schwachen Ströme nicht merklich beeinflusst, wovon man sich durch die Anwendung stärkerer Ströme sorgfältig überzeugte.

Da das Arbeiten mit den Neusilberwiderständen bequemer war als mit dem Quecksilber und da auch bei dem bifilar gewundenen, gegengeschalteten Multiplikator im ersten Augenblicke des Stromschlusses eine von der Capacität des Multiplikators herrührende kleine Schwankung der Galvanometernadel auftrat, so ersetzte man das Quecksilber fast immer (nämlich ausser 1887 Juli 22 und 30) durch das Neusilber.

---

1) Es ist kaum nötig zu bemerken, dass der Magnet während dieser Bestimmungen mit den Klemmschrauben an seinem Stiel festgelegt wurde. Bei dem Multiplikator Nr. II war dies nicht notwendig, was auch einen Vorteil der bifilaren Aufwindung bildet, denn das Festlegen und das Warten, bis nach dem Losschrauben die Nadelschwankungen verschwunden sind, kostet Zeit.

Die Abgrenzung des zur Vergleichung kommenden Widerstandes war so bewirkt worden, dass die Enden des Neusilberdrahtes mit 3,5 mm dicken und je 0,2 m langen Kupferdrähten sehr gut verlötet wurden, welche letzteren an der Holzrolle unverschiebbar befestigt waren. Der Gesammtwiderstand der Kupferstücke war also kleiner als 0,001 Ohm. Die Lötstellen befanden sich im Petroleum. Der zur Messung dienende Strom trat durch eine Endklemme in die Kupferdrähte ein; auf markirten Stellen der letzteren sassen ferner Klemmschrauben, welche die Stromabzweigung nach dem Differentialgalvanometer lieferten und ausserdem die Verbindung mit dem Rheostaten *Rh* im Nebenschluss (§ 36) darboten, wann letzterer, bei den Vergleichungen mit Quecksilber, an die Neusilbernormale angelegt werden musste.

Bei den Vergleichungen des Multiplikators mit den Neusilbernormalen erhielt der erstere den Nebenschluss (zwischen 60 und 250 Siem.) durch den ausgleichenden Rheostaten, da man den Multiplikatorwiderstand, eventuell durch Hinzufügung von etwas Ballast B (Fig. 3), stets etwas grösser hielt als den Neusilberwiderstand.

Es zeigte sich, dass der Widerstand der Neusilberdrähte nach ihrer Herstellung (1886 Jan. 30, aus Draht, welcher vor einem halben Jahre bezogen worden war) zuerst rascher, später sehr langsam anwuchs, im Ganzen um nahe 1,5 pro mille in fast zwei Jahren. Beide Drähte verhielten sich hierbei fast gleich (vgl. § 39).

Nach der Beendigung der Messungen im Dezember 1887 wurde der eine Widerstand, um zu einer Vergleichung mit der British Association-Einheit an Professor Glazebrook nach Cambridge gesandt zu werden, aus dem Petroleum herausgenommen. Nach 6 Tagen noch einmal in das Bad gebracht, erwies der Widerstand sich um etwa 0,0003 kleiner. Vielleicht hatte sich die Spannung des Drahtes durch das teilweise Ablaufen und Verdunsten des Petroleums aus der Holzrolle geändert. Als man nachher denselben Draht wiederholt länger aus dem Bade genommen und dann wieder eingehängt hatte, wurden Aenderungen nicht weiter wahrgenommen. Eine erneute Quecksilbervergleichung im März 1888 nach der Rücksendung aus England gab denselben Widerstand um etwa 0.0002 grösser als vor der Absendung.

Man sieht aus diesem allen, wie vorsichtig man mit Drahtwiderständen umgehen muss; eine Erfahrung, welche übrigens nicht neu ist.

38. Temperaturcoefficient der Neusilbernormalen. Der kleinere Widerstand wurde in ein Petroleum-Bad von einer nahe constanten Temperatur von etwa 19^0 gesetzt; er betrug 1,386 Siem. E. Der andere kam in ein Bad, dessen Temperatur von 14 bis 30^0 geändert wurde. Neben letzteren Widerstand wurde so viel Rheostatenwiderstand R geschaltet, dass der Widerstand von beiden dem ersteren gleich war. Betragen diese Ausgleichungswiderstände R und R' bei zwei Temperaturen t und t', (welche schon wegen der kleinen Schwankungen des anderen Bades corrigirt seien) w und w', so ist also

$$w = 1{,}386\,\frac{R}{R-1{,}386} \qquad w' = 1{,}386\,\frac{R'}{R'-1{,}386}$$

und der Temperaturcoefficient β

$$\beta = \frac{1}{t'-t}\,\frac{w'-w}{w} = \frac{1{,}386}{R}\,\frac{R-R'}{R'-1{,}386}\cdot\frac{1}{t'-t}$$

Es war für $t = 14^0{,}20 \quad R = 1213$

$t' = 29^0{,}99 \quad R' = 222{,}9$

also $\beta = 0{,}000323.$

Eine andere Bestimmung zwischen 12^0 und 25^0 ergab $\beta = 0{,}000322$ für den anderen Neusilberwiderstand. Dass beide sich gleich verhielten, wurde ausserdem durch Erwärmen in gemeinschaftlichem Bade festgestellt.

Wir setzen

$$\beta = 0{,}000323.$$

Quecksilberwert der Neusilbernormalen.

39. Ich lasse in Tab. 1 einen Auszug aus den Vergleichungen der Neusilberwiderstände mit dem Quecksilber folgen, wobei zur Uebersicht alle Bestimmungen auf 18^0 des Neusilbers umgerechnet worden sind (§ 38). Das Quecksilber ist immer mit 0^0 in die Rechnung gekommen. Es wird genügen, um die hierbei angewandten Temperaturcorrectionen (§ 34) einer möglichen späteren Neubestimmung des Quecksilber-Tempe-

raturcoefficienten anzupassen, wenn in runder Zahl die jedesmalige Temperatur des Quecksilberbades, von welcher diejenige des Neusilberbades niemals erheblich abwich, zugesetzt wird.

Beispiel der Bestimmung. Die erste Widerstandsvergleichung (1886 Feb. 11) gab die folgenden Werte.

Temperatur		Ausgleichungswiderstand R neben dem Neusilber bei der Commutatorstellung				
Quecksilber	Neusilber	Ia	IIa	IIb	Ib	
$11^0{,}21$	$12^0{,}35$	165,5	171,7	172,0	165,5	Siem. E.

Im Mittel also $R = 168{,}7$ Siem. E.

I und II bedeuten die Stellungen des Commutators, welcher die inneren und äusseren Stromzuleitungsdrähte verwechselte, a und b desjenigen, welcher die Windungen des Differentialmultiplikators vertauschte.

Bei der Temperatur $11^0{,}21$ ist der Wert des Quecksilberrohres in Siem. Einh. d. h. in m/qmm Hg von 0^0 (§ 35)

$$\gamma = 1{,}37268\,[1 + 0{,}00089\,(11{,}21 - 10)]$$
$$= 1{,}37416.$$

Hieraus folgt der Widerstand des Neusilbers bei der Beobachtungstemperatur $12^0{,}35$ nach Formel 10

$$w = \gamma \frac{R}{R-\gamma} = 1{,}37416\,\frac{168{,}7}{168{,}7 - 1{,}37416} = 1{,}38545 \text{ Siem. E.}$$

Also bei $18^0{,}00$ (§ 38)

$$w_{18} = 1{,}38545\,[1 + (18 - 12{,}35)\cdot 0{,}000323] = 1{,}38798.$$

Solche Vergleichungen im Laufe der Zeit ergaben die folgenden Werte. In der letzten Spalte stehen die auf 10^0 reducirten Quecksilbermassen m in Gramm, welche das Rohr füllten (§ 31).

Tab. 1. Widerstand der Neusilbernormalen bei 18° in Siemens'schen Einheiten d. h. in m/mm² Quecksilber 0°.

(Ueber die Berechnung der klein gedruckten Werte s. § 40.)

	Quecksilber	Temp.	Neusilbernormale		Rohrfüllung mit Hg 10^9; m =
			Nr. I	Nr. II	
			Siem. E.	Siem. E.	g
1886 Feb. 11	1 mal destillirt 1884	11°	1,3880	1,3843	15,2123
—	2 mal dest. 1886 Jan. 29	11	1,3880	1,3842	15,2122
Feb. 12—15	dasselbe, neue Füllung	11	1,3880 1,3880	1,3843 1,3842	15,2121
Feb. 16	2 mal dest. Jan. 27	11		1,3843	
Juni 28	2 mal dest. Jan. 29	18	1,3892 1,3892	1,3853 1,3853	15,2126
—	2 mal dest. Jan. 30, Glasrohr vorher gereinigt	18	1,3891	1,3853	15,2124
Aug. 17	dasselbe, gefüllt seit Juni	17	1,3893		
—	2 mal dest. Jan. 30	17	1,3893 1,3893	1,3854 1,3855	
1887 Juni 28	dasselbe, stehen geblieben	18	1,3896	1,3857	
—	2 mal dest. 1886 Jan. 29	18	1,3896	1,3858	
Juli 1	nur gewaschen und getrocknet	18	1,3895	1,3857	
—	1 mal dest. 1887 Juni 27	18	1,3896 1,3897	1,3858 1,3859	
Juli 19	dasselbe, stehen geblieben	20	1,3896	1,3858	15,2133
—	dasselbe, neue Füllung	20	1,3895	1,3857	
Aug. 3	dasselbe, stehen geblieben	19	1,3895	1,3857	
Aug. 4	dasselbe, neue Füllung	18	1,3896	1,3858	
Oct. 17	dasselbe, stehen geblieben	15	1,3897	1,3859	
Nov. 2	desgleichen	11	1,3898 1,3897	1,3860 1,3859	
—	2 mal dest. 1884	11		1,3859	
—	1 mal dest. 1887 Oct. 30	12		1,3859	15,2126
—	dasselbe, frische Füllung	15		1,3860	

40. Zeitliche Aenderungen der Neusilbernormalen. Da die Widerstandsänderung eines Drahtes ein allgemeineres Interesse bietet, so mögen die beobachteten Quecksilberwerte der beiden Neusilbernormalen graphisch übersichtlich gemacht werden.

Fig. 15 zeigt, wie die beiden Widerstände fast genau gleich verzögert anwachsen, im ganzen um beinahe 0,002 Siem. E. oder 0,14 $^0/_{00}$.[1]) Der Gang lässt sich bis auf weniger als 1/10000 durch die Formel darstellen

$$w = w_0 (1 - a \cdot 10^{-b\,t}). \qquad 11)$$

w_0 ist der schliessliche Widerstand. Drückt man die Zeit t seit der Wickelung in Monaten aus, so erhalten die Constanten den Wert

	Neusilber Nr. I	Nr. II
w_0	= 1,38975	1,38596
a	= 0,00138	0,00137
b	= 0,102	0,093

Einige hiernach berechnete Werte sind in Tab. 1 mit kleinen Ziffern aufgeführt.

Die Unterschiede zwischen den beobachteten und den so berechneten Werten bleiben unterhalb 1/10000. Bis auf diesen Betrag wird man also die Widerstände der Quecksilbersäule als constant ansehen dürfen. Und dabei sind 15 verschiedene Füllungen des Rohres angewandt worden. Auch das nur gewaschene Quecksilber (1887 Juli 1) hat merklich denselben Wert ergeben wie das einmal oder zweimal destillirte und selbst die Füllung, welche 10 Monate (1886 Aug. 17 bis 1887 Juni 28) stehen geblieben war, lässt keine Abweichung erkennen.[2])

Es gibt kaum ein besseres Zeugnis, welches man der von Siemens vor 30 Jahren eingeführten Quecksilbernormale ausstellen könnte, als diese Beobachtungsreihe.

Die Formel 11 ist im Folgenden gebraucht worden, um von der

---

1) Aenderungen von nahe gleichem Betrage fand Herr Himstedt bei mehreren Neusilberwiderständen. Wied. Ann. Bd. 31 S. 617. 1887.

2) Später wurde noch einmal eine Rohrfüllung mit Quecksilber ausgeführt, welches nach längerem Stehen etwas Oxyd zeigte. Dessen Widerstand schien etwa um 2/10000 grösser zu sein, als der von reinem Quecksilber.

ersten, etwa eine Woche nach der ersten absoluten Messung angestellten Quecksilbervergleichung auf jene zurückzurechnen. Sonst ist für jede Gruppe der Ohmbestimmung der Mittelwert aus den um dieselbe Zeit angestellten Beobachtungen eingesetzt worden nämlich in Siem. E.

		Nr. I bei 18°	Nr. II
1886	Feb. 3		1,38410
	Feb. 6		1,38414
	Feb. 10		1,38418
1886	Aug. 12—14	1,38925	
1887	Juli 15—30	1,38955	1,38575
1887	Oct. 21—27		1.38595.

Absolute Widerstandsbestimmung.

Selbstinductionscoefficient Π des Multiplikators.

41. Π ist der Faktor, welcher mit der Geschwindigkeit der Stromänderung multiplicirt, die elektromotorische Kraft des Extrastroms gibt. Π braucht nur genähert bekannt zu sein.

Von der mehrfachen Messung gebe ich ein Beispiel. Es wurde die von mir beschriebene Methode der plötzlichen Verschiebung einer Galvanometernadel durch einen Inductionsstoss gebraucht.

Die beiden Ströme eines Differentialinductors liefen, der eine durch den Multiplikator Nr. I mit seiner den Windungen parallel festgelegten Magnetnadel, der andere durch einen inductionslosen Weg von gleichem Widerstande. Sie flossen dann zusammen durch ein Galvanometer und gemeinsam zu der Verzweigungsstelle des Differentialinductors zurück.[1])

Der Galvanometerwiderstand war $W = 0{,}451$ Ohm. Multiplikator $w = 1{,}246$ Ohm, ein Zweig des Differentialinductors $\gamma = 1{,}022$ Ohm. Durch einen raschen Inductionsstoss erfolgte eine plötzliche Nadelverschiebung (ohne Endgeschwindigkeit) $x' = 6{,}86$ mm.

1) Sitz.-Ber. d. k. Akad. 1887 S. 3. Wied. Ann. Bd. 31. S. 595, 1887.

Ferner wurde ein voller Inductionsstoss der einen Inductorhälfte unter Einschaltung eines Widerstandes $R = 94{,}3$ Ohm durch das Galvanometer gesandt. Der erste Ausschlag betrug $x = 155{,}2$ mm.

Das Dämpfungsverhältnis der Nadel bei letzterem Versuch war $k = 1{,}60$, die Schwingungsdauer ohne Dämpfung $\tau = 20{,}0$ sec.

Hieraus wird der Coefficient der Selbstinduction erhalten, wenn $\Lambda = \log \text{nat}\, k$ ist,

$$12) \quad \Pi = \frac{\tau}{\pi}(w+\gamma)\frac{2W+w+\gamma}{R+W+\gamma}\frac{x'}{x}k^{-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}} = 0{,}0171 \text{ Ohm Sec.}$$

oder $\Pi = 171.10^5$ cm.

Das verwandte Verfahren in der Wheatstone-Kirchhoff'schen Verzweigung[1]) gab $\Pi = 166.10^5$ cm, wenn die Magnetnadel entfernt war.

Herr Kreichgauer erhielt nach der Dorn'schen Anordnung des unterbrochenen Hydrostromes in der Wheatstone'schen Verzweigung[2]) mit Nadel $\Pi = 168.10^5$, ohne Nadel 164.10^5.

Ich setze

$$\Pi = 168.10^5 \text{ cm.}$$

Denselben Wert kann man ohne weiteres für den congruenten und mit derselben Windungszahl versehenen Multiplikator Nr. II nehmen.

Bei den Ohmbestimmungen 1886 Februar befand sich zum Multiplikator der kleine Inductor zugeschaltet, mit welchem die Nadel in Schwingung versetzt wurde. Der Inductionscoefficient wurde für die beiden Instrumente zusammengenommen gefunden

$$\Pi_1 = 178.10^5.$$

---

1) F. K. ib. S. 8, bez. S. 598.
2) Dorn. Wied. Ann. Bd. 17, S. 783. 1882.

Magnet.

Polabstand $\mathfrak{L}$ des Magnets.

42. Das Verfahren ist dasselbe, wie früher beschrieben wurde,[1]) nur dass zuweilen zwei Magnetometer gleichzeitig gebraucht wurden.[2]) Alles wurde sorgfältig nivellirt, der Magnet in der Höhe der beiden Magnetometernadeln aufgestellt.

Es sind vier Bestimmungen ausgeführt worden, die erste und zweite mit Beobachtungen aus drei Abständen. Hier wurden die Deklinationsschwankungen gleichzeitig beobachtet und in Abzug gebracht. Bei den letzten beiden Sätzen sind nur zwei Abstände gebraucht worden, jedesmal aber zwei Magnetometer gleichzeitig. Da die Ablesungen rasch auf einander folgten, da die Deklinationsschwankungen sich zur Hälfte herausheben, da dieselben endlich nicht grösser sind als die Unsicherheiten, welche bei dem Auflegen des Magnets auf seinen Teilstrich vorkommen, und da die Zahlen als Mittelwerte aus vielen (40 bis 50) Ablesungen auftreten, so wurde die Deklination nicht beobachtet.

Die Skalenabstände brauchen nur genähert bekannt zu sein, da sie für beide Ablenkungen gleich bleiben. Nur eine Krümmung der Skale kann dies beeinträchtigen. Daher wurde mit dicht vor der Skale gespanntem feinen Faden aus dem Abstande von dessen Spiegelbild diese Krümmung bestimmt.

Die Ablenkungen fanden aus der Gauss'schen zweiten Hauptlage statt.

Die Resultate sind nach den von mir gegebenen bequemen Formeln[3]) berechnet worden. Die ersten Sätze mit der Beobachtung aus 3 Abständen liefern zugleich eine Prüfung dieser Formeln, welche durch die nahe Uebereinstimmung der beiden berechneten Werte zu ihren Gunsten ausfällt.

Sind a_1 und a_2 zwei Abstände, aus denen der Magnet die Ablenkungs-

---

1) F. und W. Kohlrausch, Wied. Ann. Bd. 27. S. 45. 1886.
2) F. K. und Hallock, Wied. Ann. Bd. 22, S. 412. 1884.
3) F. K. Sitz.-Ber. d. k. Akad. 1887 S. 29; Wied. Ann. Bd. 31, S. 614. 1887.

winkel φ_1 und φ_2 bewirkt, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{l}$ die Polabstände (magnetischen Längen) des Stabes und der Magnetometernadel, so hat man

$$\mathfrak{L}^2 - 4\,\mathfrak{l}^2 = 4\,\frac{a_1^2 \operatorname{tg}\varphi_1^{2/3} - a_2^2 \operatorname{tg}\varphi_2^{2/3}}{\operatorname{tg}\varphi_2^{2/3} - \operatorname{tg}\varphi_1^{2/3}}. \qquad 13)$$

Sind zwei Magnetometer gleichzeitig gebraucht worden, so kann das Mittel aus den beiderseitigen $\mathfrak{l}^2$ (§ 46) eingesetzt werden.

1885 Dec. 10. 13^0. Skalenabstand $A = 2997$ mm.

Skalen etwas hohl gekrümmt. Gegen die Teilstriche des grössten Ausschlags treten diejenigen des mittleren Ausschlags um $\Delta A = 0{,}32$ mm, die des kleinen Ausschlags um 0,37 mm zurück. Deswegen sind die beobachteten Ausschläge durch $1 + \Delta A/A$, d. h. die mittleren durch 1,00011, die kleinen durch 1,00012 dividirt worden.

Abstand des Magnetometercocons in beiden Aufstellungen = 190,007 cm. Verschiebungen des Magnets aus der Mittellage 20,013 cm nördlich, 20,004 cm südlich. Also die drei Abstände

$$a_1 = 74{,}995 \qquad a_2 = 95{,}003 \qquad a_3 = 115{,}012 \text{ cm}.$$

Die zugehörigen wegen Skalenkrümmung corrigirten Ausschläge sind

$$2x_1 = 1041{,}32 \qquad 2x_2 = 512{,}47 \qquad 2x_3 = 289{,}43 \text{ mm}$$

$$\mathfrak{L}^2 - 4\,\mathfrak{l}^2 = \qquad 247 \qquad\qquad 252$$

Als Magnetometer diente Nr. II (§ 22 und 46); also ist

$$\mathfrak{l} = 1{,}57 \text{ cm und}$$

$$\mathfrak{L} = \qquad 16{,}0 \qquad\qquad 16{,}2 \text{ cm}.$$

1885 Dec. 24. 13^0. $A = 3000$ mm; $\mathfrak{l} = 1{,}56$ mm (Nr. III).

Skalenkrümmung $\Delta A_2 = +\,0{,}28 \quad \Delta A_3 = +\,0{,}35$ mm;

also Correctionsdivisor $= 1{,}00009 \qquad 1{,}00012.$

Abstand des Magnetometercocons in beiden Stellungen = 190,004 cm. Verschiebungen des Magnets wie Dec. 10. Also

$$a_1 = \ 74{,}993 \qquad a_2 = 95{,}002 \qquad a_3 = 115{,}011 \text{ cm}$$

$$2x_1 = 1039{,}64 \qquad 2x_2 = 511{,}79 \qquad 2x_3 = 289{,}06 \text{ mm}$$

$$\mathfrak{L} = \qquad 16{,}4 \qquad\qquad 16{,}2 \text{ cm}.$$

1886 Mai 21. 22^0. $A = 3002$ mm. $l_1 = 1{,}57$, $l_2 = 1{,}56$ (Nr. II u. III).
Correctionsdivisor für den kleinen Ausschlag $= 1{,}00002$
Abstand der Magnetometercocons $= 190{,}012$ cm
Verschiebung des Magnets $= 30{,}010$ cm. Also

$$a_1 = 80{,}001 \qquad a_2 = 110{,}011 \text{ cm.}$$
$$2x_1 = 851{,}76 \qquad 328{,}38 \text{ mm.}$$
$$\mathfrak{L} = 15{,}9 \text{ cm.}$$

1887 Dec. 22. 16^0. $A = 3000$ mm. $l = 1{,}37$ bez. $1{,}90$ (Nr. I u. V).
Correctionsdivisor für kleinen Ausschlag $= 1 - 0{,}00003$.
Abstand der Cocons 190,017 cm.
Verschiebung 30,008 cm, also

$$a_1 = 80{,}004 \qquad a_2 = 110{,}013 \text{ cm}$$
$$2x_1 = 854{,}24 \qquad 2x_2 = 329{,}31 \text{ mm}$$
$$\mathfrak{L} = 15{,}8 \text{ cm.}$$

Im Mittel aus allen Bestimmungen kommt der Polabstand

$$\mathfrak{L} = 16{,}08 \text{ cm.}$$

Hierzu ist folgendes zu bemerken. Im Januar 1886 fiel der Magnet und verlor dadurch etwa $1{,}5\%$ seines Magnetismus. Man hatte vorher in der durch Herrn Mielberg vorgeschlagenen Weise[1]) über den horizontal gelegten Magnet eine Glasplatte gelegt und feines Eisenpulver darauf gestreut. Es gelang freilich nicht, scharfe Figuren zu erzielen. Die beiden Convergenzpunkte schienen etwa 15,5 cm auseinander zu liegen. Nach dem Falle wurde dies wiederholt und man schätzte den Abstand auf 16,5. Hiernach wären die Nahpole des Magnetes nach dem Falle auseinander gerückt. Die vorigen Messungen durch Ablenkungen würden den Polabstand aber nach dem Falle etwas kleiner ergeben, was eigentlich wahrscheinlicher ist, da der Stoss und vielleicht auch die Zeit an sich die nicht geschützten Enden des Magnets, wie man vermuten sollte, eher abschwächen würden als die Mitte. Doch sind dies nur Vermutungen.

1) Mielberg, Rep. für Meteor. Bd. 10, Nr. 1. Petersb. 1885.

In der Rechnung ist obiger Mittelwert gebraucht worden, da die Abweichungen durch Beobachtungsfehler erklärt werden können. Denn 0,1 mm Fehler des kleineren Doppelausschlages im letzten Beispiel macht $\mathfrak{L}$ um 0,3 cm falsch.

Temperatur-Coefficient c des Magnets.

43. Setzt man den Magnetismus des Stabes bei der Temperatur t

$$M = M_0(1 - c \cdot t), \qquad 14)$$

so wurden für c folgende Werte gefunden.

Nach der Weber'schen Compensationsmethode fand Herr Kreichgauer zwischen 2^0 und 30^0 0,00049.

Aus der Schwingungsdauer im kalten und warmen Zimmer zwischen 0^0 und 13^0 derselbe 0,00044.

Nach der von mir vorgeschlagenen Anordnung mit dem um 90^0 abgelenkten Magnetometer[1]) zwischen 5^0 und 40^0 fand Herr Kreichgauer 0,00046. Nach derselben Methode Herr Klupaty 0,00046.

Bei dieser Uebereinstimmung und da der Coefficient das Endresultat kaum beeinflusst, ist die Mitteilung von Einzelheiten überflüssig. Ich setze

$$c = 0{,}00046.$$

Magnetischer Inductionscoefficient μ.

44. μ bezeichnet den durch das magnetische Feld Eins nach der Axe des Stabes inducirten Magnetismus.

1) Die Herren Kreichgauer und Sack drehten nach dem Weber'schen Verfahren eine 40 cm lange Spule, in welcher der Magnet steckte, um 180^0 und erhielten durch „Multiplikation" bei den zehn ersten Drehungen eine Summe der Skalenausschläge = 1076 mm. Die Spule allein gedreht gab ebenso 368 mm. Ein kleiner Magnet vom Moment 318 [cm, g] endlich lieferte 10 mal abwechselnd in die Spule eingeschoben und herausgezogen die Summe 7994 mm. Der durch den horizontalen

1) F. K. Wied. Ann. Bd. 19, S. 420. 1883.

Erdmagnetismus bei dem Umkehren des Stabes in demselben inducirte Magnetismus ist danach gleich

$$\frac{1076-368}{7994} \cdot 318 = 28{,}2.$$

Der horizontale Erdmagnetismus war = 0,1961 [cm, g], folglich ist

$$\mu = \tfrac{1}{2}\, 28{,}2/0{,}1961 = 71{,}8.$$

Herr Kreichgauer fand bei anderer Gelegenheit $\mu = 68{,}8$.

2) Dieselben Beobachter fanden in einer Spule vom elektromagnetischen Felde = 0,2055 [cm, g] und zwar in Uebereinstimmung mit meiner früheren Beobachtung [1]) für verstärkende und abschwächende Kraft merklich gleich, das inducirte magnetische Moment = 14,27, also

$$\mu = 14{,}27/0{,}2055 = 69{,}4.$$

Zu anderer Zeit fand Herr Kreichgauer ebenso $\mu = 68{,}5$.

Ebenso erhielt Herr Klupaty im magnetischen Felde 0,2 $\mu = 69{,}4$, im Felde 0,35 $\mu = 69{,}8$, im Felde 0,49 $\mu = 70{,}7$.

Wir setzen [2])

$$\mu = 69{,}6.$$

Ueber die Plötzlichkeit des Entstehens und Verschwindens des inducirten Magnetismus.

44 a. Die vorigen Bestimmungsweisen des magnetischen Inductionscoefficienten setzen voraus, dass der inducirte Magnetismus in einer Zeit entsteht und verschwindet, welche gegen die Schwingungsdauer der Nadel (etwa 20 sec.) kurz ist. Herr Kreichgauer hat einige Versuche hierüber angestellt, welche die Voraussetzung bestätigen.

Er schloss die inducirte Spule und das Galvanometer etwa 0,2 sec nach dem Stromschluss oder der Oeffnung der magnetisirenden Spule. Nach Eliminirung des Thermostromes zeigte das Galvanometer keinen

---

1) F. K. Gött. Nachr. 1883 S. 407, Wied. Ann. Bd. 32, S. 415. 1884.

2) Da die Masse des Magnets 279,9 g betrug, so ist der specifische Inductionscoefficient für 1 g also $\Delta s = 69{,}6/279{,}9 = 0{,}249$.

von dem Magnet herrührenden Ausschlag, während der gesammte Ausschlag durch den inducirten Magnetismus etwa 70 mm betrug.

Man könnte der Meinung sein, dass bei einer langsamer abnehmenden magnetisirenden Kraft leichter ein vorübergehender Rest von Magnetismus bleibe. Deswegen drehte Herr Kreichgauer bei einer anderen Versuchsreihe den Magnet, welcher einige Zeit mit dem Nordpol nach Norden gelegen hatte, in etwa 1,5 sec in eine Lage, in welcher derselbe die Nadel eines kleinen Magnetometers nahe ostwestlich dirigirte. Der Magnet stand hierbei mit dem Nordpol fast nach Süden. Die Magnetometernadel war durch einen Anschlag in einer der ostwestlichen nahe gelegenen Stellung gehalten worden, machte also nur kleine Schwingungen. Die aus den beiden ersten Umkehrpunkten berechnete Ruhelage der Nadel stimmte im Mittel auf weniger als $^1/_{20}$ Sk.-T. mit der nachher beobachteten. 1 Sk.-T. aber bedeutete eine Aenderung des Stabmagnetismus um 0,25 [cm, g], wonach also die obige Differenz etwa 0,01 [cm, g] entsprechen würde.

Die aus den beiden Umkehrpunkten erhaltene Ruhelage gilt für einen Augenblick, der etwa 4 sec nach der Drehung des Magnets liegt. Innerhalb dieser, wahrscheinlich aber schon innerhalb einer viel kürzeren Zeit, scheint also der inducirte Magnetismus merklich vollkommen verschwunden zu sein.

Für unsere und ähnliche Zwecke kommen also die etwaigen magnetischen Nachwirkungen nicht in Betracht.

45. Quermagnetisirung. Nach den Entwicklungen von Dorn[1]) hat man, wenn das magnetische Feld Eins in einem cylindrischen Stabe von dem Volumen V, der Länge l und der Dicke l' der Länge nach das Moment μ, der Quere nach das Moment μ' inducirt,

$$15) \qquad \mu = \frac{\varkappa V}{1 + \varkappa N} \quad \text{und} \quad \mu' = \frac{\varkappa V}{1 + \varkappa L}.$$

Hier haben N und L die Bedeutung, wenn man noch $e^2 = 1 - (l'/l)^2$ setzt,

---

1) Dorn, Wied. Ann. Bd. 17. S. 776. 1882.

16) $N = 4\pi\left(\frac{1}{e^2}-1\right)\left(\frac{1}{2e}\lg\frac{1+e}{1-e}-1\right)$; $L = 2\pi\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{2e^3}\lg\frac{1+e}{1-e}\right)$.

Es ist nun $l = 20{,}0$, $l' = 1{,}5$ cm, also $V = 0{,}75^2\,\pi \cdot 20{,}0 = 35{,}4$ cbcm. Weiter wird $N = 0{,}162$, $L = 6{,}20$ gefunden. Aus $\mu = 69{,}6$ ergibt sich dann $\varkappa = 2.9$ und endlich

$$\mu' = 5{,}4.$$

Nadellängen l der Magnetometer.

46. l bezeichnet die in die Formeln eintretende Nadellänge oder den Polabstand der Nadeln.

Magnetometer I. 2 mm dicker Stahlspiegel vom Durchmesser $2\varrho = 2{,}08$ cm. Also $l = 0{,}66 \cdot 2\varrho = 1{,}37$ cm für 2. Hauptlage und $0{,}8 \cdot 2{,}08 = 1{,}66$ cm für die Tangentenbussole.[1])

Magnetometer II. Nadellänge $= 1{,}88$ cm, also $l = {}^5/_6 \cdot 1{,}88 = 1{,}57$ cm.

Magnetometer III. Nadellänge $= 1{,}87$ cm, also $l = {}^5/_6 \cdot 1{,}87 = 1{,}56$ cm.

Magnetometer IV. Nadellänge $= 1{,}50$ cm, also $l = {}^5/_6 \cdot 1{,}50 = 1{,}25$ cm.

Magnetometer V. 2 mm dicker Stahlring vom inneren Durchmesser $= 1{,}80$, dem äusseren 2,20 cm. $l = 0{,}9 \cdot 2{,}20 = 1{,}98$ cm für 1. Hauptlage und $0{,}8 \cdot 2{,}20 = 1{,}76$ cm für 2. Hauptlage (§ 42) gesetzt.

Die Zahlen haben keinen erheblichen Einfluss auf das Resultat.

Torsionsverhältnisse Θ und ϑ.

47. Dieselben betrugen:

Hauptmagnet (Multiplicator):

$\Theta = 0{,}00097$ 1886 I

$\Theta = 0{,}00320$ 1886 II und 1887 I

letzteres mit dickerem Aufhängedraht.

$\Theta = 0{,}00325$ 1887 II

mit demselben, etwas verkürzten Drahte.

---

1) Vgl. Wied. Ann. Bd. 22, S. 415. 1884 und Bd. 31, S. 617. 1887.

Magnetometer:

Nr. I	ϑ =	0,00022	1886 I,	0,00012	1886 II
II	ϑ =	0,00007	1886 I und II		
III	ϑ =	0,00006	1886 I,	0,00004	1886 II
IV	ϑ =	0,00039	1887 I,	0,00050	1887 II
V	ϑ =	0,00013	1887 I,	0,00020	1887 II.

Correctionen $\mathfrak{H}$ der magnetischen Felder.

Magnetischer Instrumentaleinfluss des Multiplikators.

48. Wenn das magnetische Feld an dem Aufhängeorte der frei aufgehangenen Magnetnadel $= H$ sein würde, so kommt durch den Einfluss der festen Teile des Instrumentes im allgemeinen noch ein kleiner negativer oder positiver Zuwachs ΔH hinzu, den wir durch Drehung des Instrumentes im Verhältnisse zu H bestimmen. Es werde bezeichnet

$$\frac{\Delta H}{H} = \mathfrak{H}.$$

Multiplikator I; 1886. Der Multiplikator wurde auf seinem Teilkreise gedreht, während die Magnetnadel unberührt blieb. An 3000 mm weiter Skale fand sich als Mittel aus mehreren Beobachtungen ein Dreheinfluss von $-0{,}011$ mm/Grad. Von dieser kleinen Grösse kommt dem Deckglase der Teil $-0{,}005$ mm/^{0} zu, wie man aus der Brennweite des Deckglases $= -700$ m und seinem Abstand 35 mm vor der Spiegelfläche berechnete und ferner dadurch controlirte, dass die Nadel während der Drehung des Multiplikators von einem feststehenden Stative aus an ihrem Stiele geklemmt war. Also betrug der magnetische Einfluss allein die Differenz $-0{,}006$ mm/^{0}. Ein Bogengrad entspricht an 3000 mm weiter Scale einem Einstellungsunterschiede von 105 mm, also ist der magnetische Einfluss $= -0{,}006/105$ oder

$$\frac{\Delta H}{H} = \mathfrak{H} = -0{,}00006.$$

Auch durch andere Beobachtungen wurde constatirt, dass der Multiplikator fast unmagnetisch war. Es wurde die Schwingungsdauer beobachtet, während die Multiplikatorwindungen der Nadel parallel oder rechtwinklig zu ihr standen. Herr Kreichgauer hatte die auf gleiche Temperatur und gleichen Erdmagnetismus reducirten Werte gefunden

	parallel	gekreuzt	
1886 Januar	8,2316	8,2323	sec
1885 Juni	8,2447	8,2454	„

Um endlich zu prüfen, ob nicht die starke Magnetnadel in der benachbarten Backstein-Wand etc. einen rückwirkenden Einfluss inducirt, wurde der Nadel ein Bügel gegeben, mit welchem sie sammt Aufhängedraht an einen anderen Ort gehängt werden konnte, dessen Localmagnetismus mit dem Ablenkungsvariometer demjenigen des Multiplikator-Ortes gleich gefunden worden war. Man fand

	Im Multipl.	Umgehängt	
1886 Dec. 2	9,0155	9,0147	sec
„ „ 3	9,2182	9,2184	„

Die Unterschiede fallen in die Beobachtungsfehler, besonders da die erste Reihe grösseren constanten Fehlern unterliegt, weil die Schwingungsdauer einer ganzen Anzahl von Sekunden so nahe kommt. Aus diesem Grunde war am zweiten Tage eine kleine Belastung hinzugefügt worden.

Multiplikator II; 1887. Derselbe zeigte einen ähnlichen sehr kleinen diamagnetischen Einfluss. Von dem gesammten Dreheinfluss $-0{,}010\,\text{mm}/^0$ denjenigen $-0{,}005\,\text{mm}/^0$ des Deckglases allein, beides an 2600 mm weiter Scale gemessen, abgerechnet, bleibt $-0{,}005$. Hieraus wird gefunden

$$\mathfrak{H} = -0{,}00005.$$

In paralleler und gekreuzter Stellung fand ich die Schwingungsdauer

13,5651 und 13,5645 sec.

Magnetischer Instrumentaleinfluss der Magnetometer.

49. Das zu untersuchende Magnetometer wurde auf ein drehbares Tischchen mit Kreisteilung gesetzt und um einige Grade ($\pm 5^0$ oder $\pm 10^0$) nach rechts und links gedreht. Von der beobachteten Mitdrehung der Nadel wurde der Teil abgerechnet, oder wenn die Nadel sich entgegengesetzt dem Instrumente drehte, hinzugefügt, welcher von der Fadentorsion herrührte. Der Rest, wie oben durch den in dieselbe Einheit umgerechneten Drehungswinkel geteilt, gibt den Instrumentaleinfluss $\mathfrak{H}$.

I. Magnetometer aus Holz mit Stahlspiegel und Kupferdämpfer.[1])

1886 Jan. 25. $\pm 5^0$ Drehung gab im Mittel einen Ausschlag von $\mp 0{,}072$ mm an 3000 mm weiter Scale. Der Torsionscoefficient war $\Theta = 0{,}00022$, also würde die Fadentorsion eine Nadeldrehung um $0{,}00022 \cdot 6000 \cdot 5^0/57^0{,}3 = \pm 0{,}113$ mm bewirken. Der magnetische Einfluss einer Drehung um $\pm 5^0$ oder in Sc. T. um $\pm 6000 \cdot 5/57{,}3 = 523$ mm beträgt also $\mp 0{,}185$ mm, also ist $\mathfrak{H}_1 = -0{,}185/523 = -0{,}00035$. $\pm 10^0$ gaben ebenso $-0{,}00039$ und am folgenden Tage $-0{,}00033$. Ich setze

$$\mathfrak{H}_1 = -0{,}00036 \qquad 1886\ \text{I.}$$

Juni und August 1886 wurde gefunden $-0{,}00043$ und $-0{,}00039$, also

$$\mathfrak{H}_1 = -0{,}00041 \qquad 1886\ \text{II.}$$

II. Magnetometer mit engen Elfenbeingehäuse und Luftdämpfung am Spiegel. Hatte i. J. 1884 und 85 durchschnittlich $-0{,}00052$ gezeigt. Gab ferner 1885 December $-0{,}00046$, 1886 Juni $-0{,}00051$, August $-0{,}00057$ und $-0{,}00058$. Ich setze

$$\mathfrak{H}_2 = -0{,}00050 \quad 1886\ \text{I} \quad \text{und} \quad -0{,}00055 \quad 1886\ \text{II.}$$

---

1) Dieser Dämpfer war kurz zuvor abgedreht worden und zeigte sich danach erheblich magnetisch. Abkochen in 5% Schwefelsäure stellte dann die schwach diamagnetische Beschaffenheit her, welche sich in den obigen Zahlen ausspricht. — Es hat Interesse, zu untersuchen, ob elektrische Spannungsdifferenzen merklich werden können. Nachdem der Stahlspiegel durch Neigen des Instrumentes einige Male mit dem Dämpfer in Contact gebracht worden war, wurde $\mathfrak{H} = -0{,}00032$ gefunden. Der Unterschied fällt in die Beobachtungsfehler.

III. Ein Instrument wie Nr. II. Gab i. Jan. 1886 + 0,00038 und 0,00049; Juni + 0,00040; August + 0,00066 und + 0,00053. Also

$$\mathfrak{H}_3 = + 0{,}00043 \quad 1886\ \text{I} \quad \text{und} \quad + 0{,}00053 \quad 1886\ \text{II}.$$

(1886 II war zur Verstärkung der Dämpfung in das Elfenbeingehäuse noch eine Papierhülse eingeschoben.)

Nr. II und III waren äusserlich ganz gleich; woher das eine diamagnetisch, das andere paramagnetisch erscheint, ist mir unbekannt.

IV. Magnetometer mit weitem Holzgehäuse und Luftdämpfungsflügel unten. Verschwindender Einfluss

$$\mathfrak{H}_4 = - 0{,}00005.$$

V. Magnetometer mit ringförmigem Magnet in Kupfergefäss (§ 23). Ebenfalls verschwindend

$$\mathfrak{H}_5 = + 0{,}00003.$$

IV und V kommen 1887 zur Verwendung.

Von Einfluss auf das Endresultat sind fast nur I und III, die in der Tangentenbussole gebraucht worden sind, wobei $\mathfrak{H}$ doppelt in den Wert des Ohm eingeht. Die übrigen sind immer nur paarweise für M/H gebraucht worden, kommen also jedes nur mit $\frac{1}{2}\,\mathfrak{H}$ in das zugehörige Endresultat.

Den kleinen Teil des Dreheinflusses, welcher vom Deckglase herrührt, höchstens 0,00002, habe ich nicht ausgeschieden, weil die Spiegelfläche mit der Drehungsaxe der Nadel nahe zusammenfällt und weil also eine Scheidung überflüssig ist.

Wenn man in Tab. 5 § 73, wo die Magnetometer immer paarweise vorkommen, die Ausschläge wegen Torsion und Skalenabstand einzeln corrigirt und mit einander vergleicht, so findet man dieselben nahe den gefundenen $\mathfrak{H}$ entsprechend (vgl. § 75). Das ist von Bedeutung, denn eine gewisse prinzipielle Unsicherheit haftet dieser Art der Bestimmung durch Drehung immerhin an. Deswegen ist auch 1886 I und II zwischen den Magnetometern gewechselt worden. 1887 kommen solche Einflüsse überhaupt nur mit verschwindendem Betrage vor, da das besondere Magnetometer der Tangentenbussole wegfällt.

Dass die Multiplikatoren keine in Betracht kommenden magnetischen Einflüsse besassen, ist jedenfalls ziemlich hoch zu schätzen.

Lokale magnetische Variationen.

50. Dieselben wurden mittels des von mir beschriebenen Lokalvariometers mit vier Ablenkungsstäben [1]) bestimmt, indem man dasselbe alternirend in gleichen Zeitintervallen von 6 min. an den zu vergleichenden Punkten aufstellte. Ein gleiches feststehendes Instrument gab die zeitlichen Schwankungen der Horizontalintensität. Die Temperaturänderung gleicht sich durch das Abwechseln aus; die ablenkenden Magnete waren durch Umhüllung mit schlechten Wärmeleitern vor ungleichmässiger Aenderung geschützt.

Als Beispiel diene die letzte Vergleichung zwischen dem Orte des Multiplikators und des westlichen Magnetometers 1887 Juli. Die erste Spalte gibt den Stand des auf constante Temperatur reducirten Zeitvariometers, welches den gleichen Scalenwert hatte wie das Lokalvariometer. Dann folgt unter p_1 die Nadeleinstellung des Lokalvariometers in derjenigen Stellung der Ablenkungsstäbe, in welcher eine Verstärkung des Erdmagnetismus Gang auf grössere Zahlen bewirkt, und unter p_2 die entgegengesetzte Einstellung; beide als Mittelwerte aus mehreren Einstellungen, die immer nahe übereinstimmten. In der vierten Spalte steht die Differenz, welche um die Beträge der fünften Spalte wegen der Aenderungen des Erdmagnetismus (Spalte 1) corrigirt, die sechste Spalte liefern. Endlich folgen die Ueberschüsse der Abweichungen Mult. — Magn., aus je einer Zahl und den beiden Nachbarn berechnet. Der ersten von den drei Zahlen legen wir nur das Gewicht $\frac{1}{2}$ bei, weil die Zunahme der Temperatur der Ablenkungsstäbe durch die Nähe des Beobachters später jedenfalls gleichmässiger ist.

---

1) F. K. Sitz.-Ber. d. k. b. Akad. 1883. S. 1; Wied. Ann. Bd. 19, S. 130. 1883.

Ort	Zeit-Variom.	p_1	p_2	$p_1 - p_2$	Corr. auf 107,0 des Zeit-Var.		Magn. minus Multipl.
Magnetometer . . .	107,12	104,30	95,57	+ 8,73	− 0,24	+ 8,49	
Multiplikator . . .	106,98	104,00	95,85	+ 8,15	+ 0,04	+ 8,19	+ 0,77
Magn.	106,82	104,37	95,30	+ 9,07	+ 0,36	+ 9,43	+ 0,97
Mult.	106,96	104,30	95,65	+ 8,65	+ 0,08	+ 8,73	+ 0,87
Magn.	106,95	104,87	95,20	+ 9,67	+ 0,10	+ 9,77	+ 0,89

Der Drehungswinkel des Rahmens mit den Ablenkungsmagneten betrug zwischen den Anschlägen $2\varphi = 65^0$, der Skalenabstand $A = 252$ mm $= 504$ Sk.-T. Also entspricht die Einstellungsdifferenz von 1 Sk.-T. einer relativen Aenderung des horizontalen Erdmagnetismus um $\frac{1}{2}(\text{tg } 32^0{,}5)/1008 = 0{,}000316$. Am Orte des Multiplikators ist nun die Differenz um — 0,89 Sk.-T. grösser, der Erdmagnetismus also um $-0{,}89 \cdot 0{,}000316 = -0{,}00028$ Teile grösser als an dem Orte des Magnetometers.

Aus ebensolchen Vergleichungen ergab sich am Orte des Multiplikators der horizontale Erdmagnetismus relativ grösser als am Orte

der Tangentenbussole 1886 bei zwei Messungen
um — 0,00021 und — 0,00029, also im Mittel um — 0,00025
des nördlichen Magnetometer um — 0,00013
des südlichen „ „ — 0,00008
also der beiden Magnetometer 1886 im Mittel um — 0,00011
des östlichen Magnetometers um + 0,00008
des westlichen „ „ — 0,00028
also der beiden Magnetometer 1887 im Mittel um — 0,00010.

Gesammtcorrection der magnetischen Felder.

51. Wir wollen gleich durch Hinzunahme der instrumentellen Einflüsse (§ 48. 49) die für die Rechnungen notwendigen Gesammtcorrectionen bilden. H sei das magnetische Feld der Multiplikatornadel. H' dasjenige der anderen Nadel. Die anzugebenden Zahlen bedeuten alsdann den Wert $(H - H')/H$.

An der Tangentenbussole 1886 ist noch zu berücksichtigen, dass der Multiplikatormagnet an deren Orte eine Abschwächung des Erdmagnetismus um 0,00006 hervorbrachte, wie sich durch Beobachtungen an einem am Platze der Tangentenbussole aufgestellten Intensitätsvariometer ergab und durch Rechnung aus den Coordinaten der Orte bestätigt wird.

Es ist also für die Tangentenbussole 1886 I (Magnetometer Nr. I)

$$(H - H')/H = -0{,}00025 - 0{,}00006 + 0{,}00006 + 0{,}00036 = +0{,}00011.$$

Tangentenbussole 1886 II (Magn. Nr. III)

$$-0{,}00025 - 0{,}00005 + 0{,}00006 - 0{,}00053 = -0{,}00077.$$

Für die Magnetometer haben wir einfach zu den Zahlen von S. 676 die Instrumentaleinflüsse $\mathfrak{H}$ Multiplikator minus $\mathfrak{H}$ Magnetometer hinzuzufügen.

1886 I, Magn. Nr. II und III; $\frac{1}{2}(\mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_3) = \frac{1}{2}(-0{,}00050 + 0{,}00043)$
$= -0{,}00004$ also $(H - H')/H = -0{,}00011 - 0{,}00006 + 0{,}00004$
$= -0{,}00013.$

1886 II, Magn. Nr. I und II; $\frac{1}{2}(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2) = \frac{1}{2}(-0{,}00041 - 0{,}00055)$
$= -0{,}00048$ also $(H - H')/H = -0{,}00011 - 0{,}00006 + 0{,}00048$
$= +0{,}00031.$

1887, Magn. Nr. IV und V; $\frac{1}{2}(\mathfrak{H}_4 + \mathfrak{H}_5) = \frac{1}{2}(-0{,}00005 + 0{,}00003)$
$= -0{,}00001$ also $(H - H')/H = -0{,}00010 - 0{,}00005 + 0{,}00001$
$= -0{,}00014.$

Bei einigen Messungen von M/H wurde nur das Magnetometer V gebraucht, dann kommt

$$(H - H')/H = -0{,}00010 - 0{,}00005 - 0{,}00003 = -0{,}00018.$$

Zeitliche Aenderungen der erdmagnetischen Horizontalintensität.

52. Das für diese Bestimmungen gebrauchte Intensitätsvariometer mit vier Ablenkungsstäben [1]) hat den Skalenabstand = 506 Sk.-T. Der

1) F. K. Wied. Ann. Bd. 15, S 540. 1882.

Temperaturcoefficient der Stäbe ist = 0,00098. Die Aufstellung fand immer so statt, dass wachsende Einstellung einen zunehmenden Erdmagnetismus bedeutete. Der Winkel φ der Direktionskraft der Ablenkungsstäbe mit dem Meridian war 1886 $\varphi = 32^0,5$, 1887 $\varphi = 32^0,0$. Es bedeutet also ein Skalenteil die relative Zunahme des horizontalen Erdmagnetismus um $E = \text{tg}\,\varphi/1012$; also gilt

$$1886 \quad E = 0,00063 \quad \text{und} \quad 1887 \quad E = 0,00062.$$

Ein Grad Temperaturerhöhung bewirkt eine Zunahme der Einstellung

$$1886 \text{ um } 1,55^p \quad \text{und} \quad 1887 \text{ um } 1,58^p.$$

Um zufälligen Temperaturschwankungen entzogen zu sein befand das Variometer mit einem in $^1/_5{}^0$ geteilten Thermometer sich unter einem Pappkasten, aus welchem nur Fernrohr und Skale hervorragte.

Controlen für die Dämpfungsbeobachtungen.

53. Der Magnet und die auf denselben gesteckten Belastungsgewichte sind Stromleiter. Die letzteren sind allerdings zur Vermeidung von Cirkularströmen aufgeschnitten. Immerhin war zu constatiren, ob nicht die Ströme, welche von dem Strome im Multiplikator rückwärts in diesen Leitern inducirt werden, einen merklichen Teil der Dämpfung bewirken. Zu dem Zweck wurde der Magnet durch einen ebenso gestalteten Stab aus elektrolytischem Kupfer ersetzt, den man nun, mit Belastungsgewichten oder ohne dieselben, im Multiplikator schwingen liess. Man bestimmte seine Dämpfung, wenn der Multiplikator stromfrei war oder wenn er von einem kräftigen Strom durchflossen wurde. Würden die in dem Leiter inducirten Ströme merklich dämpfen, so würde also die Dämpfung mit Strom grösser ausfallen müssen als ohne Strom. Der Strom 0,01 [cm, g] bewirkt über 80^0 Ablenkung einer in den Multiplikator gestellten Bussole. Man erhielt

Stromstärke =	0	0,001	0,005	0,01 [cm, g]
brigg. log. Decrem.				
für den Kupferstab	0,00172	0,00172	0,00170	0,00171
mit Gewichten	0,00192			0,00192.

Ein merklicher störender Einfluss im schwingenden Systeme ist hiernach ausgeschlossen.

Skalenabstände *A*.

Correctionen der gemessenen Skalenabstände.[1])

54. Diese setzen sich zusammen aus

1) dem Abstande der Spiegelfläche von dem Aufhängefaden, wenn nämlich der Abstand von dem Faden an gemessen ist, wie meistens geschah. Dieser Abstand wurde mit den zugeschärften Glasmaßstäben gemessen (§ 26),

2) der Dicke eines Glasspiegels,

3) der Krümmung eines Spiegels, aber nur, wenn die Spiegelfläche excentrisch gegen den Faden liegt, was nur bei dem Multiplikator der Fall war,

4) der Dicke des Deckglases,

5) dessen Krümmung, die aber bei den Magnetometern schon in der Bestimmung von $\mathfrak{H}$ (§ 49) enthalten ist,

6) der Spiegelneigung gegen die Verticale,

7) einer schiefen Stellung der Skale, die aber nur bei einigen Messungen 1887 eine auch hier sehr kleine Correction verursachte,

8) einer Krümmung der Skale, welche auch immer geringfügig war und meistens direct an den gemessenen Skalenabständen gleich in Rechnung gesetzt worden ist.

Wir wollen zunächst die für jedes Instrument constanten Correctionen 1 bis 5 zusammenstellen.

55 a. Correctionen für den Multiplikatorspiegel.

	Correction mm
Vordere Spiegelfläche vor dem Aufhängedraht 13,11 mm (1886 I)	— 13,11

1) Vgl. F. K. Wied. Ann. Bd. 31, S. 95. 1887.

		Correction mm
Optische Dicke des Spiegels, bestimmt durch Einstellung eines Mikroskops auf einen Punkt der vorderen Glasfläche und dann auf dessen Spiegelbild. Die notwendige Verschiebung des Mikroskopes betrug 4,06 mm.		+ 2,03
Deckglasdicke = 2,85 mm	— 2,85·0,53/1,53	= — 0,99
Krümmungshalbmesser des Spiegels, aus Object und Bildweite bestimmt (l. c. S. 98) = — 186000 mm; Abstand von der Drehungsaxe = 11 mm; Skalenabstand = 3000 mm; Correction = — 3000 · 11/186000		= — 0,18
Deckglaskrümmung: Brennweite, aus Object- und Bildweite bestimmt (l. c. S. 99) = — 700000 mm; Abstand vom Spiegel = 30 mm. Also Correction = — 30·2970/(— 700000)		= + 0,13
	Summa	= — 12,12

1886 II ist die erste Correction = — 13.19. Die Spiegelnormale war damals horizontal. 1886 I kommt wegen Neigung noch + 0.03 mm, so dass man im ganzen hat

$$\Delta A = -12{,}09 \quad 1886\ \text{I und} \quad -12{,}20 \quad 1886\ \text{II}.$$

1887 werden genaue Skalenabstände nicht verlangt.

55b. Correctionen für die Magnetometerspiegel.

Magnetometer I mit Stahlspiegel.

	Correction mm
Spiegelnde Fläche vor dem Cocon	— 0,98
Deckglasdicke = 3,83 mm	— 1,33
$\Delta A =$	— 2,31.

Bei dem Gebrauche dieses Magnetometers in der Tangentenbussole (1886 I) wurde der Skalenabstand von der Spiegelfläche gemessen, also ist nur $\Delta A = -1{,}33$ mm anzubringen.

Magnetometer II.

	Correction mm
Vordere Glasfläche vor Cocon	— 0,25
Optische Spiegeldicke = 0,42/1,53	+ 0,28
Deckglasdicke = 3,45 mm	— 1,19
	$\Delta A = -1{,}16$

Magnetometer III.

Vordere Glasfläche vor Cocon	— 0,58
Optische Spiegeldicke = 0,76/1,53	+ 0,50
Deckglasdicke = 2,85 mm	— 1,00
	$\Delta A = -1{,}08$

1886 II in der Tangentenbussole fällt, wie bei I, die erste Correction weg und bleibt $\Delta A = -0{,}50$.

Magnetometer IV.

Vordere Spiegelfläche vor Cocon	— 0,57
Optische Spiegeldicke 1,4/1,53	+ 0,91
Deckglasdicke = 3,8 mm	— 1,32
	$\Delta A = -0{,}98$

Magnetometer V.

Vordere Spiegelfläche vor Cocon	— 0,71
Optische Spiegeldicke 0 8/1,53	+ 0,52
Deckglasdicke = 3,8 mm	— 1,32
	$\Delta A = -1{,}51$.

Skalenabstände des Multiplikators und der Tangentenbussole.

56. Ueber das Verfahren vgl. Wied. Ann. Bd. 27, S. 8.

Nur an der Tangentenbussole ist der Abstand von der Spiegelfläche ab gemessen worden, sonst von dem Aufhängefaden. Die zugehörigen Differenzen s. § 55 a und b.

Die Protokolle ausführlich wieder zu geben, wäre zu weitläufig. Ich bemerke, dass jede Messung variirt, jede Ablesung von zwei Beobachtern ausgeführt wurde, stets in guter Uebereinstimmung, und dass, um gröbere Versehen, vielleicht aus Ablesefehlern in den cm herrührend, sicher auszuschliessen, auch noch direkte Schätzungen der Abstände mit zwei an einander gelegten Zwei-Meterstäben oder einem Bandmaaße ausgeführt wurden. Man darf jeden Skalenabstand auf höchstens 1/10000 als sicher ansehen.

Skalenabstände des Multiplikators und der Tangentenbussole 1886.

Multiplikator 1886 I	Jan. 31	Feb. 1	Feb. 2	Feb. 9
Vom Aufhängedraht zur Skale	3006,38	3006,31	3006,30	3005,97 mm
Correction (§ 55 a)	−12,09			
$A =$	2994,29	2994,22	2994,21	2993,88 mm

Tangentenbussole 1886 I (Magnetometer Nr. I).

Von der Spiegelfläche zur Skale	3002,15	3002.16	3002,05	3002,75 mm
Correction (§ 55 b)	−1,33			
Wegen Spiegelneigung	+0,07			
$A' =$	3000,89	3000,90	3000,79	3001,49 mm
$\frac{A'}{A} =$	1,00220	1,00223	1,00220	1,00254.

In der Verticalebene der Skale war nämlich die Spiegelnormale um $N = +6$ mm, die Visirlinie um $F = -30$ mm über der Spiegelmitte. Die Correction wegen Spiegelneigung beträgt also

$$N(N-F)/3000 = +0{,}07 \text{ mm}.$$

Multiplikator 1886 II	Aug. 6	11	16
Vom Aufhängedraht zur Skale	3001,31	3001,37	3001,20 mm
Correction (§ 55 a)	−12,20		
$A =$	2989,11	2989,17	2989,00 mm

Tangentenbussole 1886 II (Magnetometer Nr. III).

	Aug. 6	11	16
Von der Vorderfläche des Spiegels	2991,13	2991,29	2990,90 mm
Correction (§ 55b) Wegen Spiegelneigung			
$A' =$	2990,40	2990,56	2990,17 mm
$\frac{A'}{A} =$	1,00043	1,00046	1,00039

($N = -19$ mm, $F = -56$ mm, $N(N-F)/3000 = -0,23$ mm.)

Skalenabstände der Magnetometer für M/H.

57. Der Magnet wirkte immer auf zwei Magnetometer gleichzeitig. Die letzteren wurden dann für eine zweite Beobachtungsreihe so mit einander vertauscht, dass die Cocons genau dieselben Plätze einnahmen (vgl. § 24). Die Skalenabstände waren 1886, bei den Ablenkungen aus „zweiter Hauptlage", im Norden und Süden so nahe gleich, dass man alles mit Mittelwerten rechnen kann.

Auch die Spiegelneigung kann, da die Skalen gleich hoch lagen, für jedes Instrument gleich zusammen behandelt werden. F und N bedeuten wieder die Höhen der Visirlinie und der Spiegelnormale über der Spiegelmitte. Der Skalenabstand ist ungefähr $A = 3000$ mm. Die Correction wegen Spiegelneigung ist dann $+ N(N-F)/A$. Unter diesen Zahlen steht die Correction des betreffenden Magnetometers für den Skalenabstand, wenn letzterer, wie hier immer geschah, zunächst als Horizontalabstand der Skale vom Cocon gemessen worden war.

Die Zahlen bedeuten hier alle mm.

	1886 Februar		1886 August	
Magnetometer Nr.	II	III*	I	II
$F =$	+ 61	+ 162	+ 14	+ 18
$N =$	− 18	+ 33	− 12	− 13
$\frac{N(N-F)}{3000} =$	+ 0,47	− 1,42	+ 0,10	+ 0,13
Corr. § 55b =	− 1,16	− 1,08	− 2,31	− 1,16
Summe $\Delta A =$	− 0,69	− 2,50	− 2,21	− 1,03
Mittel =	− 1,60		− 1,62	

* Dies ist allerdings dasselbe Magnetometer wie 1886 II in der Tangentenbussole. Aber im letzteren Falle waren Gewichtchen aufgeklebt, welche die Neigung änderten.

Diese Correctionen sind an den direkt gemessenen Abständen anzubringen. Es ist

1886	Feb. 3	Feb. 6	Feb. 10	Aug. 12	Aug. 13	Aug. 14
Skale bis Cocon	3009,7	3009,2	3009,3	3005,6	3005,5	3005,8
Corrigirt $A =$	3008,1	3007,6	3007,7	3004,0	3003,9	3004,2 mm

Bei den Beobachtungen aus 1. Hauptlage 1887 konnten des Raumes wegen die Skalenabstände östlich und westlich nicht gleich gemacht werden (vgl. § 25), müssen also einzeln aufgeführt werden. Die Correctionen wegen Spiegelneigung aber sind so klein, dass man dieselben mit Mittelwerten gemeinschaftlich behandeln kann. Der Skalenabstand betrug im Mittel etwa 2540, bez. bei der letzten Beobachtung 2020 mm.

Es war 1887 Juli 15 bis Oct. 21			Oct. 30	
Magnetometer Nr.	IV	V	IV	V
$F =$	$-$ 8	$+$ 40	$-$ 6	$+$ 44
$N =$	$-$ 33	$-$ 18	$-$ 28	$-$ 12
$N(N-F)/2540 =$	$+$ 0,33	$+$ 0,43	$+$ 0,32	$+$ 0,33
bez. $N(N-F)/2020$				
Corr. § 55 b	$-$ 0,98	$-$ 1,51	$-$ 0,98	$-$ 1,51
Summe	$-$ 0,65	$-$ 1,08	$-$ 0,66	$-$ 1,18
Mittel $\Delta A =$	$-$ 0,86		$-$ 0,92 mm	

1887 Ost	Juli 15*	16	23	30*	Oct. 21	Oct. 30
Skale bis Cocon	2428,1	2428,1	2428,2	2428,5	2428,1	1926,9
Corrigirt $A =$	2427,0	2427,2	2427,4	2427,4	2427,3	1926,0 mm
West						
Skale bis Cocon	2660,9	2660,7	2660,4	2660,7	2661,0	2118,6
Corrigirt $A =$	2659,8	2659,8	2659,6	2659,6	2660,1	2117,7 mm

Galvanometerconstante *G*.

G bedeutet das Verhältnis eines kleinen Nadelausschlages zu der Stromstärke für das magnetische Feld Eins und ohne Fadentorsion.

Ueber die Einrichtungen dazu vgl. § 15 ff.

---

* Juli 15 und 30 verunglückten die Beobachtungen mit Magnetometer Nr. IV durch Reissen des Cocon bez. durch Reibung des nicht gut centrirten Dämpferflügels. Daher ist die Correction — 1,08 von Nr. V zu wählen.

Multiplikatorconstante G' der Tangentenbussole 1886.

58. Das Verfahren bei der Bestimmung des mittleren Halbmessers r ist früher beschrieben worden.[1])

Halbmesser r. Derselbe war früher bei $13^0 = 20{,}1440$ cm bestimmt worden, welche Zahl wegen einer Correction der Normaltemperatur des Vergleichsmeters seiten der kais. Normalaichungscommission auf 20,1431 abzuändern ist. Neue Messungen der Herren Kreichgauer und Heydweiller gaben 20,1410 cm. Indem ich der letzteren Messung wegen ihres neueren Datums das doppelte Gewicht beilege, setze ich für die Beobachtungstemperatur

$$13^0 \quad 1886\ \text{I} \quad r = 20{,}1417\,\text{cm}$$
$$20^0 \quad 1886\ \text{II} \quad r = 20{,}1442\,\text{cm}.$$

Magnetometer. Es wurde gebraucht (§ 22) 1886 I das Magnetometer Nr. I mit Stahlspiegel von 2,08 cm Durchmesser d. h. $l = 1{,}66$ cm äquivalenter Nadellänge (§ 46).

1886 II stand in der Tangentenbussole des Magnetometer Nr. III mit Elfenbeingehäuse und Luftdämpfer; $l = 1{,}56$ cm. Ueber den magnetischen Localeinfluss vgl. § 51.

Die Constante G' wird berechnet, wenn b die Breite, h die Dicke des Kupferstreifens, l die Länge, a den mittleren Abstand der zur Zuleitung dienenden geradlinigen Kupferstreifen, l die Nadellänge bedeutet,[2])

$$G' = \frac{2\pi}{r}\left(1 + \tfrac{1}{6}\frac{h^2}{r^2} - \tfrac{1}{8}\frac{b^2}{r^2} - \frac{al}{2\pi r}\frac{r + \frac{1}{2}l}{(r+l)^2} + \tfrac{3}{16}\frac{l^2}{r^2}\right). \qquad 17)$$

Ausser obigen Werten noch $h = 0{,}41$, $b = 0{,}86$, $a = 0{,}52$, $l = 13$ cm eingesetzt erhält man für die beiden Magnetometer und die Temperaturen 13^0 und 20^0

$$\text{für } 1886\ \text{I} \quad G' = 0{,}31189,$$
$$\text{für } 1886\ \text{II} \quad G' = 0{,}31181.$$

---

1) F. und W. K. Wied. Ann. Bd. 27, S. 19. 1886.
2) ib. S. 21.

Constante G'' der grossen Tangentenbussole 1887.

59. Auf den grossen Rahmen (§ 20) von nahe 160 cm Durchmesser wurden nach dem letzten Abdrehen noch auf der Drehbank 34 Windungen seidebesponnenen Kupferdrahtes aufgewunden, welcher nackt 0,060 und mit der Bespinnung 0,066 cm dick war. Die Breite der Windungslage betrug $b = 2{,}40$ cm.

Der Gesammtwiderstand beträgt etwa 12 Ohm. Zur Sicherung gegen Isolationsfehler war der Draht bifilar aufgewunden, so dass jeder Stromübergang zwischen benachbarten Windungen bemerkt werden konnte. Der gegenseitige Isolationswiderstand beider Lagen, zu verschiedenen Zeiten bestimmt betrug mindestens 4.10^6 bis 10^9 Ohm. Wäre ein solcher Nebenschluss ganz an der Eintrittsstelle gelegen, so würde also höchstens $12/4.10^6 = {}^1/_{300000}$ des Stromes unwirksam gewesen sein. Da der Nebenschluss sich verteilt, so war der Fehler noch kleiner.

Die Kreisgestalt des Rahmens hat sich sehr gut erhalten. An acht Puncten durch die Abmessung von 4 Durchmessern controlirt, ergeben sich noch jetzt die grössten Abweichungen eines Durchmessers vom Mittel $= 0{,}03$ cm. Da der Halbmesser aus dem Umfang abgeleitet wird, so ist dies mehr als genügend. Die Abweichungen von der ebenen Gestalt wurden zu verschiedenen Zeiten immer kleiner als 1 mm gefunden. Die Fläche, auf welche der Draht aufgewunden wird, hat eine schwach konische Gestalt, indem der Halbmesser am einen Ende etwa ${}^1/_{200}$ cm kleiner ist als am anderen. Die Umfangmessungen mit dem Bandmaß wurden in der Mitte ausgeführt.

60. Halbmesser r. Das Stahlbandmaß, 0,018 cm dick, 1,3 cm breit, ist von seinem Ende bis zu den bei der Messung verwendeten Mm-Teilstrichen mit dem Comparator sowie auch mittels des gläsernen Zwei-Meterstabes verificirt.

Nach dem letzten Abdrehen des Rahmens wurde sein Umfang gemessen und nach dem Aufwinden des Drahtes sogleich dessen äusserer Umfang. Der Zuwachs wurde $= 0{,}40$ cm gefunden. Es ist $0{,}40/2\pi = 0{,}064$ cm, also wie es der Fall sein muss, merklich der Drahtdicke gleich.

Die massgebenden Messungen des Halbmessers geschahen immer oberhalb der Drahtwindungen. Die mit dem Bandmass gefundene Länge des Umfanges wurde durch 2π geteilt und dann die halbe Dicke 0,009 des Bandmasses und die halbe Drahtdicke 0,033 cm, zusammen also 0,042 cm, abgezogen.

Der aus lauter Stücken von in Paraffin gekochten Mahagoni-Langholzes verschraubte Rahmen erwies sich nicht ganz so constant, wie ich erwartet hatte. Hätten die Resultate der von Herrn Hildebrand [1]) im hiesigen Laboratorium ausgeführten Untersuchung über hygroskopische Eigenschaften der Hölzer bereits vorgelegen, so würde ich das Holz anders behandelt haben. Denn nach Hildebrand schützt das Paraffiniren gegen hygroskopische Einflüsse nicht genügend.

Der anfängliche Halbmesser von 79,81 cm wuchs in den zwei Monaten bis zu der Verwendung als Tangentenbussole allmählich auf 79,85 und in abermals 3 Monaten auf 79,87 cm, worauf er in den nächsten Wochen wieder auf 79,86 sank. Ich will hieraus nicht entscheiden, ob es langsam eindringende hygroskopische Einflüsse sind, welche in Uebereinstimmung mit Herrn Hildebrand's Beobachtung dieses Wachstum hervorgebracht haben oder ob eine andere Nachwirkung nach dem Kochen in Paraffin vorliegt.

Von Einfluss sind diese kleinen Aenderungen natürlich nur in so fern, als man den Umfang von Zeit zu Zeit neu messen muss, was übrigens je in 5 Minuten auszuführen ist.

An den Tagen, in denen die Galvanometerconstante bestimmt wurde, wurde der Halbmesser r gefunden

1887 Juli 13	18	21	29	Oct. 19	29
$r = 79{,}847$	79,850	79,852	79,857	79,872	79,856 cm

61. Breite der Windungslage. Dieselbe beträgt $b = 2{,}4$ cm. Daraus entsteht ein Correctionsfactor für die Multiplikatorconstante G' gleich

$$1 - \tfrac{1}{8}\frac{b^2}{r^2} = 0{,}99989.$$

1) R. Hildebrand, Wied. Ann. Bd. 34, S. 393, 1888.

Neigung und Excentricität des Rahmens.

Vgl. hierüber § 20.

62. Neigung ν. Dieselbe wurde mittels Senkel, welche von dem oberen Rand des Rahmens herabhingen, bestimmt, jedesmal an zwei Stellen. Man fand z. B. Juli 9 diese Neigung ν nördlich $= 3{,}00/151 = 0{,}0199$, südlich $= 2{,}80/151 = 0{,}0186$, im Mittel also $\nu = 0{,}0192$. Als Correctionsfactor kommt der Cosinus des Neigungswinkels oder

$$1 - \tfrac{1}{2}\nu^2 = 0{,}99982.$$

An den Tagen der Messung war

1887 Juli 13 bis 29	Oct. 19	29
$\nu = 0{,}0192$	0,0200	0,0197
$\cos \nu = 1 - \frac{1}{2}\nu^2 = 0{,}99982$	0,99980	0,99981

so dass man ein für allemal 0,99981 setzen kann.

62a. Excentricität e. Man spannte einen dünnen Faden von dem nördlichen zum südlichen Rande des Rahmens in der Höhe des ost-westlichen horizontalen Holzmaßstabes (Fig. 8) und projicirte so unter Einrechnung der Breite des Holzrandes und der halben Breite der Windungslage die Mitte der letzteren auf diesen Maßstab. Der Aufhängedraht der Nadel, welcher sich dicht vor demselben Maßstabe befand, wurde ebenfalls auf dessen Teilung projicirt, von dem Unterschiede noch die Neigung des Rahmens von der gemessenen Höhe bis zur Nadelmitte abgerechnet. Der Rest ist die Excentricität e.

Z. B. traf Oct. 29 der gespannte Faden den Teilstrich 99,45 cm. Hierzu die Randbreite 0,36 und die halbe Breite 1,20 der Windungslage gibt 101,01. Der Aufhängedraht war vor dem Teilstrich 100,00, also 1,01 cm excentrisch. Da aber die Nadelmitte 17,6 cm unter dem Holzmaßstabe liegt und da sich bis zu dieser Höhe also die Excentricität (vgl. vor. S.) um $17{,}6 \cdot 0{,}0197 = 0{,}35$ vermindert, so ist $e = 1{,}01 - 0{,}35 = 0{,}66$ cm.

Der Correctionsfactor für Excentricität beträgt

$$\left(1 + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-3/2} = 1 - {}^3/_2 \frac{e^2}{r^2}.$$

Es war ($r = 80$ cm)

1887 Juli 13 bis 21_{I}	Juli 21_{II} und 29	Oct. 19	Oct. 29
$e =$ 0,89 cm	0,65	0,75	0,66
$1 - \frac{3}{2}\frac{e^2}{r^2} =$ 0,99981	0,99990	0,99987	0,99990.

63. Nadellänge $\mathfrak{L}$. Da die Multiplikatornadel, welche zugleich für die grosse Tangentenbussole dient, eine magnetische Länge gleich etwa dem fünften Teile des Durchmessers hat, so wird die hieraus entspringende Correction beträchtlich, nämlich etwa gleich $^1/_{130}$. Anstatt Bedenken zu erregen ist dies aber im Gegenteil vorteilhaft, denn die Correction hat im Gesammtresultate das entgegengesetzte Vorzeichen wie diejenige Correction, welche aus der Nadellänge entspringt, wenn deren Eigenmagnetismus bestimmt wird und man kann durch passende Wahl der Abstände die Correctionen zur gegenseitigen ganzen oder teilweisen Aufhebung bringen (§ 8 a).

Es ist aber notwendig, die Correction hier gründlicher zu behandeln, als dies bei einer Tangentenbussole mit kurzer Nadel geschieht, insbesondere auch die höheren Correctionsglieder zu berücksichtigen.

Unsere Nadel von der magnetischen Länge $\mathfrak{L}$ befindet sich symmetrisch neben dem Kreisstrome i' vom Halbmesser r. Nach der von Kinkelin gegebenen Formel[1]) beträgt das Drehungsmoment

$$2\pi \cdot Mi' \frac{r^2}{(r^2+e^2)^{3/2}}\left[1 + \tfrac{3}{16}\mathfrak{L}^2 \frac{r^2-4e^2}{(r^2+e^2)^2} + \frac{45}{1024}\mathfrak{L}^4 r^4 - \frac{12r^2e^2+8e^4}{(r^2+e^2)^4}\right]. \quad 18)$$

Entwickelt man die Brüche in Reihen und vernachlässigt $\frac{e^4}{r^4}$ sowie $\frac{\mathfrak{L}^4 e^2}{r^6}\ldots$, so kommt

$$\frac{2\pi}{r} Mi'\left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{e^2}{r^2}\right)\left[1 + \tfrac{3}{16}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2} - \tfrac{9}{8}\frac{\mathfrak{L}^2 e^2}{r^4} + \frac{45}{1024}\frac{\mathfrak{L}^4}{r^4}\right] = \frac{2\pi}{r} Mi'\left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{e^2}{r^2}\right) \cdot K \quad 19)$$

e und $1 - \frac{3}{2}\frac{e^2}{r^2}$ siehe oben. Es ist (§ 42) $\mathfrak{L} = 16{,}08$, r nahe $= 79{,}8$ cm

---

1) Wiedemann, Elektricität 3. Aufl. 3. Bd. S. 204. 1883. Unser $\mathfrak{L}$ ist dort $= 2l$ gesetzt Wegen der durch die Nullmethode bedingten Symmetriestellung fallen die Glieder mit sin α fort.

und der Correctionsfactor K in der steilen Klammer, welcher hauptsächlich durch das Glied $\frac{3}{16}\frac{\mathfrak{Q}^2}{r^2} = 0{,}00762$ bedingt wird, hat, da das mit e veränderliche Glied $\frac{9}{8}\frac{\mathfrak{Q}^2 e^2}{r^4}$ bei seiner Kleinheit kaum einen Einfluss hat, den constanten Wert

1,00769.

64. Zahlenwert der Galvanometerconstante des grossen Rahmens. In der Formel

$$20)\quad G'' = \frac{2\pi n}{r}\cos\nu\cdot\left(1-\tfrac{3}{2}\frac{e^2}{r^2}\right)\left[1+\tfrac{3}{16}\frac{\mathfrak{Q}^2}{r^2}-\tfrac{9}{8}\frac{\mathfrak{Q}^2 e^2}{r^4}+\frac{45}{1024}\frac{\mathfrak{Q}^4}{r^4}\right]\left(1-\tfrac{1}{8}\frac{b^2}{r^2}\right)$$

die unter § 60 bis 63 gegebenen Werte eingesetzt, erhält man

1887 Juli 13	18	21_{I}	21_{II}	29	Oct. 19	29
$G'' = 2{,}6947$	2,6946	2,6945	2,6947	2,6946	2,6940	2,6950.

Vergleichung der beiden zur Tangentenbussole gebrauchten Stromkreise.

65. Die Tangentenbussole bildet die Grundlage der ganzen Messung. Da die beiden Hauptresultate um 12/10000 auseinandergehen, so hielt ich für gut, noch eine direkte Vergleichung beider Stromkreise vorzunehmen. Denn es genügt ein Fehler von 6/10000 in der Galvanometerconstante, um diesen Unterschied zu erklären und da der erste Stromkreis aus einem 4 mm dicken Kupferkreis besteht, bei welchem, wenn auch eine ungleichmässige Stromverteilung von dieser Wirkung äusserst unwahrscheinlich ist, dieselbe doch nicht mit unbedingter Sicherheit verneint werden kann, so erschien dies um so mehr geboten.

Es wurden mit Hilfe der Herren Heydweiller und Sheldon über die bei der Ohmbestimmung gebrauchten Windungen des grossen Rahmens vier neue Windungen von brutto 0,26 mm dickem besponnenem Draht gelegt, die, weil sie sich in die Vertiefungen des bifilar gewundenen unteren Drahtes einlegten, eine Breite von reichlich 4 mm einnahmen und daher mit dem Bandmass gut ausgemessen werden konnten. Der Isolirwiderstand zwischen den alten und neuen Windungen betrug mehr als 4.10^9 Ohm.

Der Umfang betrug mit dem Bandmass gemessen 502,11 cm, der hieraus berechnete Halbmesser 79,913 cm. Davon ab die halbe Bandmassdicke 0,009 und die halbe Drahtdicke 0,013 cm bleibt der Halbmesser $R = 79{,}891$ cm. Für den zweiten Beobachtungssatz gilt $R = 79{,}886$ cm. Zur Messung verwendete ich das Magnetometer III, welches den Polabstand $l = 1{,}56$ cm seiner Nadel hat, also beträgt die Galvanometerconstante G_2 der vier Windungen

$$G_2 = \frac{2\pi \cdot 4}{R}\left(1+\tfrac{3}{16}\frac{l^2}{R^2}\right) = 0{,}31461 \text{ bez. } 0{,}31463.$$

G_2 ist also der Constante des kleineren dicken Stromringes (§ 58) so nahe gleich, dass nun zur Vergleichung beider Stromringe ein durchaus einwurfsfreies einfaches Verfahren gewählt werden konnte.

Beide Stromkreise wurden nämlich genau gegen die Magnetometernadel centrirt vertical nordsüdlich aufgestellt und nun derselbe Strom durch beide erst entgegengesetzt gesandt und dann gleich gerichtet, indem man den Strom im kleineren Ringe commutirte. Bei ersterer Schaltung werde der (Doppel-)Ausschlag $= x$, bei letzterer $= X$ gefunden, letzterer Wert der Tangente des einfachen Ausschlages proportional corrigirt. Dann ist, wenn i die Stromstärke vorstellt,

$$(G_2 + G')\, i = C \cdot X \qquad (G_2 - G')\, i = C \cdot x,$$

woraus

$$\frac{G_2}{G'} = \frac{X+x}{X-x} = 1 + 2\,\frac{x}{X} + 2\left(\frac{x}{X}\right)^2 \ldots \qquad 21)$$

Zwei Beobachtungsreihen bei 17^0 ergaben die Mittelwerte aus mehreren gut stimmenden Zahlen

x	X	G_2/G'	x	X	G_2/G'
mm	mm				
3,28	747	1,00882	4,93	1103	1,00899
4,03	901	1,00900	5,06	1122	1,00907
3,95	888	1,00894	4,99	1114	1,00900
Mittel $\frac{G_2}{G'}$		$= 1{,}00892$			1,00902
woraus G'		$= 0{,}31183$			0,31182

Der früher aus den Dimensionen des Kupferringes berechnete Wert ist für 17^0 und für das hier gebrauchte Magnetometer (§ 58 am Schluss)

$$G' = 0{,}31183,$$

so dass ein Unterschied zwischen dem jetzt beobachteten und dem aus der Berechnung folgenden Verhältnis der Galvanometerconstanten beider Stromkreise sich nicht ergeben hat.

Angenehm ist diese Uebereinstimmung auch deswegen, weil der dicke Kupferring bei der Bestimmung des elektrochemischen Aequivalentes mit W. Kohlrausch gebraucht worden war. Zugleich findet sich also wenigstens für das vorliegende Exemplar des Kupferringes keine Bestätigung des, mir freilich von vornherein unwahrscheinlichen Bedenkens, dass der Strom sich wegen Strukturverschiedenheiten merklich ungleich in einem solchen Ringe verteilen möge. Für manche Zwecke sind doch solche dicke Ringe nicht gut zu entbehren.

Inconstanz der Galvanometerfunktion.

66. Bildet die Galvanometernadel mit der Windungsebene des Multiplikators den Richtungswinkel φ, so ist das Drehungsmoment des Stromes auf die Nadel kleiner als in der maximalen Parallelstellung, um einen Betrag, welcher dem Quadrate von φ proportional ist. Diese Correction kann man in zwei Teile trennen, nämlich erstens in das Heraustreten der Nadelpole aus dem Bereich der Maximalwirkung des Stromes und zweitens in den Umstand, dass die elektromagnetischen Kräfte nicht mehr rechtwinklig am Magnet angreifen. Wir wollen vorläufig beides zusammenfassen und setzen

$$G_\varphi = G\,(1 - \mathfrak{g} \cdot \varphi^2). \qquad 22)$$

66a. Multiplikator I, 1886. Die Constante $\mathfrak{g}$ wurde so bestimmt, wie ich früher angegeben habe.[1]) Derselbe constante Strom durchläuft den Hauptmultiplikator und eine Wiedemann'sche Bussole, deren Empfindlichkeit man durch Regulirung des Rollenabstandes der-

1) Wied. Ann. Bd. 26, S. 431. 1885.

jenigen des Multiplikators nahe gleich gemacht hat. Man dreht nun den Multiplikator auf seiner horizontalen Kreisteilung um gemessene Winkel und beobachtet gleichzeitig die Einstellungen seiner Nadel und derjenigen des Hilfsgalvanometers. Die kleinen Schwankungen des letzteren zieht man von der Einstellung der Hauptnadel ab und befreit so die letztere von den Aenderungen der Stromstärke und des Erdmagnetismus. Diese Correctionen sind an den unten gegebenen Zahlen bereits angebracht.

Ist nun bei einer Beobachtung die Ablenkung x der Nadel aus ihrer Ruhelage an einer Scale vom Abstande A beobachtet worden, stellt also

$$\alpha = 57{,}^{0}3 \cdot \frac{x}{2A}$$

den vorläufig in Bogengraden gemessenen Ablenkungswinkel vor, ist ferner hierbei der Multiplikator aus seiner dem magnetischen Meridiane parallelen Stellung um Φ Grade gedreht worden, so ist der Richtungswinkel

$$\varphi = \Phi \pm \alpha.$$

Wenn C eine für denselben Strom constante Zahl bedeutet, so wird nun sein

$$G(1 - \mathfrak{g}\varphi^2) = C \cdot \sin\alpha.$$

In der Parallelstellung ($\varphi = 0$) werde der Ausschlag α_0 beobachtet, so ist ebenso

$$G = C \cdot \sin\alpha_0;$$

also

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{\varphi^2} \frac{\sin\alpha_0 - \sin\alpha}{\sin\alpha_0}.$$

Mit Rücksicht auf

$$\sin\alpha = \frac{x}{2A}\left(1 - \tfrac{3}{8}\frac{x^2}{A^2}\right) \qquad \sin\alpha_0 = \frac{x_0}{2A}\left(1 - \tfrac{3}{8}\frac{x_0^2}{A^2}\right)$$

kann man hierfür setzen

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{x_0 - x}{x_0}\left(1 - \tfrac{3}{8}\frac{x(x_0 + x)}{A^2}\right)$$

oder endlich, weil x und x_0 nicht sehr verschieden sind,

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{\varphi^2}\frac{x_0 - x}{x_0}\left(1 - \tfrac{3}{4}\frac{{x_0}^2}{A^2}\right).^{1)} \qquad 23)$$

Die Parallelstellung, wie sich aus den folgenden Versuchen selbst ergibt, war bei $90^0{,}0$ der Kreisteilung. Man hatte dieselbe bei $89^0{,}9$ geschätzt. Der bei letzterer Stellung beobachtete Ausschlag ist nur um 0,01 mm kleiner als der Maximalausschlag x_0.

Die Stromstärke wurde so gewählt, dass der Nadelausschlag $4^0{,}0$ (420 mm an 3000 mm weiter Scale) betrug. Der Richtungswinkel φ ergibt sich also, indem man die Kreiseinstellung von $90^0{,}0$ abzieht und je nach der Stromrichtung $\pm 4^0{,}0$ zufügt.

Der Correctionsfactor beträgt $1 - \frac{3}{4}\frac{{x_0}^2}{A^2} = 0{,}985$.

Ein Beobachtungssatz ergab

Ablenkung nach kleinen Zahlen					nach grossen Zahlen				
Kreis	φ	x mm	$x_0 - x$ mm	$\mathfrak{g}$	Kreis	φ	x mm	$x_0 - x$ mm	$\mathfrak{g}$
$77^0{,}9$	$+8^0{,}1$	408,96	11,88	0,00043	$85^0{,}9$	$+8^0{,}1$	412,53	11,26	0,00040
79,9	+6,1	414,14	6,70	42	87,9	+6,1	417,30	6,49	41
81,9	+4,1	417,82	3,02	42	89,9	+4,1	420,89	2,90	40
83,9	+2,1	420,05	0,79	42	91,9	+2,1	422,95	0,84	44
85,9	+0,1	420,83			93,9	+0,1	423,78		
87,9	−1,9	420,28	0,56	36	95,9	−1,9	423,07	0,72	46
89,9	−3,9	418,19	2,65	41	97,9	−3,9	420,94	2,85	44
91,9	−5,9	414,83	6,01	40	99,9	−5,9	417,76	6,03	40
93,9	−7,9	410,19	10,65	40	101,9	−7,9	412,36	11,43	43
			Mittel	= 0,000408				Mittel	= 0,000422

Hauptmitlel = 0,000415.

Zwischen den aus kleineren und grösseren Richtungswinkeln erhaltenen Resultaten ist bis $\varphi = 8^0$ noch kein Unterschied zu erkennen.

Einige andere Beobachtungen, von denen die letzte nach dem gleich zu beschreibenden Verfahren mit dem concentrisch aufgestellten grossen

---

1) Die Drehung des Multiplikators wird im allgemeinen an sich schon, teils durch Deckglasverschiebung, teils durch magnetischen Einfluss eine kleine Verschiebung des Skalenbildes verursachen, die man leicht bestimmen und in Rechnung setzen kann. Sie betrug hier nur 0,1 Sk.-T. auf 9^0 Drehung. Bei Drehversuchen nach beiden Seiten, wie hier, hebt sich der Einfluss von selbst heraus.

Drahtringe erhalten wurde, ergaben die Werte 0,000409 0,000426 0,000411 0,000410. Im Mittel also würde zu setzen sein

$$0{,}000414.$$

Der Wert ist bis jetzt auf den in Bogengraden gemessenen Richtungswinkel φ bezogen. Rechnen wir für unsere Zwecke in absolutem Winkelmass, so wird φ im Verhältnis 57,3 kleiner, $\mathfrak{g}$ also im Verhältnis $57{,}3^2 = 3283$ grösser. Also ist zu setzen

$$\mathfrak{g} = 0{,}000414 \cdot 3283 = 1{,}360,$$

und

$$G_\varphi = G(1 - 1{,}360 \cdot \varphi^2). \qquad 24)$$

66b. Inconstanz des Multiplikators II, 1887. Einfacher noch als das vorige Verfahren wird die Bestimmung der Inconstanz der Multiplikatorfunktion, indem man die Stromwirkung des Multiplikators auf seine Nadel durch denselben Strom oder einen Zweig desselben, welcher in einer constant stehenden Leitung fliesst, compensirt.

Der grosse Ring (§ 20) lieferte hierzu einfach das Mittel. Der Strom wurde so, wie bei der Bestimmung der Multiplikatorfunktion selbst (§ 21), verzweigt, nun der Multiplikator gedreht und die Einstellung der Nadel aus einigen Umkehrpunkten abgeleitet. Sodann führte man denselben Strom, unter Ausschaltung des Multiplikators (dessen eigener Widerstand nicht in Betracht kommt), durch die Tangentenbussole allein und beobachtete den Nadelausschlag.

Jedesmal wurden die Ausschläge nach beiden Seiten gemessen, indem man commutirte. Die unten mitgeteilten Zahlen sind also Doppelausschläge und zwar immer Mittelwerte aus mehreren Beobachtungen.

Ist wieder der Ausschlag bei der Parallelstellung der Nadel $= x_0$, bei dem Richtungswinkel φ aber $= x$, während X den (auf tg corrigirten) Ausschlag der Tangentenbussole allein bedeutet, so hat man

$$G = C(X - x_0),$$

$$G_\varphi = G(1 - \mathfrak{g}\varphi^2) = C(X - x),$$

also

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{\varphi^2} \frac{x - x_0}{X - x_0}. \qquad 25)$$

Beobachtet wurde $X = 762\,\text{mm}$; weiter

Kreisstellung	φ	x mm	$x-x_0$ mm	$\mathfrak{g}$
$83^0,5$	$-5^0,94$	$+8,75$	11,15	0,000415
86,5	$-2,94$	$+0,36$	2,76	418
89,5	$+0,06$	$-2,40$		
92,5	$+3,06$	$+0,56$	2,96	415
95,5	$+6,06$	$+9,32$	11,72	418
			Mittel	0,000416

Aus der ersten und dritten Spalte nämlich findet man, dass die Symmetriestellung bei der Kreisstellung $89^0,44$ liegt. x_0 ist merklich dem für $89^0,5$ gefundenen Ausschlage gleich.

Ein anderer Satz von Beobachtungen gab für $\varphi = \pm 2^0$ und $\pm 4^0$ die Zahlen 0,000429 und 0,000418, im Mittel also 0,000424.

Als Hauptresultat also setzen wir das Mittel 0,000420 und endlich, durch Multiplication mit 3283 (v. S.) für φ in absolutem Winkelmasse

$$\mathfrak{g} = 1,378$$

$$G_\varphi = G\,(1 - 1,378 \cdot \varphi^2). \qquad 26)$$

Da die Multiplikatoren I und II nahe gleich gestaltet sind, so controliren die beiden ebenfalls nahe gleichen Zahlen für $\mathfrak{g}$ sich gegenseitig.

Den Correctionsfactor $\mathfrak{g}$ kann man natürlich aus zwei Teilen zusammengesetzt ansehen, nämlich erstens aus der Verminderung des Drehungsmomentes infolge des Drehungswinkels φ, die für eine sehr kurze Nadel auftreten würde und zweitens infolge des Heraustretens der Pole aus der Maximalstellung zum Multiplikator. Ersterer Umstand bringt für sich den Correctionsfactor $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$. Was man gewöhnlich Inconstanz wegen der Nadellänge nennt, ist also für die beiden Multiplikatoren durch die um 0,5 verminderten $\mathfrak{g}$, d. h. durch die Zahlen 0,860 und 0,878 gegeben.

Gegenseitiger Einfluss von Multiplikator und Tangentenbussole 1886.

67. Die beiden Instrumente standen nur etwa 5 m auseinander. Den kleinen gegenseitigen Einfluss würde man am einfachsten dadurch eliminiren, dass man mit gleichgerichteten und entgegengerichteten Ausschlägen beobachtete, wenn nicht die Deklinationsschwankungen bei Gegenrichtung die genaue Beobachtung erschwerten. Das Deklinatorium aber kann wegen seiner eigenen Beeinflussung nicht im gleichen Raume aufgestellt werden.

Zwei Bestimmungen der Multiplikatorconstante sind allerdings so ausgeführt worden, dass ein Deklinationsvariometer in einem hinreichend entfernten Raum, um nicht beeinflusst zu werden, aufgestellt und von einem dritten Beobachter nach Glockenzeichen, welche ein Gehilfe gab, zu den richtigen Zeiten abgelesen wurde (1886 August 11 und 16). Aber das war denn doch gar zu umständlich. Deswegen sind die meisten Messungen nur mit gleichgerichteten Ausschlägen gemacht worden, bei denen sich die Deklinationsschwankungen hinreichend herausheben. Der gegenseitige Einfluss wurde durch besondere Beobachtungsreihen bestimmt und in Rechnung gesetzt, wie folgt.

Den Haupteinfluss übt der Multiplikator auf die Tangentenbussole, nicht sowohl durch den Strom selbst als durch den (dem Strom proportionalen) Ausschlag des starken Magnets. Man schloss einen starken Strom blos durch den Multiplikator und fand z. B., wenn dessen Nadelausschlag $\pm$ 515 mm betrug, bei dem Commutiren einen gleichsinnigen Einstellungsunterschied der Tangentenbussole um 0,40 mm. Ein Ausschlag $+x$ der Multiplikatornadel bewirkt also eine Ablenkung an der Tangentenbussole $\Delta x' = +x \cdot 0{,}20/515 = +0{,}00039 \cdot x$. Mehrere solche Sätze gaben diesen Faktor gleich 0,00036 35 39; im Mittel also

$$\Delta x' = +0{,}00037 \cdot x.$$

Ein Strom in der Tangentenbussole vom Ausschlage x' bewirkte an dem Multiplikator die Ablenkung

$$\Delta x = +0{,}00002 \cdot x'.$$

Hier soll zugleich der von den Leitungen auf dem Tische 1886 auf die Tangentenbussole ausgeübte Lokaleinfluss eliminirt werden. Ein starker Strom, der selbst den Ausschlag von ungefähr $\pm$ 1500 mm an der verlängerten Scale bewirkte, lenkte die Nadel um $\pm$ 0,23 mm ab, wenn er nur jene Leitungen durchfloss. Der Einfluss kann also gesetzt werden

$$\Delta_1 x' = + 0{,}00015 \cdot x'.$$

Wenn nun, wie gewöhnlich, Multiplikator und Tangentenbussole nach derselben Seite ausschlugen, ersterer um α, letztere um α', so hat man wegen der äusseren Einwirkungen für $\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\alpha'$ in der Rechnung zu setzen

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - 0{,}00002\ \operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha' - 0{,}00037\ \operatorname{tg}\alpha - 0{,}00015\ \operatorname{tg}\alpha'}. \qquad 27)$$

Nun war 1886 Jan. 30 und 31 Feb. bis Aug.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = 1{,}14 \qquad = 1{,}03.$$

Daher kann man mit Rücksicht auf die Kleinheit der Correctionen für den Ausdruck 27 schreiben

$$1{,}00045 \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'} \quad \text{bez.} \quad 1{,}00049 \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}. \qquad 27a)$$

Aug. 11 und 16 wurde auch mit entgegengerichteten Ausschlägen beider Instrumente beobachtet, indem nur die Tangentenbussole mit ihrer direkten, selbst wirkungslosen Zuleitung commutirt wurde. Dann hat man also zu schreiben statt $\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\alpha'$

$$\frac{1}{1{,}00049} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}. \qquad 27\,b)$$

Controle. Man verglich ad hoc einige gleich- oder entgegengesetzt gerichtete Ausschläge beider Instrumente. Man fand

	gleich	entgegen
$\frac{\text{Mult.-Ausschlag}}{\text{Tgbuss.-Ausschlag}}$	554,47 / 570,97	554,47 / 570,42

Da die Zähler gleich sind, so müssten die Nenner im Verhältnisse $1{,}00049^2 = 1{,}00098$ stehen. Ihr wirkliches Verhältnis ist $= 1{,}00096$.

1887 war der Abstand der Tischleitungen von der Nadel so gross, dass kein merklicher Einfluss stattfand. Da ausserdem für beide Instrumente die gleiche Nadel diente, so fallen die Correctionen weg.

Galvanometerconstante; Stromabzweigungsverhältnis i'/i.

68. Der Strom i' gehe ungeteilt durch die Tangentenbussole (Fig. 4, auch § 15 ff.). In diesem Stromkreis befindet sich ein Stück von 10 Siem. (bestehend aus zehn nebeneinandergeschalteten Widerständen von je 100 Siem.). Zur Vereinfachung der Rechnung will ich diesen Widerstand genau gleich 10 setzen.

Von den Enden desselben ist eine Abzweigung durch den Multiplikator w und einen diesem zugefügten grossen Widerstand R geführt. Der Stromzweig im Multiplikator sei i. Es ist dann das Abzweigungsverhältnis

$$\frac{i'}{i} = \frac{R + w + 10}{10}. \qquad 28)$$

1886. Der Multiplikator war etwa 900 mal empfindlicher als die Tangentenbussole.

Bei den ersten beiden Messungen (Jan. 30 und 31) wurde R nahe $= 10000$ genommen. Dieser Widerstand R war ein Stück aus einer Reihe von zehn Zehntausendern; vgl. Fig. 4, wo die letzteren aber alle nebengeschaltet sind. Das Stück R soll 10000_0 heissen, die übrigen $10000_1 \ldots 10000_9$. 10000_0 muss mit dem Widerstand 10 verglichen werden.

Zuerst verglich man den 100 fachen Wert von 10, nämlich die zehn hintereinandergeschalteten Hunderter mit den nebeneinandergeschalteten Zehntausendern, $\left[\frac{10000}{10}\right]$ genannt. Wenn sich ergeben hatte

$$\left[\frac{10000}{10}\right] = 1000 + \Delta, \qquad 29)$$

so ist also

$$\Sigma[10000] = 100000 + 100\,\Delta. \qquad 29\,a)$$

Nun wurden die Stücke 10000_1 bis 10000_9 mit $R = 10000_0$ verglichen. Hierbei sei gefunden worden

$$10000_1 = 10000_0 + \delta_1 \text{ u. s. w. bis } 10000_9 = 10000_0 + \delta_9. \qquad 30)$$

Wir setzen

$$\delta_1 + \delta_2 + .. + \delta_9 = \mathfrak{D}. \qquad 31)$$

Dann ist also

$$\Sigma[10000] = 10 \cdot 10000_0 + \mathfrak{D}$$

oder

$$10000_0 = \tfrac{1}{10}\Sigma[10000] - \tfrac{1}{10}\mathfrak{D}$$

oder (nach 29 a)

$$10000_0 = 10000 + 10\,\Delta - \tfrac{1}{10}\mathfrak{D}. \qquad 32)$$

Um alle veränderlichen Zuleitungswiderstände auszuschliessen, wurden diese Widerstandsvergleichungen so ausgeführt, dass man die zu vergleichenden Stücke nach einander auf einen nahe gleichen Widerstand eines gewöhnlichen Siemens'schen Rheostaten zurückführte. Letzterer befand sich in dem einen Zweige, das andere Stück im anderen Zweige einer gewöhnlichen Differentialverzweigung (Fig. 5). Man beobachtete die Nadeleinstellung ohne Strom, dann diejenige bei Stromschluss, endlich diejenige nach Hinzufügung eines kleinen Rheostatenwiderstandes und interpolirte denjenigen Rheostatenwiderstand, welcher die Nadel auf ihre Nullstellung bringen würde. Genaue Gleichheit der Zweige des Differentialgalvanometers wird wie man sieht bei diesem Verfahren nicht verlangt.

Die sämmtlichen Messungen waren in weniger als 10 Minuten ausgeführt und boten niemals die geringste Schwierigkeit.

Die Vergleichung von [10000/10] mit $\Sigma[100]$ wurde immer vor und nach dem Stromdurchgange ausgeführt. Aus den beiden um höchstens $^1/_{10000}$ auseinandergehenden Resultaten wird das Mittel genommen. Meistens wurden auch die Zehntausender vorher und nachher verglichen, wobei nennenswerte Unterschiede nicht vorkamen.

Als Beispiel wird die erste Bestimmung von 1886 Jan. 30 genügen. Es war

	zu Anfang	zum Schluss	
$\left[\frac{10000}{10}\right]$	= 1002,12	1002,08	des Siem. Rheostaten
$\Sigma[100] = 1000$	= 1002,38	1002,45	„ „ „
also nach 29 Δ	= — 0,26	— 0,37	Siem.

Mittel $\Delta = -0{,}31$ Siem.

Die einzelnen Zehntausender wurden ferner mit dem Rheostatenwiderstande 10024 verglichen und grösser als dieser gefunden

	Nr. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
um	—1,9	—0,3	+0,3	—0,4	—0,5	—2,0	+0,2	—0,4	—1,8	—0,7	Siem.
also δ =		+1,6	+2,2	+1,5	+1,4	—0,1	+2,1	+1,5	+0,1	+1,2	„

$$\mathfrak{D} = \delta_1 + \delta_2 + .. + \delta_9 = +11{,}5 \text{ Siem.}$$

Also (32)

$$10000_0 = 10000 - 10 \cdot 0{,}31 - \tfrac{1}{10} 11{,}5 = 9995{,}7.$$

Da der Multiplikatorwiderstand $w = 1{,}4$ Siem., so wird das Stromverhältnis i'/i (28)

$$\text{Jan. 30} \quad \frac{i'}{i} = \frac{9995{,}7 + 10 + 1{,}4}{10} = 1000{,}71.$$

Ebenso wurde gefunden

$$\text{Jan. 31} \quad \frac{i'}{i} = 1000{,}82.$$

Um die gleichzeitigen Ausschläge von Tangentenbussole und Multiplikator einander noch mehr anzunähern, was wegen der Deklinations- und Stromschwankungen vorteilhaft ist, wurde in der Folge das Abzweigungsverhältnis nahe $= 900:1$ gemacht. Zu diesem Zwecke bestand der dem Multiplikator zugefügte Widerstand R aus 10000_0 und der hierneben geschalteten Summe 10000_1 bis 10000_9. (Fig. 4a).

Die Rechnung wird die folgende sein. Δ und $\mathfrak{D}$ sollen die frühere Bedeutung haben. Dann ist

$$R = \frac{10000_0 \cdot (10000_1 + \ldots + 10000_9)}{10000_0 + 10000_1 + \ldots + 10000_9}. \qquad 33)$$

Die Einsetzung von 30 bis 32 liefert leicht

$$R = 9000 + 9\,\Delta - 0{,}08\,\mathfrak{D}. \qquad 34)$$

Die Beobachtung ergab

Tab. 2. Stromverhältnis i'/i.

1886	Δ			$\mathfrak{D}$	R	$\frac{i'}{i}$
	vorher	nachher	Mittel			
Feb. 1	— 0,29	— 0,27	— 0,28	— 15,0	8998,7	901,01
„ 2	— 0,32	— 0,32	— 0,32	— 11,1	8998,0	900,94
„ 9	— 0.14	— 0,20	— 0,17	— 7,7	8999,1	901,05
Aug. 6	— 0,53	— 0,66	— 0,59	— 16,1	8995,9	900,73
„ 11 I	— 0,83	— 0,89	— 0,86	— 24,3	8994,2	900,56
„ 11 II	— 0,89	— 0,94	— 0,91	— 23,4	8993,7	900,51
„ 16 I	— 0,63	— 0,75	— 0,69	— 18,6	8995,3	900,67
„ 16 II	— 0,75	— 0,80	— 0,77	— 19,0	8994,6	900,60

1887 wurden, um i'/i nahe $= 100$ zu machen, Zehntausender sowohl wie Hunderter neben einander verwendet (Fig. 4). Dann ist (29)

$$R = 1000 + \Delta.$$

Man fand

Tab. 2 fortgesetzt

	Δ	R	$\frac{i'}{i}$
1887 Juli 13	— 1,03	998,97	101,038
18	— 0,86	999,14	101,054
21	— 0,93	999,07	101,048
29	— 1,10	998,90	101,032
Oct. 19	— 0,30	999,70	101,107
29	— 0,30	999,70	101,108

Formel zur Berechnung der Galvanometerconstante G.

69 a. 1886 bedeute für den Multiplikator

G die Galvanometerconstante (S. 684),

i die Stromstärke,

H die Horizontalcomponente des magnetischen Feldes,

Θ das Torsionsverhältnis,

A den Skalenabstand,

x bez. α den Skalenausschlag bez. Ablenkungswinkel,

während für die Tangentenbussole dieselben Bezeichnungen mit einem Index dienen.

Der Coefficient der Inconstanz von G mit dem Ausschlage ist für den Multiplikator $\mathfrak{g} = 0{,}860$ (§ 66a am Schluss) und für die Tangentenbussole $\mathfrak{g}' = \frac{15}{16}\frac{l^2}{r^2} = 0{,}006$, da $l = 1{,}6$ cm (§ 46) und $r = 20$ cm.

Hiernach bestehen die beiden Gleichungen, indem man die Correction wegen des Lokaleinflusses der Zuleitung und wegen des Wechseleinflusses ganz in den Ausschlag α' der Tangentenbussole aufnimmt (§ 67),

$$iG(1 - 0{,}860\,\alpha^2) = H(1 + \Theta)\operatorname{tg}\alpha$$
$$i'G'(1 - 0{,}006\,\alpha^2) = H'(1 + \Theta')\operatorname{tg}\alpha' \cdot (1 - 0{,}00049)$$

also

$$G = G'\frac{i'}{i} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}\frac{1 - 0{,}006\,\alpha'^2}{1 - 0{,}860\,\alpha^2}\frac{H}{H'}\frac{1+\Theta}{1+\Theta'} \cdot 1{,}00049 \qquad 36)^1)$$

bez. 1,00045 für 1886 Jan. 30 und 31.

Es war nun (§ 47 und 51)

für 1886 Februar		1886 August	
$\Theta = 0{,}00097$	$\Theta' = 0{,}00022$;	$\Theta = 0{,}00320$	$\Theta' = 0{,}00004$
$\frac{H}{H'} = 1 + 0{,}00011$		$\frac{H}{H'} = 1 - 0{,}00077.$	

Diese Zahlen eingesetzt erhält man den Correctionsfactor

$$\frac{H}{H'}\frac{1+\Theta}{1+\Theta'} \cdot 1{,}00049 = 1{,}00134$$

für Feb. und $= 1{,}00287$ für Aug. Jan. 30 und 31 wird der Factor $= 1{,}00130$.

---

1) In der Rechnung kann man bequemer setzen

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}\frac{1-0{,}006\,\alpha'^2}{1-0{,}860\,\alpha^2} = \frac{A'}{A}\frac{x}{x'}\frac{1-\frac{1}{4}\frac{x^2}{A^2}}{1-\frac{1}{4}\frac{x'^2}{A^2}}\frac{1-0{,}006\,\frac{x'^2}{4A^2}}{1-0{,}860\,\frac{x^2}{4A^2}} = \frac{A'}{A}\frac{x - 0{,}0000000039\,x^3}{x' - 0{,}0000000276\,x'^2},$$

letzteres mit Rücksicht darauf, dass die Skalenabstände A und A' nahe 3000 mm betragen.

Entgegengerichtete Ausschläge Aug. 11 und 16. Hier kommt 1,00049 in den Nenner und der Factor wird

1,00190.

69 b. Bei der grossen Tangentenbussole 1887 fallen die Correctionen weg. Grosse Ausschläge werden auf eine Grösse proportional der Tangente corrigirt. Skalenabstand $A = 2600$ mm. Vgl. § 21.

x_0 ist der kleine Ausschlag bei entgegengerichtetem Strom,

x' derjenige, wenn derselbe Strom nur durch die Tangentenbussole fliesst,

X, wenn er durch beide Instrumente gleichgerichtet fliesst (nur Juli 13).[1])

Man hat dann, wenn G'' die Constante des grossen Stromkreises ist,

$$G = G'' \frac{i'}{i}\left(1 + \frac{x_0}{x'}\right) \quad \text{bez.} \quad = G'' \frac{i'}{i} \frac{X + x_0}{X - x_0}. \qquad 37)$$

Galvanometerconstante; Beobachtungen.

70. Ueber die Verbindungen s. § 15 ff., über die Ausführung der Beobachtungen § 19 und 21. G' und G'' findet sich in § 58 und 64; i'/i in § 68; über die Rechnung s. § 69 a und b.

Die Skalenabstände sind in § 56 enthalten.

Die Einzelbeobachtungen stimmten stets gut zusammen, so dass sie nicht mitgeteilt zu werden brauchen.

Tab. 3 a bis c enthält die Resultate. Tab. 3 a und b gibt erst die beobachteten Doppelausschläge $2x$ und $2x'$ für Multiplikator und Tangentenbussole, an jedem Tage mindestens zwei Bestimmungen.

Darunter steht mit der Bezeichnung v das Verhältnis $\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\alpha'$ multiplicirt mit sämmtlichen Correctionen der Formel 36. Es ist also

$$G = v \cdot G' \, i'/i.$$

Tab. 3 c wird durch § 69 b hinreichend erläutert.

1) Corrigirt auf tangens und wegen Inconstanz der Multiplikatorfunction um $-0{,}000000022 \cdot X^3$.

Tab. 3a. Galvanometerconstante in [cm^{-1}].

1886	Jan. 30		Jan. 31		Feb. 1		Feb. 2		Feb. 9		
	mm										
$2x =$	180,56	333,66	335,15	455,52	374,64	543,78	494,34	358,05	359,22	500,79	502,29
$2x' =$	206,05	381,28	382,79	520,61	385,38	559,72	508,66	368,23	369,41	515,35	516,90
$v =$	0,87936	0,87874	0,87920	0,87929	0,97622	0,97656	0,97657	0,97634	0,97673	0,97683	0,97681
$G =$	274,53	274,34	274,51	274,54	274,41	274,51	274,49	274,42	274,56	274,59	274,58
Mittel $G =$	274,44		274,53		274,46		274,46		274,58		

Tab. 3b.

1886	Aug. 6			Aug. 11				Aug. 16			
	Gleich			Entgegen		Gleich		Entgegen		Gleich	
	mm										
$2x =$	371,03	244,47	534,26	383,00	554,05	387,37	561,98	383,68	547,07	388,97	553,58
$2x' =$	381,54	251,32	549,79	393,68	569,95	398,50	578,59	394,14	562,54	400,05	569,95
$v =$	0,97651	0,97635	0,97676	0,97608	0,97632	0,97624	0,97652	0,97660	0,97659	0,97642	0,97637
$G =$	274,26	274,21	274,33	274,09	274,15	274,11	274,19	274,26	274,26	274,19	274,18
Mittel $G =$	274,27			274,13				274,22			

Tab. 3c.

1887	Juli 13		Juli 18	Juli 21		Juli 29	Oct. 19	Oct. 29
	mm							
$2x_0 =$	2,423	1,578	2,367	2,409	2,328	2,380	1,982	2,292
$2x' =$	750,1	970,2*	747,7	766,4	761,1	757,7	769,9	767,8
corrigirt =	746,4	965,7	744,0	762,3	757,1	753,7	765,8	763,7
$1+\frac{x_0}{x'} =$	1,00324	1,00327	1,00319	1,00316	1,00308	1,00316	1,00259	1,00300
$G =$	273,15	273,16	273,16	273,13	273,14	273,09	273,09	273,31

* Juli 13 II ist der Fall, in welchem X für x' beobachtet und $(X+x_0)/(X-x_0)$ zu rechnen ist.

70 a. Zur Prüfung vollkommener Isolation wurde 1887 Juli 13 eine Messung so angestellt, dass sowohl die Hunderter als die Zehntausender hintergeschaltet waren, so dass die Verzweigungswiderstände 1000 und ungefähr 100000 betrugen. Ein Isolationsfehler hätte nun einen erheblich anderen Wert für G ergeben müssen. Die Ausschläge waren jetzt freilich klein; man stellte eine grössere Zahl von Beobachtungen an.

Das Stromverhältnis ist jetzt (§ 68, Formel 28)

$$\frac{i'}{i} = \frac{R + w + 1000}{1000}.$$

Nun war $R = 100000 + 100\,\Delta$ (Formel 29 a). Da $\Delta = -1{,}03$, $w = 1{,}4$, so ist $i'/i = 100{,}90$. Beobachtet wurde $2\,x_0 = 0{,}241$ $2\,X = 101{,}2$. Also kommt (Formel 37)

$$G = G'' \frac{i'}{i} \frac{X + x_0}{X - x_0} = 273{,}19,$$

d. h. ein innerhalb der Fehlergrenze mit dem anderen übereinstimmender Wert.

Mittelwerte der Multiplikatorconstante G.

70 b. Die Zahlen zerfallen in vier Gruppen. 1886 Jan. 30 bis Feb. 2, dann Feb. 9 für sich, da der Magnet hier frisch aufgehängt wurde. Weiter 1886 August, wo der Magnet mit den Gewichten beschwert war und 1887 der Multiplikator Nr. II mit constant aufgehangenem Magnet.

Innerhalb der einzelnen Gruppen stimmen die Resultate so gut man erwarten darf überein. Nur der letzte Wert 1887 Oct. 29 weicht um 0,00055 von dem Mittelwerte ab, also um einen grösseren Betrag als die einfache Versuchsanordnung hier erwarten lässt.[1])

Die Stellung des Magnets zum Multiplikator wurde immer nach Höhe und Seitenverschiebung controlirt. Besondere Versuche hatten gezeigt,

---

1) Vor dieser Bestimmung waren die Instrumente durch Unvorsichtigkeit verschoben worden. Ein Versehen bei der Neu-Orientirung ist freilich unwahrscheinlich, aber nicht undenkbar.

dass innerhalb der vorkommenden Aenderungen die Galvanometerconstante auf $^1/_{10000}$ constant war.

Hygroskopische Aenderungen des Multiplikatorrahmens könnten die Constante etwas beeinflussen, doch ist dies schwer festzustellen.

Ich setze für G in jeder Gruppe den Mittelwert. Man würde also haben

1886 bis Feb. 2	Feb. 9	August	1887*
$G = 274{,}472$	274,58	274,207	273,153

Verhältnis des Stabmagnetismus zum Erdmagnetismus $\frac{M}{H}$

Die Beschreibung der Instrumente und deren Handhabung s. § 22 ff.; Skalenabstände § 57, Torsionscoefficienten § 47, magnetische Lokaleinflüsse § 51, Polabstand des Magnets § 42, der Magnetometer § 46.

1886 geschahen die Ablenkungen aus der zweiten, 1887 aus der ersten Gauss'schen Hauptlage.

Abstand a des Magnets von den Magnetometern.

71. Gemessen wurde der Abstand $2a$ der beiden Teilstriche des Zweimeterstabes, vor denen die Magnetometercocons aufgestellt wurden (§ 24). Der Abstand beträgt

1886 Februar	$2a = 199{,}965$ cm	$a = 99{,}982$ cm
1886 August	200,010	100,005
1887 August	209,404	104,702
1887 Oct. 21	209,406	104,703
1887 Oct. 30	186,007	93,003

Formeln zur Berechnung von M/H.

72. M' sei zunächst der Eigenmagnetismus des Stabes in der Ostwestlage, H' die Horizontalintensität im Magnetometer, a der Wirkungs-

* Nur 1887 Juli 16, wo der Multiplikator während der Dämpfungsbeobachtungen um $0^0{,}35$ gegen die Maximalstellung verdreht war, ist zu setzen $273{,}153 \cdot \cos 0^0{,}35 = 273{,}148$.

abstand, $\mathfrak{L}$ der Polabstand des Stabes, $\mathfrak{l}$ derjenige der Nadel, ϑ das Torsionsverhältnis des letzteren; φ endlich ihr Ablenkungswinkel. Kommen zwei Nadeln gleichzeitig zur Beobachtung, so gilt für H', φ und ϑ das arithmetische Mittel, während $\mathfrak{l}$ berechnet wird aus $\mathfrak{l}^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{l}_1^2 + \mathfrak{l}_2^2)$.

Dann ist

$$\text{in 1. Hauptlage } \frac{M'}{H'} = P_1 \operatorname{tg}\varphi; \quad \text{in 2. Hauptlage } \frac{M'}{H'} = P_2 \operatorname{tg}\varphi. \qquad 38)$$

Die Coefficienten P_1 und P_2 bildet man wie ich gezeigt habe [1]) am rationellsten folgendermassen, wobei für die 1. Hauptlage gleich eine kleine aus unsymmetrischer Magnetisirung des Stabes herrührende Correction einbegriffen werden soll.

Die Ablenkungen waren nämlich in der einen Stellung des Magnets grösser als in der entgegengesetzten und zwar betrug die eine etwa 383, die andere 373 mm, wenn der Wirkungsabstand $a = 93$ cm war. Hieraus ergibt sich die Unsymmetrie der Magnetisirung $\mathfrak{a}$ aus $\left(\frac{93+\mathfrak{a}}{93-\mathfrak{a}}\right)^3 = \frac{383}{373}$, also $\mathfrak{a} = 0{,}4$ cm. Wie man leicht nachrechnen kann, wird hierbei das Mittel der beiden Ablenkungen im Verhältnis $1 + 6 \cdot 0{,}4^2/a^2 = 1 + 0{,}96/a^2$ grösser gefunden, als es bei symmetrischer Magnetisirung sein würde. Man hat also $1 - 0{,}96/a^2$ als Correctionsfactor.

Hiernach wird

$$P_1 = \tfrac{1}{2} a^3 (1+\vartheta)\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{0{,}96}{a^2}\right), \qquad 39_{\mathrm{I}}$$

$$P_2 = a^3 (1+\vartheta)\left(1 + \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{L}^2 - 4\mathfrak{l}^2}{a^2}\right)^{3/2}. \qquad 39_{\mathrm{II}}$$

M/H für die Schlussrechnung. 1) An Stelle von M' ist zu setzen der wegen der Induction durch den Erdmagnetismus corrigirte Wert M_0 [2])

$$M_0 = M' + (\mu - \mu') H = M'\left[1 + (\mu - \mu')\frac{H}{M'}\right]. \qquad 40)$$

---

1) Sitz.-Ber. d. k. Akad. 1887, S 29: Wied. Ann. Bd. 31, S. 614. 1887.
2) Dorn, Wied. Ann. Bd. 17, S. 777. 1882.

Nun ist der Unterschied des Längs- und des Quer-Inductionscoefficienten μ und μ' (§ 45)

$$\mu - \mu' = 69{,}6 - 5{,}4 = 64{,}2.$$

Für H/M', welches sich innerhalb der Grenzen 1/36600 und 1/36900 hält, kann man den Mittelwert 1/36800 = 0,0000272 setzen. Demnach ist für alle Versuche

$$M_0 = M' \cdot 1{,}00174.$$

2) An Stelle von H', welches für den Ort und den Instrumentaleinfluss der Magnetometer gilt, ist einzuführen der für den Multiplikator geltende Wert H_0. Zu diesem Zweck muss also M'/H' noch multiplicirt werden mit

$$\frac{H'}{H_0} = 1 - \frac{H_0 - H'}{H_0}.$$

Man erhält mit Rücksicht auf die Kleinheit der Glieder also

$$\frac{M_0}{H_0} = \frac{M'}{H'}(1 + \mathfrak{p}) \quad \text{wo} \quad \mathfrak{p} = 0{,}00174 - \frac{H_0 - H'}{H_0}. \qquad 41)$$

$(H_0 - H')/H_0$ s. § 51, wo H_0 mit H bezeichnet ist.

Zahlenwerte für P und $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{L}$ ist constant = 16,08 cm (§ 42). Entnimmt man die übrigen Grössen der Formeln 39 $\mathfrak{l}$ aus § 46, ϑ aus § 47, a aus § 71, so erhält man

Tab. 4.

	Magnetometer Nr.	$\mathfrak{l}$	ϑ	a	P	$\frac{H_0 - H'}{H_0}$	$\mathfrak{p}$
		cm		cm			
1886 Feb.	II u. III	1,6	0,00006	99,982	$P_2 = 1008870$	− 0,00013	+ 0,00187
„ Aug.	I u. II	1,5	0,00009	100,005	1009630	+ 0,00031	+ 0,00143
1887 Juli	IV u. V	1,6	0,00026	104,702	$P_1 = 567360$	− 0,00014	+ 0,00188
Ebenda	nur V	2,0	0,00013	104,702	567330	− 0,00018	+ 0,00192
1887 Oct. 21	IV u. V	1,6	0,00035	104,703	567430	− 0,00014	+ 0,00188
„ Oct. 27	IV u. V	1,6	0,00035	93,003	396420	− 0,00014	+ 0,00188

Zahlenwerte von M'/H' und M_0/H_0.

73. Sämmtliche Bestimmungen von M/H sind in Tab. 5 zusammengestellt. x ist der in richtigen mm angegebene halbe Doppelausschlag der Magnetometer aus sechs bis zehn gut stimmenden Ablenkungen erhalten. Die Deklinationsschwankungen sind in Abrechnung gebracht; der Einfluss des gedrehten Magnets auf das Deklinationsvariometer war sehr sorgfältig ermittelt worden.

Die erste Zeile zu jedem Tage enthält die zu Anfang, die zweite die zum Schluss der Beobachtungen erhaltene Ablenkung, letztere mit ausgewechselten Magnetometern.*) n, s oder o, w bedeuten nördliche und südliche oder östliche und westliche Aufstellung des Magnetometers.

1886 ist dann der Mittelwert aus allen vier Ablenkungen gebildet und der mittlere Skalenabstand A (§ 57) daneben gestellt. 1887 sind die Skalenabstände west und ost ungleich, weswegen zwei Mittel gebildet werden.

1887 Juli 15 und 30 kommt nur Magnetometer V in Rechnung, da das andere in einer Stellung nicht reibungsfrei aufgestellt war.

In den ersten Spalten ist die Temperatur t_0 und der mittlere Stand n_0 des Intensitätsvariometers während der Beobachtungen enthalten (§ 12 und 52). Das letztere wurde vor und zwischen den Ablenkungen mehreremal immer bei nord-südlich gelegtem Magnet abgelesen, also unter den Bedingungen, welche für die Dämpfungsbeobachtungen gelten. Der Stand n_0 des Intensitätsvariometers ist nach § 52 bereits überall auf dieselbe Temperatur dieses Instrumentes reducirt worden.

1887 Juli 15. 16 und 22. 23 wurde M/H zu anderen Zeiten bestimmt als die Dämpfung. Zur Ohmbestimmung Juli 16 gehören die beiden M/H Juli 15 und 16, aus denen später das Mittel genommen werden soll; M/H Juli 23 gehört zu Ohm Juli 22.

---

*) Nur bei dem ersten Satze Feb. 3 wurde jedes Magnetometer nur einseitig beobachtet. Die geklammerten Werte sind aus diesen Ablenkungen und aus den Umstellungen Feb. 6 und 10 abgeleitet worden, nachdem letztere Beobachtungen auf gleiche Temperatur und erdmagnetische Intensität reducirt worden waren.

Tab. 5. Beobachtete Werte von M/H.

	Temp. t_0	Intens. n_0	Magnetometer-Ausschlag x		Mittel x	Scalen-Abstand A	$\frac{M'}{H'}$	$\frac{M_0}{H_0}$
1886	°	p	Nr. II mm	Nr. III mm				
Feb. 3*)	14,05	91,95	220,09 n	220,33 s	220,13	3008,1	36864	36933
			(219,92	220,16)				
Feb. 6	11,50	91,68	220,38 n	220,52 s	220,33	3007,6	36905	36974
	11,30	92,55	220,58 s	219,85 n				
Feb. 10	13,70	90,02	220,55 s	219,78 n	220,15	3007,7	36874	36943
	14,05	91,71	220,11 n	220,18 s				
1886			Nr. I	Nr. II				
Aug. 12	20,36	97,44	218,85 n	219,50 s	219,20	3004,0	36787	36839
	20,46	98,30	219,40 s	219,04 n				
Aug. 13	18,65	99,29	219,37 s	219,01 n	219,13	3003,9	36777	36830
	19,14	99,79	218,83 n	219,32 s				
Aug. 14	19,43	98,75	218,83 n	219,44 s	219,13	3004,2	36773	36826
	19,83	98,94	219,32 s	218,94 n				
1887			Nr. IV	Nr. V	x west / ost	A west / ost		
Juli 15	22,86	99,88	(315,44 o)	343,45 w	343,45	2659,8 w	36593	36664
	23,01	100,71		315,42 o	315,42	2427,0 o		
Juli 16	22,92	100,90	343,29 w	315,40 o	343,19	2659,8 w	36577	36645
	22,98	101,20	315,29 o	343,10 w	315,35	2427,2 o		
Juli 23	21,25	99,31	315,74 o	343,85 w	343,86	2659,6 w	36636	36705
	21,33	99,50	343,88 w	315,75 o	315,75	2427,4 o		
Juli 30	23,06	98,82		315,67 o	343,36	2659,6 w	36602	36673
	23,98	99,24	(343,36 w)	343,36 w	315,67	2427,4 o		
Oct. 21	14,85	104,27	316,37 o	344,32 w	344,40	2660,1 w	36704	36773
	15,34	104,80	344,48 w	316,45 o	316,41	2427,3 o		
Oct. 27	13,37	102,44	361,04 o	395,57 w	395,71	2117,7 w	36782	36851
	13,39	102,73	395,84 w	361,24 o	361,14	1926,0 o		

73 a. Schlusswerte M/H. M_0/H_0 gilt für den mittleren Stand t_0 des Thermometers und n_0 des Intensitäts-Variometers. Sind die Dämpfungsbeobachtungen bei t und n angestellt, so ist anstatt M_0/H_0 in die Schlussrechnung einzuführen (§ 43 und 52)

$$\frac{M}{H} = \frac{M_0}{H_0}\left[1 + 0{,}00046\,(t_0 - t) + 0{,}00063\,(n_0 - n)\right] \qquad 42)$$

Tab. 6 enthält unter t_0 und n_0 die Mittelwerte der Paare in Tab. 5, dann die dort gegebenen M_0/H_0; t und n sind aus Tab. 8 entnommen. Die beiden Correctionen sind unter Δ_t und Δ_n gegeben.

Tab. 6. Schlusswerte von M/H.

	t_0	n_0	$\frac{M_0}{H_0}$	t	n	Δ_t	Δ_n	$\frac{M}{H}$
1886								
Feb. 3	14,05°	91,95^p	36933	14,00°	91,49^p	+ 1	+ 10	36944
6	11,40	92,11	36974	11,46	91,58	− 1	+ 12	36985
10	13,87	90,86	36943	13,95	90,98	− 1	− 3	36939
Aug. 12	20,41	97,87	36839	20,37	97,00	+ 1	+ 20	36860
13	18,89	99,54	36830	18,91	99,73	− 0	− 5	36825
14	19,63	98,84	36826	19,70	99,29	− 1	− 11	36814
1887								
Juli 15. 16	22,94	100,67	36654	22,55	99,32	+ 7	+ 31	36692
22. 23	21,29	99,40	36705	21,03	100,24	+ 4	− 19	36690
30	23,52	99,03	36673	23,53	98,61	− 0	+ 9	36682
Oct. 21	15,09	104,53	36773	15,17	104,11	− 1	+ 9	36781
27	13,38	102,58	36851	13,46	103,08	− 1	− 12	36838

Schwingungsdauer τ und logarithmisches Decrement Δ' bei offener Kette.

74. Die Zeitbestimmung geschah nach einem Chronometer, dessen Gang, 1886 Feb. und 1887 Oct. — 11 sec, sonst — 9 sec täglich betragend. schon durch Multiplikation mit 1,00013 bez. 1,00010 angebracht worden ist.

Fast immer wurde eine Bestimmung vor, eine zweite nach der Dämpfungsbeobachtung ausgeführt.

In Tab. 7 enthalten die ersten Spalten wieder die Temperatur t_0 und den mittleren Stand n_0 des Intensitätsvariometers für die einzelne Bestimmung und darunter die Mittel für beide; die dritte Spalte die mittleren Amplituden während der Schwingungen. Der Skalenabstand beträgt 1886 2990 mm und 1887 2580 mm. Dann folgen die beobachteten Schwingungsdauern und dann die auf kleine Bögen reducirten Werte τ_0 mit dem Mittelwert darunter, alles in richtigen Sekunden.

t und n sind wieder die aus Tab. 8 zu entnehmende Temperatur und Intensität während der Dämpfungsbeobachtungen. Diesen Ständen entspricht also die Schwingungsdauer τ (§ 43 und 52)

$$\tau = \tau_0[1 + \tfrac{1}{2}\,0{,}00046\,(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\,0{,}00063\,(n_0 - n)]. \qquad 43)$$

Die Correctionen sind unter $\Delta\tau$ einzeln angegeben. τ ist die in die Schlussrechnung einzuführende Schwingungsdauer.

Tab. 7. Schwingungsdauer τ und log. Decrement Δ' bei offener Kette.

	Temp. t_0	Intens. n_0	Ampl.	Schwingungsdauer beob.	Schwingungsdauer kl. Schwing.	t n	$\Delta\tau$ für t u. n	τ	Δ'
1886	°	p	mm	sec	sec	°	sec	sec	
Feb. 3	13,80	92,33	128	8,2099	8,2098	14,00	+ 0,0001	8,2125	0,00184
	14,15	91,23	133	8,2136	8,2135	91p,49	+ 0,0007		0,00184
	13,97	91.78			8,2117				0,00184
Feb. 6	11°,51	91,60	157	8,2102	8,2101	11°,46	+ 0,0000	8,2104	0,00187
	11,39	91,93	176	8,2097	8,2096	91p,58	+ 0,0005		0,00192
	11,45	91,76			8,2099				0,00189
Feb. 10	13°,78	89,93	166	8,2160	8,2159	13°,95	+ 0,0001	8,2144	0,00195
	14,04	91,97	161	8,2130	8,2129	90p,98	— 0,0001		0,00197
	13,91	90,95			8,2144				0,00196

	Temp. t_0	Intens. n_0	Ampl.	Schwingungsdauer beob.	Schwingungsdauer kl. Schwing.	t n	$\Delta\tau$ für t u. n	τ	Λ'
1886									
Aug. 12	20°,33	96^p,88	551	13,6240	13,6222	20°,37	+ 0,0001	13,6218	0,00210
						97^p,00	— 0,0005		
Aug. 13	18°,75	99,29	522	13,6092	13,6076	18°,91	— 0,0000	13,6069	0,00211
	19,05	100,72	289	13,6043	13,6038	99^p,73	+ 0,0012		0,00208
	18,90	100,00			13,6057				0,00210
Aug. 14	19,58	98,92	291	13,6089	13,6084	19°,70	+ 0,0001	13,6083	0,00210
	19,79	100,38	289	13,6054	13,6049	99^p,29	+ 0,0016		0,00208
	19,68	99,65			13,6066				0,00209
1887									
Juli 16	22°,31	98^p,35	388	13,5755	13,5743	22°,55	±		0,00196
	22,80	100,15	394	13,5686	13,5674	99^p,32	— 0,0003	13,5714	0,00203
	22,55	99,25			13,5709		+ 0,0008*		0,00199
Juli 22	20,93	99,75	456	13,5653	13,5637	21°,03	+ 0,0000		0,00203
	21,11	100,80	352	13,5600	13,5590	100^p,24	+ 0,0001	13,5622	0,00203
	21,02	100,27			13,5614		+ 0,0007*		0,00203
Juli 30	23,21	98,62	654	13,5822	13,5788	23°,53	+ 0,0001	13,5790	0,00200
	23,80	98,77	698	13,5822	13,5783	98^p,61	+ 0,0003		0,00202
	23,50	98,69			13,5786				0,00201
1887									
Oct. 21	14,95	104,01	482	13,5505	13,5487	15°,17	+ 0,0002	13,5491	0,00192
	15,28	104,41	383	13,5494	13,5482	104^p,11	+ 0,0004		0,00204
	15,11	104,21			13,5484				0,00198
Oct. 27	13,42	102,77	437	13,5484	13,5469	13°,46	+ 0,0001	13,5452	0,00200
	13,42	102,45	417	13,5487	13,5473	103^p,08	— 0,0020		0,00200
	13,42	102,61			13,5471				0,00200

Die letzte Spalte enthält das in gewöhnlicher Weise während der Schwingungen gewonnene natürliche log. Decrement Λ' bei offener Kette. Die Zahlen stimmen durchweg so gut überein, dass ich die Angabe von Einzelheiten unterlassen darf.

---

* 1887 Juli 16 und 22 ist noch eine kleine Correction (+ 0,0008 bez. + 0,0007 sec) angebracht. Hier ist nämlich M/H zu anderer Zeit beobachtet und zugleich τ noch einmal bestimmt worden (§ 73). Die Correction reducirt den in Spalte 6 enthaltenen Wert auf das arithmetische Mittel beider auf t und n reducirter Schwingungsdauern. Die Correction ist zu unerheblich, um die Gründe zu diesem Verfahren zu entwickeln.

Controlen für M/H und τ.

75. Innerhalb jeder Gruppe blieb der Magnet*) und das Intensitätsvariometer ungeändert; in jeder Gruppe ist das letztere auf eine constate Temperatur reducirt. Eine gewisse Controle für die einzelnen Bestimmungen von M/H und τ ist also dadurch möglich, dass man die gefundenen Werte auf gleiche Temperatur und gleichen Erdmagnetismus reducirt und vergleicht. Das Resultat erscheint sehr günstig, denn die Abweichungen vom Mittelwert halten sich für M/H mit Ausnahme von 1886 Feb. 10, wo 1/3000 erreicht wird, innerhalb $\pm$ 1/5000 und für τ innerhalb $\pm$ 1/9000 des Ganzen.

Eine nicht unwichtige Frage betrifft ferner die Berechtigung der an M/H angebrachten Correctionen wegen der magnetischen Instrumentaleinflüsse. Eine Probe für dieselben kann man darin suchen, dass man die Ausschläge x (Tab. 5) der einzelnen Magnetometer, die ja paarweise unter ganz gleichen Bedingungen gebraucht worden sind, mit einander vergleicht. Mit Rücksicht auf Skalenabstand (§ 55b), Torsionsverhältnis (§ 47), Nadellänge (§ 46) und magnetischem Eigeneinfluss (§ 49) findet man, dass die Ueberschüsse Δx des Skalenausschlages betragen müssten

Magnetometer Nr.	I—II	II—III	IV—V
für x =	220	220	330 mm
berechnet Δx =	— 0,15	+ 0,34	+ 0,05 mm

während man aus den x der Tab. 5 im Mittel findet

beobachtet Δx =	— 0,11	+ 0,32	+ 0,03 mm.

Zwei zu anderer Zeit angestellte Vergleichungen ad hoc für Nr. II—III gaben für x = 290 mm

berechnet Δx =	+ 0,30	+ 0,28 mm
beobachtet	+ 0,22	+ 0,19 mm.

Das Vorzeichen von Rechnung und Beobachtung stimmt also stets überein; die Fehler bleiben unter 0,1 mm. Die berechneten Differenzen

*) Nur 1886 Feb. 8 wurde der Magnet neu aufgehängt.

sind durchschnittlich um 0,05 mm grösser, was einem Fehler von etwa 1/6000 in dem Unterschied der angenommenen Instrumentaleinflüsse entsprechen würde. Mit Rücksicht auf die Verwendung von fünf verschiedenen und recht ungleichen Magnetometern kann man als ziemlich sicher annehmen, dass kein merklicher von den magnetischen Einflüssen herrührender Fehler in dem Resultat steckt.

Doch wird man den Messungen 1887, weil sie mit Magnetometern angestellt worden sind, die überhaupt so gut wie keinen magnetischen Einfluss zeigten, einen Vorzug einräumen müssen.

Logarithmisches Decrement Λ bei geschlossener Kette.

76. Allgemeines. Um von der Vergleichung der Multiplikatorleitung mit dem Quecksilberwiderstand zu den Dämpfungsbeobachtungen überzugehen, ist nach Fig. 13 nur die Umlegung eines Quecksilberbügels notwendig, so dass also in beiden Fällen ganz die gleiche Leitung zur Beobachtung kam.

1886 Februar schwingt der Magnet allein mit dem Dämpfungsverhältnis etwa $k = e^{\Lambda} = 4{,}0$ und der Schwingungsdauer $\tau = 8{,}2$ sec. Später kam durch die Belastungsgewichte (§ 13) etwa $k = 2{,}2$ und $\tau = 13{,}6$ sec.

Die Schwingungen wurden in regelmässiger Aufeinanderfolge mit einem kleinen Magnetinduktor N (Fig. 3 und 4) hervorgebracht. Dessen Spule ist 4,5 cm lang, hat 270 Windungen (bei der ersten Gruppe 160) von 2 mm dickem Draht und der inducirende Magnet besteht in der von W. Weber angegebenen Weise aus zwei gleichen, mit gleichnamigen Polen gegeneinander gerichteten Magneten von 0,9 cm Dicke, 9 cm Länge und dem Magnetismus von je etwa 600 [cm, g]. Seine Fernwirkung auf den Multiplikator oder das Variometer war stets unmerklich. Die Anschläge sind so regulirt, dass in der Nachbarschaft der äussersten Stellungen die Induction verschwindet.

Ich will noch bemerken, dass vor dem Beginn eines Satzes von Dämpfungsbeobachtungen sorgfältig beachtet wurde, dass die Nadel keine

Pendel- oder Vibrations-Bewegungen besass, die sich durch die Dämpfungskraft in Drehbewegung umsetzen könnten.

Der Skalenabstand betrug 1886 $A = 2990$ mm; 1887 $A = 2580$ mm.

1886 Februar war die Schwingungsweite nach drei Umkehrpunkten, später nach fünf Umkehrpunkten auf etwa 20 mm gesunken. Der neue Inductionsstoss bewirkte dann mit dem vorhandenen Reste von Bewegung zusammen je nach dem Widerstande der Leitung eine erste Elongation von 310 bis 390 mm.

1886 Februar blieb die Inductorspule immer eingeschaltet. Von da an habe ich eine Aenderung eingeführt. Wenn der Stabmagnetismus nicht ganz constant wäre, so würde die Dämpfung dadurch beeinflusst werden. Es ist äusserst unwahrscheinlich, dass dies der Fall sei, denn die kleine temporäre Aenderung des Magnetismus durch den Inductionsstrom wird vor der ersten Umkehr der Multiplikatornadel vollständig vergangen sein. Aber um ganz sicher zu sein, habe ich später immer den Inductor, nachdem der Stoss gegeben war, ausgeschaltet.

Hierzu diente der Quecksilbernebenschluss S (Fig. 3 und 4) am Inductor. Die Contactvorrichtung war mit Watte bewickelt und befand sich ausserdem unter Glas, um wechselnde Thermoströme sicher zu vermeiden.

Die ersten Ausschläge schwankten nun freilich, je nach der etwas früheren oder späteren Herstellung des Nebenschlusses um einige mm, aber das ist sogar vorteilhaft, da constante Ablesefehler der Umkehrpunkte bei dieser Abwechslung nicht so leicht vorkommen.

Ein Satz bestand aus etwa 60 beobachteten Umkehrpunkten, zu denen also 12 bis 20 Inductionsstösse notwendig waren.

Die Ausschläge x werden zuerst von den Teilfehlern befreit, dann auf Bögen reducirt durch Addition von

$$\Delta x = -\tfrac{1}{3}\frac{x^3}{A^2} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{A^4}. \qquad 44)$$

Skalenkrümmung. 1887 wird hier eine kleine convexe Krümmung der Skale mit eliminirt (§ 26). Die drei äusseren Umkehrpunkte lagen nämlich um $\Delta A = 0{,}43$, 0,25 und 0,17 mm, d. h. im Verhältnis zum Skalenabstande $A = 2580$ mm um $\Delta A/A = 0{,}00017$, 0,00010 und

0,00007 weiter vom Spiegel ab als die gleich weiten beiden inneren Punkte. Die beobachteten Ausschläge, welche etwa 310, 140 und 70 mm betrugen, sind deswegen vermindert worden um 0,052, 0,014 und 0,005 mm.

Schwingungsbögen.

77. Um die unausbleibliche kleine Unsymmetrie zu eliminiren, müssen Dämpfungsbeobachtungen immer die positiven und die negativen Ausschläge gleichmässig benutzen. Dies ist überall geschehen.

1886 Februar. Auf jeder Seite der Skale liegen eine grösste, eine mittlere und eine kleine Elongation. Nennen wir die Umkehrpunkte a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2, so lassen sich drei Dämpfungsverhältnisse berechnen, nämlich

$$k_1 = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} \quad k_2 = \frac{b_1 - b_2}{c_1 - c_2} \text{ und } k_3 = \frac{a_1 - b_2}{c_1 - b_2} \text{ oder } = \frac{b_1 - a_2}{b_1 - c_2}. \qquad 45)$$

k_3 sei um der Symmetrie willen als Mittelwert aus den letzten beiden Quotienten berechnet.

k_1 bietet den Vorteil der grössten Bögen, k_3 den Vorteil, dass die zusammen gehörigen Umkehrpunkte nur um die einfache Schwingungsdauer auseinanderliegen, während zwischen a_1 und a_2 etc. je die dreifache Schwingungsdauer (zusammen 25 sec.) liegt, so dass Schwankungen des Erdmagnetismus also auf k_1 und k_2 stärker wirken können.

k_1 und k_3 sind bei der Mittelnahme gleich berücksichtigt worden; k_2 wird aus zwei Bögen berechnet, von denen der kleinere nur 40 bis 50 mm beträgt und hat deswegen nur das Gewicht $^1/_2$ erhalten.

Als Beispiel will ich den letzten Satz Feb. 10. mitteilen, in welchem eine Deklinationsschwankung merklich ist.

Die erste Halbreihe wird bei der Mittelnahme nicht berücksichtigt.

	a_2	b_1	c_2	a_1	b_2	c_1	
	(159,7	583,5	477,1)	843,0	412,0	520,2	
	154,0	584,9	476,9	843,3	2,0	520,1	
	4,0	4,7	6,8	3,1	2,0	19,9	
	3,8	4,4	6,4	2,9	1,7	9,7	
	3,7	4,2	6,2	2,4	1,3	9,5	
	3,5	4,1	6,1	2,3	1,2	9,3	
	3,7	4,0	6,1	2,4	1,3	9,7	
	3,7	4,2	6,5	3,0	2,1	0,3	
	4,3	5,2	7,3	3,9	3,0	1,0	
	5,0	5,7	7,7	3,8	2,9	0,8	
	4,3	5,0	7,0	3,4	2,6	0,8	
	4,9	5,7	7,6	3,8	2,8	0,8	
Mittel	154,08	584,74	476,79	843,11	412,08	520,18	
Teilfehler	±	+ 0,17	+ 0,08	+ 0,17	+ 0,05	+ 0,06	
Corrigirt	154,08	584,91	476,87	843,28	412,13	520,24	mm
Corr. auf Bogen	+ 1,53	− 0,02	±	− 1,49	+ 0,02	±	
Corrigirt	155,61	584,89	476,87	841,79	412,15	520,24	

Die drei Dämpfungsverhältnisse sind also

$$k_1 = \frac{841{,}79 - 155{,}61}{584{,}89 - 412{,}15} = \frac{686{,}18}{172{,}74} \qquad k_2 = \frac{584{,}89 - 412{,}15}{520{,}24 - 476{,}87} = \frac{172{,}74}{43{,}37}$$

$$k_3 = \frac{841{,}79 - 412{,}15}{520{,}24 - 412{,}15} = \frac{429{,}64}{108{,}09} \text{ und } \frac{584{,}89 - 155{,}61}{584{,}89 - 476{,}87} = \frac{429{,}28}{108{,}02}$$

$$\text{also im Mittel } k_3 = \frac{429{,}46}{108{,}05}.$$

1886 August und 1887. Nach jedem Stoss werden fünf Umkehrpunkte d. h. vier Schwingungsbögen beobachtet. Man bildet das Mittel aus je zwei nahegleichen ansteigenden und abfallenden Bögen. Die aufeinander folgenden werden dann durch einander dividirt und liefern so drei Dämpfungsverhältnisse. Denselben ist bei der Mittelnahme folgeweise das Gewicht 3, 2, 1 beigelegt worden.

Constanz des Dämpfungsverhältnisses. Bei der Reduction der ersten Reihen wurde ich stutzig darüber, dass, auch nach der Correction des § 78, das Dämpfungsverhältnis aus den kleinen Bögen fast regelmässig etwas grösser ausfiel als aus den andern. Ich habe nach Fehlerquellen gesucht, die in der Constante g oder in den Schering'schen

Formeln liegen könnten. Aber ich kam zu der Ansicht, dass die Ursache in der Neigung des Beobachters liegt, den Umkehrpunkt der Nadel zu niedrig zu schätzen. Besonders bei den rascheren Schwingungen von Gruppe 1 mag das der Fall sein. Es genügen, um die Abweichungen zu erklären, constante Ablesungsfehler von 0,1 mm.

Man könnte hiernach versucht sein, die kleinen Schwingungen besonders in der ersten Gruppe gar nicht zu benutzen. Die beiden Hauptresultate meiner Arbeit würden einander dadurch näher gerückt werden und das ganze Resultat würde für den Wert des Ohm etwa 0,2 mm Quecksilber weniger ergeben. Indessen würde ich die Massregel doch nicht für hinreichend gerechtfertigt halten.

In den späteren Beobachtungen ist diese regelmässige Abweichung grösstenteils verschwunden.

Reduction des logarithmischen Dekrements auf kleine Schwingungsweite nach K. Schering*).

78. Schwingt der Magnet nach der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m\left(1 - m'\varphi^2\right)\frac{d\varphi}{dt} + n\left(1 - n'\varphi^2\right)\varphi = 0 \qquad 46)$$

und ist Λ das aus zwei aufeinanderfolgenden Elongationen α_1 und α_2 als $\Lambda = \log \alpha_1/\alpha_2$ abgeleitete Dekrement, so findet man den Grenzwert Λ_0 für kleine Schwingungsweite in der Schering'schen Bezeichnung aus

$$\Lambda_0 = \Lambda + \Lambda_0 S_2 \alpha_1^2. \qquad 47)$$

S_2 hat den Wert

$$S_2 = \frac{1 - e^{-2\Lambda_0}}{\Lambda_0} \cdot \frac{\frac{1}{8} m'\left(1 + 7\frac{\Lambda_0^2}{\pi^2}\right) - \frac{11}{32} n'\left(1 + \frac{23}{11}\frac{\Lambda_0^2}{\pi^2}\right)}{1 + \frac{1}{4}\frac{\Lambda_0^2}{\pi^2}} \qquad 48)$$

Zum Einsetzen von Λ_0 in S_2 und in die Correction $\Lambda_0 S_2 \alpha^2$ genügt ein den Beobachtungen mit kleinerer Schwingungsweite entnommener vorläufiger Wert. In dem Werte von S_2 ist Λ_0 das natürliche log. Dekre-

*) K. Schering, Wied. Ann. Bd. 9. S. 471. 1880.

ment. Formel 47 gilt selbstverständlich auch für die briggischen Logarithmen, mit denen man zuerst rechnet.

Da der Coefficient von $d\varphi/dt$ dem Quadrate der Multiplikatorfunction proportional ist, und da $G_\varphi^2 = G^2(1 - 2\,\mathfrak{g}\,\varphi^2)$ ist, so hat man $m' = 2\,\mathfrak{g}$, d. h. für Multiplikator Nr. I $m' = 2{,}720$, für Nr. II (1887) $m' = 2{,}756$. Vgl. § 66 a und b. Ferner ergibt sich aus der Beziehung $(1 - n'\,\varphi^2)\,\varphi = \sin\varphi$ noch $n' = 1/6$.

Die zwei oberen Dekremente 1886 Februar (Tab. 8 a) werden, wie die Formel 48 voraussetzt, aus zwei aufeinanderfolgenden Elongationen abgeleitet. Die übrigen Dekremente aber sind alle aus zwei ganzen Bögen β_1 und β_2 als $\Lambda = \log \beta_1/\beta_2$ gewonnen worden. Man findet leicht für diesen Fall, wenn $\varkappa = e^\Lambda = 10^\lambda$ das Dämpfungsverhältnis bedeutet,

$$\Lambda_0 = \Lambda + \Lambda_0 S_2 \frac{\varkappa^3 + 1}{(\varkappa+1)^3}\beta_1^2. \qquad 49)$$

Für die in Betracht kommenden Werte sollen die Correctionsfactoren tabellarisch zusammengestellt werden.

1886 Februar.

$\lambda =$	0,598	0,600	0,602	0,604	0,606	0,608	0,610
$\lambda S_2 =$	0,278	0,280	0,281	0,282	0,283	0,284	0,286
$\lambda S_2 \frac{\varkappa^3+1}{(\varkappa+1)^3} =$	0,144	0,145	0,146	0,147	0,148	0,149	0,150

	1886 August			1887		
$\lambda =$	0,330	0,335	0,340	0,330	0,335	0,340
$\lambda S_2 \frac{\varkappa^3+1}{(\varkappa+1)^3} =$	0,0483	0,0495	0,0507	0,0492	0,0503	0,0515

Die Elongationen α_1 und die Bögen β_1 werden, wenn A den Skalenabstand vorstellt, für diese Correctionen aus Tab. 8 a bis c als $\alpha_1 = 2\,x_1/4A$ und $\beta_1 = (x_1 + x_2)/2A$ erhalten.

Zahlenresultate für die logarithmischen Dekremente Λ.

79. Tab. 8 a bis c gibt in der ersten Spalte die Temperatur des Multiplikators, welche auch für den Magnet gilt (§ 12), ferner den mittleren Stand des Intensitätsvariometers (§ 52) auf dieselbe Temperatur

reducirt wie bei M/H und τ.[1]) In den meisten Fällen ist auch die mittlere Beobachtungszeit angegeben.

Es folgen dann die Umkehrpunkte der Nadel an der Skale als Mittelwerte aus jedem Beobachtungssatz in richtigen mm. Tab. 8 a enthält die beobachteten sechs Umkehrpunkte in einer Spalte. Daneben stehen die auf Bögen reducirten Zahlen (Formel 44). Dann sind die Bögen in mm angegeben und zwar zuerst $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$, $c_1 - c_2$ und dann die beiden Bögen $a_1 - b_2$ bez. $b_1 - a_2$ und $c_1 - b_2$ bez. $b_1 - c_2$ schon als Mittelwerte der beiden nahe gleichen Differenzen. Vgl. auch das Beispiel in § 77.

In Tab. 8 b und c sind die zehn beobachteten Umkehrpunkte in zwei Spalten symmetrisch angeordnet. Dann folgen gleich die auf kreisförmige Skalen corrigirten Bögen. Die kleine Correction wegen Skalenkrümmung (§ 76) ist hier schon mit angebracht. Es werde noch bemerkt, dass diese Bögen schon die Mittelwerte der beiderseitigen symmetrisch gelegenen Schwingungen darstellen.

Die briggischen log. Dekremente λ sind zunächst einfach die Differenzen der Logarithmen der Bögen, neben welchen λ steht. Unter „λ corrigirt“ sind die auf kleine Schwingungen nach § 78 reducirten Dekremente zu verstehen. Unter dem Strich findet sich jedesmal das aus den λ unter Berücksichtigung des verschiedenen Gewichtes (§ 77) genommene Mittel.

Die durch Multiplikation dieser Mittelwerte mit dem Modul 2.3026 erhaltenen natürlichen log. Dekremente Δ stehen in der vorletzten Spalte. Zu dem unten gegebenen Mittelwerte von Δ ist der zugehörige Mittelwert der Temperatur und des Intensitätsvariometers aus der ersten Spalte gesetzt.

Ueber den Quecksilberwiderstand w vgl. § 80.

---

1) Nämlich 1886 Feb. $+13^0,0$, 1886 Aug. $+20^0,0$, 1887 Juli $+23^0,0$, 1887 Oct. $+14^0,0$.

Tab. 8a. Log. Dekrement Λ bei geschlossenem Multiplikator und Widerstand der Kette w in m/mm² Quecksilber 0°.

Scalenabstand $A = 2990$ mm.

Zeit Temperatur Intens.-Var.	Umkehrpunkte beob.	 corrig. Bogen	Bogen	Brigg. log. Decr. λ beob.	 corr. auf kl. Bogen	Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber-Widerstand w
1886							
Feb. 3	mm	mm	mm				
$10^h\ 3^m$	141,86	143,55	719,72				
13°,85	594,10	594,07	181,59	0,59808	0,59909		
92P,04	480,37	480,37	45,68	0,59935	0,59941		
						1,3797	$10^h\ 40^m$
	865,06	863,27	450,65				14°,00
	412,46	412,48	113,63	0,59833	0,59915		1,4118 Si.
	526,05	526,05			0,59918		
							$11^h\ 0^m$
$11^h\ 12^m$	144,13	145,79	708,64				14°,15
14°,15	589,25	589,23	178,94	0,59771	0,59869		1,4122 Si.
90P,95	477,34	477,34	44,98	0,59973	0,59980		
						1,3793	
	856,10	854,44	443,79				
	410,26	410,28	111,96	0,59812	0,59894		
	522,32	522,32			0,59901		
						1,3795	1,4120 Si.
						14°,00 91P,49	14°,07
Feb. 6							
I $12^h\ 40^m$	147,37	148,99	694,71				
11°,51	582,00	581,98	171,64	0,60719	0,60815		
91P,43	475,05	475,06	42,19	0,60938	0,60944		
						1,4011	
	845,21	843,70	433,17				
	410,31	410,34	106,91	0,60762	0,60841		$12^h\ 52^m$
	517,25	517,25			0,60851		11°,52
							1,3969 Si.
$1^h\ 20^m$	146,45	148,08	694,78				
11°,49	581,14	581,12	171,57	0,60742	0,60838		
91P,65	474,24	474,24	42,18	0,60932	0,60938		
						1,4015	
	844,37	842,86	433,17				
	409,52	409,55	106,87	0,60779	0,60858		$1^h\ 32^m$
	516,42	516,42			0,60866		11°,47
							1,3964 Si.

Zeit Temp. Intens.	Umkehrpunkte beob.	 corrig. Bogen	Bogen	Brigg. log. Decr. λ beob.	 corr. auf kl. Bogen	Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber-Widerstand w
	mm	mm	mm				
$1^h\ 43^m$	146,10	147,73	695,07				
				0,60742	0,60839		
$11^0,46$	580,93	580,91	171,63				
				0,61001	0,61007		
$91^p,50$	474,05	474,05	42,13				
						1,4019	
	844,31	842,80	433,35				
				0,60794	0,60872		$2^h\ 0^m$
	409,25	409,28	106,88				
					0,60885		$11^0,42$
	516,18	516,18					1,3960 Si.
$2^h\ 15^m$	147,16	148,78	694,75				
				0,60762	0,60858		
$11^0,40$	581,82	581,79	171,48				
				0,61019	0,61025		
$91^p,73$	475,00	475,00	42,08				
						1,4024	
	845,05	843,53	433,11				
				0,60812	0,60890		
	410,29	410,32	106,78				
					0,60904		
	517,07	517,08				1,4017	1,3964 Si.
						$11^0,46\ 91^p,58$	$11^0,47$
Feb. 10							
$11^h\ 26^m$	158,17	159,65	686,55				
				0,59964	0,60056		
$13^0,82$	589,16	589,13	172,59				
				0,60115	0,60121		
$90^p,10$	481,22	481,22	43,24				
						1,3833	
	347,74	846,19	429,57				
				0,59994	0,60070		
	416,52	416,54	107,92				
					0,60075		$11^h\ 45^m$
	524,46	524,46					$13^0,85$
							1,4104 Si.
$12^h\ 0^m$	155,87	157,37	686,30				
				0,59933	0,60025		
$14^0,00$	586,68	586,66	172,66				
				0,59993	0,59999		
$91^p,28$	478,63	478,63	43,38				
						1,3820	
	845,19	843,68	429,48				
				0,59945	0,60020		$12^h\ 10^m$
	413,98	414,00	108,02				
					0,60018		$14^0,00$
	522,01	522,01					1,4109 Si.
$12^h\ 26^m$	154,08	155,61	686,18				
				0,59905	0,59997		
$14^0,02$	584,92	584,89	172,74				
				0,60021	0,60027		
$91^p,56$	476,87	476,87	43,37				
						1,3817	
	843,28	841,79	429,46				
				0,59928	0,60003		
	412,13	412,15	108,05				
					0,60005		
	520,24	520,24				1,3823	1,4106 Si.
						$13^0,95\ 90^p,98$	$13^0,93$

Tab. 8b.

Skalenabstand $A = 2990$ mm.

Zeit Temp. Intens.	Umkehrpunkte beobachtet		Bogen	Brigg. log. Decrem. λ		Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber-Widerstand w
				beob.	corr. auf kl. Bogen		
1886	mm	mm	mm				
Aug. 12	112,25	898,08	570,59				
20°,35	685,31	325,05	262,61	0,33700	0,33746		
96P,68	422,41	587,87	120,73	0,33749	0,33759	0,77735	
	543,23	467,17	55,44	0.33801	0,33803		
	487,78	522,60			0,33760		20°,36
							1,4166 Si.
	898,92	114,50	569,60				
20°,39	327,10	686,77	262,25	0,33685	0,33730		
97P,33	589,39	424,07	120,62	0,33729	0,33738	0,77703	
	468,79	544,76	55,38	0,33804	0,33806		(20°,40)
	524,22	489,42			0,33746		(1,4167 Si.)
						0,77719	1,4166 Si.
						20°,37 97P,00	20°,36
Aug. 13							
3h 14m	109,93	897,52	570,80				
18°,82	683,26	324,33	261,37	0,33923	0,33969		
99P,64	421,57	585,84	119,45	0,34005	0,34015	0,78281	
	541,21	466,53	54,55	0,34041	0,34043		
	486,54	520,96			0,33997		18°,86
							1,4083 Si.
3h 47m	114,20	899,89	569,62				
18°,91	685,57	328,12	260,85	0,33919	0,33965		
99P,49	425,22	588,95	119,37	0,33950	0,33960	0,78207	
	544,64	469,59	54,59	0,33974	0,33976		
	490,03	524,17			0,33965		18°,96
							1,4087 Si.
4h 16m	115,10	901,31	569,97				
19°,00	687,57	328,91	261,11	0,33903	0,33949		
100P,05	426,10	590,14	119.55	0,33927	0,33937	0,78170	
	545,68	470,58	54,68	0,33968	0,33970		(19°,01)
	490,98	525,25			0,33949		(1,4092 Si.)
						0,78219	1,4085 Si.
						18°,91 99P,73	18°,91

Zeit Temp. Intens.	Umkehrpunkte beobachtet		Bogen	Brigg. log. Decrem. λ beob.	 corr. auf kl. Bogen	Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber-Widerstand w
Aug. 14	mm	mm	mm				
$3^h\ 15^m$	113,63	896,82	568,25				
$19^0,62$	684,31	326,12	260,94	0,33799	0,33845		
$99^p,03$	423,00	587,17	119,76	0,33824	0,33834	0,77934	
	542,85	467,46	54,90	0,33874	0,33876		$3^h\ 30^m$
	487,90	522,31			0,33846		$19^0,64$
							1,4126 Si.
$3^h\ 50^m$	115,75	899,00	568,22				
$19^0,71$	686,41	328,35	261,02	0,33785	0,33830		
$99^p,05$	425,04	589,49	119,78	0,33827	0,33837	0,77910	
	544,85	496,69	54,94	0,33851	0,33853		$4^h\ 3^m$
	489,99	524,71			0,33836		$19^0,75$
							1,4130 Si
$4^h\ 20^m$	117,86	901,69	568,85				
$19^0,78$	689,16	330,41	261,47	0,33757	0,33802		
$99^p,80$	427,30	591,97	120,04	0,33809	0,33818	0,77858	
	547,39	471,93	55,08	0,33835	0,33837		
	492,29	526,99			0,33813		
						0,77901	1,4128 Si.
						$19^0,70\ 99^p,29$	$19^0,69$

Tab. 8c.

Skalenabstand $A = 2580$ mm.

Zeit Temp. Intens.	Umkehrpunkte beobachtet		Bogen	Brigg. log. Decrem. λ beob.	 corr. auf kl. Bogen	Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber-Widerstand w
1887	mm	mm	mm				$10^h\ 10^m$
Juli 16	205,36	824,24	450,93				$22^0,37$
$10^h\ 28^m$	657,41	371,19	209,22	0,33350	0,33389		1,4163 Si.
$22^0,44$	448,17	580,71	97,01	0,33381	0,33389	0,76874	
$98^p,94$	545,07	483,57	44,98	0,33373	0,33375		$10^h\ 43^m$
	500,10	528,57			0,33386		$22^0,51$
							1,4172 Si.

Zeit Temp. Intens.	Umkehrpunkte beobachtet		Bogen	Brigg. log. Decr. λ		Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber- Widerstand w
				beob.	corr. auf kl. Bogen		
	mm	mm	mm				
$10^h\ 59^m$	204,07	824,53					
$22^0,55$	657,38	370,40	452,09	0,33324	0,33362		
$99^p,30$	447,44	580,55	209,89	0,33375	0,33363	0,76823	
	544,67	483,10	97,33	0,33367	0,33369		$11^h\ 11^m$
	499,55	528,26	45,14		0,33364		$22^0,58$
							1,4178 Si.
$11^h\ 21^m$	204,98	824,06					
$22^0,66$	657,60	371,15	451,14	0,33296	0,33334		
$99^p,72$	447,89	580,93	209,58	0,33317	0,33325	0,76757	$11^h\ 37^m$
	545,14	483,52	97,32	0,33357	0,33359		$22^0,76$
	499,98	528,65	45,15		0,33335		1,4184 Si.
						0,76818	1,4174 Si.
						$22^0,55\ 99^p,32$	$22^0,55$
Juli 22							$4^h\ 15^m$
$4^h\ 28^m$	207,91	826,97					$20^0,96$
$21^0,00$	659,33	374,63	450,26	0,33595	0,33634		1,4081 Si.
$99^p,97$	451,61	582,70	207,74	0,33625	0,33633	0,77441	
	547,27	486,78	95,78	0,33622	0,33624		$4^h\ 50^m$
	503,15	530,98	44,16		0,33632		$21^0,04$
							1,4087 Si.
$5^h\ 4^m$	209,10	827,85					
$21^0,07$	660,40	375,77	450,07	0,33574	0,33612		
$100^p,50$	452,64	583,84	207,75	0,33610	0,33618	0,77401	$5^h\ 20^m$
	548,36	487,89	95,82	0,33616	0,33618		$21^0,09$
	504,18	532,08	44,19		0,33615		1,4091 Si.
						0,77421	1,4086 Si.
						$21^0,03\ 100^p,24$	$21^0,03$
Juli 30							$10^h\ 9^m$
$10^h\ 23^m$	212,10	831,30					$23^0,26$
$23^0,38$	662,50	379,77	449,35	0,33872	0,33911		1,3951 Si.
$98^p,46$	456,52	586,10	206,00	0,33902	0,33910	0,78088	
	550,72	491,53	94,37	0,33926	0,33928		$10^h\ 35^m$
	507,54	534,77	43,21		0,33913		$23^0,45$
							1,3959 Si.
$10^h\ 48^m$	209,83	828,26					
$23^0,53$	659,78	377,26	448,87	0,33844	0,33883		
$98^p,60$	483,83	583,44	205,91	0,33887	0,33895	0,78035	$11^h\ 0^m$
	548,07	488,93	94,36	0,33900	0,33902		$23^0,58$
	504,85	532,16	43,23		0,33890		1,3965 Si.

Zeit Temp. Intens.	Umkehrpunkte beobachtet		Bogen	Brigg. log. Decr. λ		Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber- Widerstand w
				beob.	corr. auf kl. Bogen		
	mm	mm	mm				
$11^h\ 16^m$	208,34	826,08					
			448,44				
$23^0,67$	657,89	375,55		0,33828	0,33867		
			205,79				
98P,76	452,09	581,64		0,33863	0,33871	0,77986	$11^h\ 28^m$
			94,36				
	546,33	487,12		0,33871	0,33873		$23^0,75$
			43,26				
	503,08	530,39			0,33869		1,3972 Si.
						0,78036	1,3962 Si.
						$23^0,53$ 98P,61	$23^0,51$
1887							
Oct. 21							$10^h\ 42^m$
$10^h\ 59^m$	203,29	820,56					$15^0,04$
			447,57				
$15^0,09$	652,00	370,93		0,34006	0,34045		1,3965 Si.
			204,55				
104P,04	447,51	575,84		0,34032	0,34040	0,78390	
			93,43				
	540,78	482,22		0,34047	0,34049		$11^h\ 14^m$
			42,66				
	498,13	524,90			0,34044		$15^0,14$
							1,3971 Si.
$11^h\ 28^m$	204,99	821,27					
			446,88				
$15^0,18$	653,50	372,83		0,33984	0,34023		
			204,34				
104P,09	449,00	577,32		0,34004	0,34012	0,78336	
			93,39				
	542,36	483,87		0,34031	0,34033		$11^h\ 41^m$
			42,66				
	499,71	526,53			0,34021		$15^0,22$
							1,3974 Si.
$11^h\ 52^m$	203,90	820,89					
			447,43				
$15^0,24$	652,30	371,25		0,33980	0,34019		
			204,61				
104P,19	447.88	576,34		0,33996	0,34004	0,78332	$12^h\ 7^m$
			93,53				
	541,25	482,62		0,34046	0,34047		$15^0,28$
			42,71				
	498,60	525,40			0,34019		1,3977 Si.
						0,78353	1,3972 Si.
						$15^0,17$ 104P,11	$15^0,17$
Oct. 27							$1^h\ 35^m$
$1^h\ 46^m$	205,31	821,94					$13^0,45$
			447,09				
$13^0,46$	654,08	373,34		0,34028	0,34067		1,3970 Si.
			204,23				
102P,89	449,70	577,72		0,34039	0,34047	0,78424	
			93,27				
	542,95	484,41		0,34058	0,34060		$1^h\ 57^m$
			42,57				
	500,38	526,99			0,34059		$13^0,46$
							1,3971 Si.
$2^h\ 8^m$	205,77	823,36					
			447,62				
$13^0,46$	654,27	373,43		0,34075	0,34114		
			204,25				
103P,16	450,24	578,20		0,34112	0,34120	0,78583	$2^h\ 20^m$
			93,12				
	543,25	484,95		0,34186	0,34188		$13^0,46$
			42,38				
	500,92	527,38			0,34128		1,3973 Si.

Zeit Temp. Intens.	Umkehrpunkte beobachtet		Bogen	Brigg. log. Decr. λ		Nat. log. Decrem. Λ	Quecksilber- Widerstand w
				beob.	corr. auf kl. Bogen		
	mm	mm	mm				
$2^h\ 31^m$	206,12	823 31					
$13^0{,}45$	654.92	341,19	447,36				
$103^p{,}19$	450,80	578,62	204,13	0,34076	0,34115		
	543,79	485,41	93,09	0,34101	0,34109	0,78541	$2^h\ 44^m$
	501,38	527,91	42,45	0,34098	0,34100		$13^0{,}44$
					0,34110		1,3969 Si.
						0.78516	1,3971 Si.
						$13^0{,}46\ 103^p{,}08$	$13^0{,}45$

Quecksilberwiderstand des Multiplikators.

80. In geeigneter alternirender Weise gegen die absoluten Widerstandsbestimmungen (Dämpfungsbeobachtungen) wurde der Multiplikator mit dem Quecksilberrohre oder den Neusilbernormalen verglichen (§ 35. 37). Dies geschieht durch blosses Umlegen eines Quecksilberbügels, in der durch Fig. 13 angegebenen Verbindung mit dem Differentialgalvanometer im übergreifenden Nebenschluss (§ 36). Der Strom von einer Säule E, gewöhnlich einem kleinen Daniell, geht durch das Quecksilberrohr Hg bez. den an derselben Stelle zu denkenden Neusilberwiderstand und die Multiplikatorleitung Mu hintereinander.[1]) Von den Eintritts- und Austrittsstellen sind Abzweigungen nach dem Differentialgalvanometer D_1 D_2 geführt. Aus dem Rheostaten Rh, der zu der Multiplikatorleitung im Nebenschluss sitzt, wird so viel Widerstand R eingeschaltet, dass das Differentialgalvanometer bei dem Stromschluss ruhig bleibt. (Vgl. auch § 36.) Man wechselt nun zur Eliminirung der Uebergangswiderstände die Verbindungen in dem sechsnäpfigen Commutator C so aus, dass die vorher nicht verbundenen Näpfe jetzt mit einander verbunden werden, sucht wieder das zugehörige, dem früheren nahe gleiche, R, nimmt das Mittel aus beiden und berechnet den Multiplikatorwiderstand w in Queck-

1) Der Induktor N ist in der Figur ausgeschaltet. 1886 Feb. ist er natürlich, wie damals bei den Dämpfungsbeobachtungen, eingeschaltet geblieben.

silbereinheiten aus dem in solchen ausgedrückten Widerstande γ von Hg mit der Beziehung

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\gamma}.$$

Es ist ganz unnötig hier Einzelheiten mitzuteilen; der Wert w ist in der letzten Spalte von Tab. 8a bis c gleich fertig gegeben. Hinzugefügt ist die gleichzeitig abgelesene Temperatur im Multiplikator und in den meisten Fällen auch die Beobachtungszeit.

Mittelwerte von A und w.

81. Man könnte aus den Beobachtungen eines jeden Tages durch Zusammenstellung zusammengehöriger Werte von A und w mehrere Quecksilber-Werte des Ohm berechnen. Indessen wird dies umständlich, weil die M/H und τ dann auch immer auf die Temperatur und die erdmagnetische Intensität bei dem betr. einzelnen A reducirt werden müssen.

Ich habe mir diese Mühe gespart. Man sieht fast ausnahmslos, wie die Temperaturänderung des Multiplikatorwiderstands sich in den einzelnen A und w im richtigen Sinne äussert. Wird A kleiner, so wächst w und umgekehrt.

Es sind also gleich die Hauptmittel von A und w gebildet, die sich am Schluss jeder Tagestabelle befinden. Darunter steht die zugehörige Mitteltemperatur des Multiplikators. Mit Ausnahme des ersten Satzes 1886 Feb. 3, wo die zeitliche Symmetrie der Beobachtungen nicht innegehalten worden war, stimmen diese Temperaturen für A und für w immer bis auf höchstens $0^0,02$ überein. Diese kleinen Differenzen sind dann schliesslich in Rechnung gesetzt, indem die Quecksilberwiderstände w des Multiplikators unter Zugrundelegung des Temperaturcoefficienten 0,004 für den Kupferdraht auf die für A geltende Temperatur corrigirt worden sind. Nur für 1886 Feb. 3 übersteigt diese Correction $^1/_{10000}$.

Die Schlusszusammenstellung Tab. 9 enthält diese corrigirten Werte.

Schlussrechnung für den absoluten Widerstand.

82. Es ist nur noch notwendig, die im § 4 gegebene übersichtliche Formel 1 durch Einführung 1) der Luftdämpfung, 2) der Fadentorsion und 3) der Selbstinductionsconstante Π des Multiplikators zu vervollständigen. Die Formel für letztere Correction ist von Dorn entwickelt worden.[1])

Die Zeichen stellen wieder vor

G die Empfindlichkeitsconstante des Multiplikators,

τ die Schwingungsdauer der Magnetnadel bei offener Kette für kleine Schwingungen,

M/H das Verhältnis ihres Stabmagnetismus zum horizontalen Erdmagnetismus im Multiplikator, corrigirt nach § 71 und 73 a,

Θ ihr Torsionsverhältnis,

Λ ihr natürliches log. Dekrement bei geschlossener Kette bei kleiner Schwingungsweite,

Λ' dasselbe bei offener Kette.

Dann ist nach Dorn in dem Ausdrucke 1, § 4 für den absoluten Widerstand anstatt Λ im Nenner wegen der Selbstinduction einzusetzen

$$\Lambda - \frac{\Pi}{W}\frac{\pi}{\tau}\frac{\Lambda^2}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}.$$

Nehmen wir die Torsion und die kleine Luftdämpfung hinzu, so wird also der absolute Widerstand der Kette W berechnet aus

$$W = \frac{\pi^2}{2} G^2 \frac{1}{\tau}\frac{M}{H}\frac{1}{1+\Theta}\,\frac{1}{\dfrac{\Lambda}{\sqrt{\left(1+\dfrac{\Lambda^2}{\pi^2}\right)}} - \dfrac{\Pi}{W}\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\Lambda^2}{1+\dfrac{\Lambda^2}{\pi^2}} - \Lambda'} \qquad 50)$$

Die ganze von der Selbstinduction herrührende Correction beläuft sich 1886 Feb. auf etwa 2/1000, in den anderen Gruppen auf etwa 1/1000. Für das W im Correctionsgliede des Nenners genügt also ein Näherungswert, den man aus der Quecksilbervergleichung herleiten kann.

---

1) Dorn, Wied. Ann. Bd. 17. S. 783 1882 und ib. Bd. 22, S. 265. 1884.

Der Selbstinductionscoefficient beträgt (§ 41)

1886 Februar $\Pi = 17800000$ [cm]

Später (ohne Inductor) $\Pi = 16800000$ „

Resultate.

83. Tab. 9 stellt die zur Rechnung gehörigen Werte G § 70b, τ § 74 Tab. 7, M/H § 73a Tab. 6, Θ § 47, Λ § 81 Tab. 8, Λ' § 74 Tab. 7 zusammen und darunter den nach Formel 50 in [cm/sec] berechneten absoluten Widerstand W der Kette, mit 10^5 dividirt. Der Quecksilberwiderstand w derselben Kette ist gegen § 81 Tab. 8, wo derselbe in Siemens-Einheiten ausgedrückt war, hier 10000 mal grösser d. h. also in cm/cm^2 Quecksilber 0^0 gegeben.

$\frac{W}{w}$ stellt also den absoluten Widerstand eines cbcm = Würfels Quecksilber von 0^0 dar.

Unten steht das zur Uebersicht bequemste jedesmal gefundene Verhältnis für Ohm/Siemens, mit anderen Worten die in Meter ausgedrückte Länge einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt, welche bei 0^0 den Widerstand 1 Ohm hat.

Tab. 9a. Schlussrechnung.

1886	Feb. 3	Feb. 6	Feb. 10	Aug. 12	Aug. 13	Aug. 14	
G =	274,472	274,472	274,58	274,207	274,207	274,207	[cm^{-1}]
τ =	8,2125	8,2104	8,2144	13,6218	13,6069	13,6083	sec
M/H =	36944	36985	36939	36860	36825	36814	[cm3]
Θ =	0,00097	0,00097	0,00097	0,00320	0,00320	0,00320	
Λ =	1,3795	1,4017	1,3823	0,77719	0,78219	0,77901	
Λ' =	0,00184	0,00189	0,00196	0,00210	0,00210	0,00209	
$10^{-5}.W$ =	13274	13117	13259	13312	13234	13279	$\left[\frac{cm}{sec}\right]$
w =	14116	13964	14107	14166	14085	14128	$\frac{cm}{cm^2}$ Hg 0^0

Also beträgt der absolute Widerstand eines Cubikcentimeters Quecksilbers bei 0^0 in [cm/sec]:

W/w =	94040	93930	93990	93970	93960	93990
$\frac{\text{Ohm}}{\text{Siemens}}$ =	1,0634	1,0646	1,0640	1,0641	1,0643	1,0639

Tab. 9b.

1887	Juli 16	Juli 22	Juli 30	Oct. 21	Oct. 27	
G =	273,148	273,153	273,153	273,153	273,153	[cm^{-1}]
τ =	13,5714	13,5622	13,5790	13,5491	13,5452	sec
M/H =	36692	36690	36682	36781	36838	[cm^3]
Θ =	0,00325	0,00325	0,00325	0,00325	0,00325	
A =	0,76818	0,77421	0,78036	0,78353	0,78516	
A' =	0,00199	0,00203	0,00201	0,00198	0,00200	
$10^{-5} \cdot W$ =	13342	13253	13135	13149	13147	$\left[\frac{cm}{sec}\right]$
w =	14174	14086	13963	13972	13971	$\frac{cm}{cm^2}$ Hg 0^0

Demnach ist:

W/w =	94130	94080	94070	94110	94100
$\frac{\text{Ohm}}{\text{Siemens}}$ =	1,0624	1,0629	1,0631	1,0626	1,0627

84. Die beiden Hauptmittel sind

1886 1 Ohm = 1,06405 Siemens oder $\frac{m}{mm^2}$ Quecksilber 0^0

1887 1 „ = 1,06274 „ „ „ „ „

Der Unterschied von 0,0013 zwischen beiden Zahlen beruht teilweise natürlich auf den bei den einzelnen Bestimmungen begangenen Beobachtungsfehlern, aber wohl nur zum kleineren Teile. Denn der mittlere Fehler des einzelnen Resultats beträgt 1886 $\pm$ 0,0004 und 1887 $\pm$ 0,0003. Die Abweichung scheint also zum grösseren Teile in den Grössen zu stecken, welche, wie Multiplikatorconstante, Polabstand, auch magnetische Lokaleinflüsse und Gewohnheitsfehler bei den Dämpfungs-

beobachtungen in jede Gruppe besonders eintreten. Wenn man berücksichtigt, wie viele Beobachtungsdata hier zusammenwirken, von denen jedes mehrere Hunderttausendtel, einzelne aber auch Zehntausendtel Fehler bewirken können (vgl. § 9), so erscheinen die Abweichungen durchaus erklärlich.

Gerade bezüglich der constanten Einflüsse kommt den Ergebnissen des zweiten Jahres nun die grössere Glaubwürdigkeit zu.

Denn erstens sind die Hilfsmittel zur Bestimmung der Galvanometerconstante, dem schwierigsten Teile der Arbeit, hier vollkommener und das Resultat setzt sich aus einer kleineren Anzahl von Einzelmessungen zusammen.

Zweitens geht der Polabstand mit einem etwa dreimal kleineren Einfluss, als 1886, in den absoluten Widerstand ein. Weiter haben die 1887 gebrauchten Magnetometer einen fast verschwindenden magnetischen Eigeneinfluss. Auch der Umstand ist zu beachten, dass die aus verschiedenen Schwingungsweiten erhaltenen log. Dekremente 1887 besser übereinstimmen als 1886.

Schlussresultat.

85. Ich gebe mit Rücksicht auf diese Vorzüge dem zweiten Hauptmittel das doppelte Gewicht und erhalte

1 Ohm = 1,0632 Siemens oder $\frac{m}{mm^2}$ Quecksilber 0°.

1 Siemens = 0,9406 Ohm.

Professor Glazebrook hatte die Güte, unsere Neusilbernormale Nr. I mit der British-Association-Einheit in Cambridge zu vergleichen. Er findet hierbei

$$1\ \text{B. A. E.} = 1{,}0489\ \text{Siemens},$$

so dass nach unserer Messung sich ergibt

$$1\ \text{B. A. E.} = 0{,}9866\ \text{Ohm}.$$

Drücken wir unser Resultat schliesslich in der Form aus, dass wir den absoluten specifischen Widerstand der Volumeinheit Quecksilber angeben, so ist

$$1\ \frac{cm}{cm^2}\ \text{Quecksilber}\ 0^0 = 94060\ \left[\frac{cm}{sec}\right].$$

Die internationale Commission, welche den Wert für das „legale Ohm“ festgesetzt hat, war leider nicht in der Lage, die Ergebnisse der neueren, damals schon in Aussicht gestellten Untersuchungen über den Gegenstand abwarten zu dürfen, ehe sie ihren Beschluss fasste. Man einigte sich deswegen vorläufig auf die runde Zahl 1,06 m/mm^2 Quecksilber, welche zugleich dem Mittel der damals vorliegenden Resultate sehr nahe kam. Es wird kaum noch ein Zweifel darüber gestattet sein, dass die Zahl 1,06 etwas zu klein ist.

Würde man gegenwärtig die Festsetzung zu treffen haben, so würde der Wert zwischen 1,062 und 1,063 fallen und der Zahl 1,0625 wohl nahe kommen. Zugleich könnte man mit einiger Wahrscheinlichkeit aussprechen, dass hiermit die von der Commission ursprünglich erstrebte Fehlergrenze von $\pm$ 0,001 erreicht sein dürfte.

Da indessen auch von den neueren Resultaten einzelne sich erheblich weiter als 0,001 von dem Mittelwert entfernen, da also doch keine Sicherheit der Fehlergrenze $\pm$ 0,001 vorliegt, da weiter die Technik keinen wesentlichen Nachteil erleidet, wenn sie vorläufig den Wert 1,06 beibehält, während die Wissenschaft sich von der Majorisirung überhaupt unabhängig stellen wird, so kann man zweifeln, ob eine gesetzliche Aenderung der Zahl 1,06 jetzt schon zweckmässig sein würde.

Mindestens aber scheint eine Massregel in der technischen Herstellung von Rheostaten und Widerstandseinheiten am Platze zu sein: nämlich deren „Normaltemperatur“, die gegenwärtig meistens ziemlich hoch gewählt wird, umgekehrt niedrig zu greifen. Sind die Rheostaten für etwa 10^0 anstatt der gebräuchlichen 20^0 abgeglichen, so wird der Uebergang zu der richtigen Einheit immer ohne Unbequemlichkeit geschehen können.

Uebersicht.

Seite

Allgemeines 629
Uebersicht über das Verfahren 633
Galvanometerconstante G 633
Verhältnis des Stabmagnetismus zum Erdmagnetismus 634
Concentrische Aufstellung des Multiplikators und der Tangentenbussole und Eliminirung der Magnetlänge 635
Kritisches 636

Beschreibungen.

Das Galvanometer 638
Bifilare Windung des Multiplikators 639
Magnet 639
Drehvorrichtungen 640
Einrichtungen zur Bestimmung der Galvanometerconstante 641
Verzweigungsrheostat. Isolirungen 642
Stromabzweigungsverhältnis 643
Tangentenbussole 1886 644
Grosse Tangentenbussole 1887 645
Einrichtungen zur Messung von M/H 647
Cylindermagnetometer 647
Aufstellung und Abstand a der Magnetometer 648
Skalenabstände 649

Quecksilberwiderstandsbestimmung.

Quecksilbernormale 650
Ausbreitungswiderstand 651
Kalibrirung und Quecksilberwägung 652
Elektroden. Herstellung des Quecksilbers 653
Temperatur 653
Widerstand γ der Quecksilbernormale 654
Widerstandsvergleichung 654
Neusilbernormalen, Tab. 1 656
Zeitliche Aenderung derselben 661

Absolute Widerstandsbestimmung.

Selbstinductionscoefficient Π 662
Polabstand $\mathfrak{L}$ des Magnets 664

Seite
Temperaturcoefficient c des Magnets 667
Magnetische Inductionscoefficienten μ 667
Ueber die Plötzlichkeit der magnetischen Induction 668
Quermagnetisirung μ' 669
Nadellänge und Torsionscoefficient 670
Magnetische Instrumentaleinflüsse 671
Magnetische Ortseinflüsse 675
Zeitliche Aenderungen des Erdmagnetismus 677
Controlen für die Dämpfungsbeobachtungen 678
Skalenabstände A, Correctionen 679
Skalenabstände, Zahlenwerte 681
Galvanometerconstante G 684
Constanten G' und G'' der Tangentenbussolen 685
Vergleichung der beiden Tangentenbussolen 690
Inconstanz der Galvanometerfunction 692
Gegenseitiger Einfluss des Multiplikators und der Tangentenbussole 697
Stromabzweigungsverhältnis i'/i; Tab. 2 699
Formeln zur Berechnung von G 702
Beobachtungen von G; Tab. 3a bis c 704
Verhältnis des Stabmagnetismus zum Erdmagnetismus M/H 707
Abstände der Magnetometer a 707
Formeln für M/H; Tab. 4 707
Beobachtungen von M/H; Tab. 5 und 6 710
Schwingungsdauer τ **und log. Dekrement** Λ' **bei offener Kette**; Tab. 7 713
Controlen für τ und M/H 715
Log. Dekrement Λ **bei geschlossener Kette** 716
Reduction auf kleine Schwingungen 720
Zahlenwerte für Λ; Tab. 8a bis c 721
Quecksilberwiderstand w **des Multiplikators** 729
Mittelwerte von Λ und w 730
Schlussrechnung für den absoluten Widerstand W **des Multiplikators** 731
Resultate; Tab. 9a und b 732
Die beiden Hauptmittel 733
Schlussresultat 734

Berichtigungen.

S. 9, Z. 8 lies Anordnung statt Anwendung.

„ Z. 27 „ $\frac{3}{8}\mathfrak{Q}^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{a^2}\right)$ statt $\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{Q}^2}{R^2}$.

S. 19, Z. 5 „ § 8a statt § 9.

20 DEC 1909
BRITISH MUSEUM

Fig. 1.

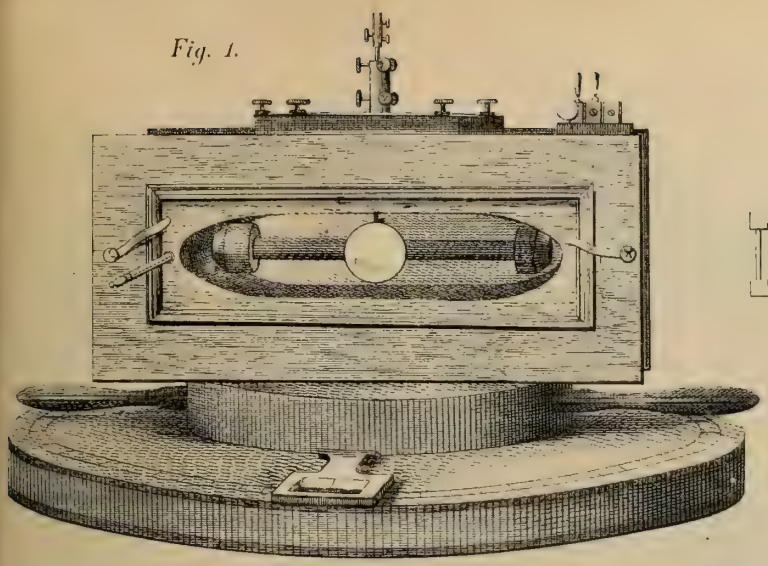


Fig. 2.

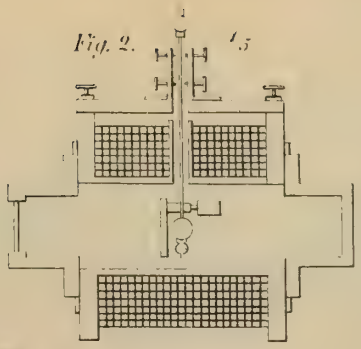


Fig. 6.

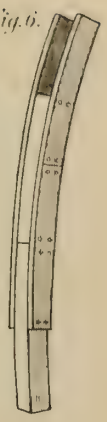


Fig. 3.

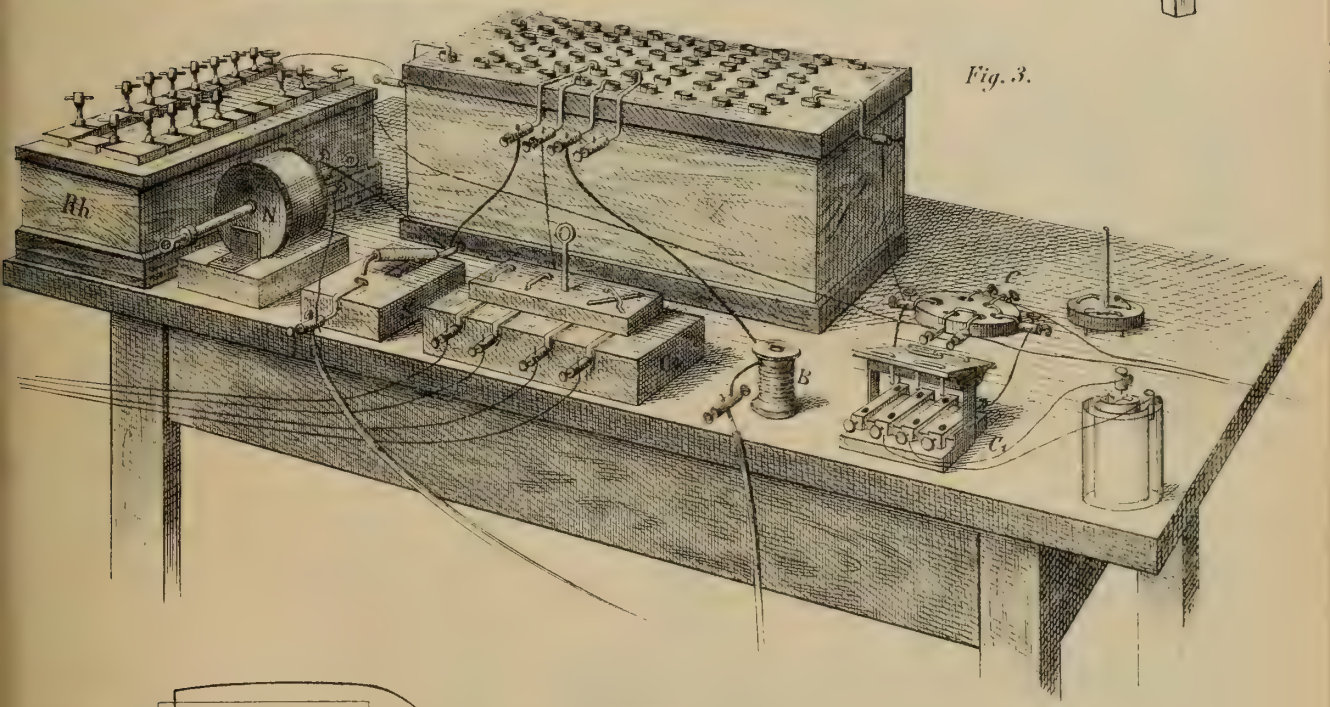


Fig. 5.

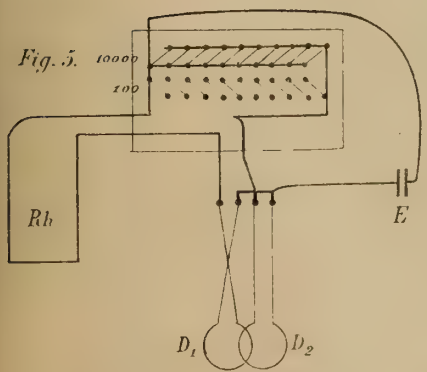


Fig. 4.

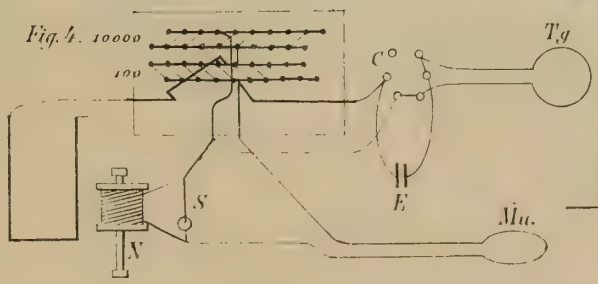
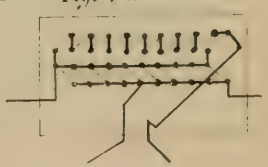


Fig. 4 a



BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 8.

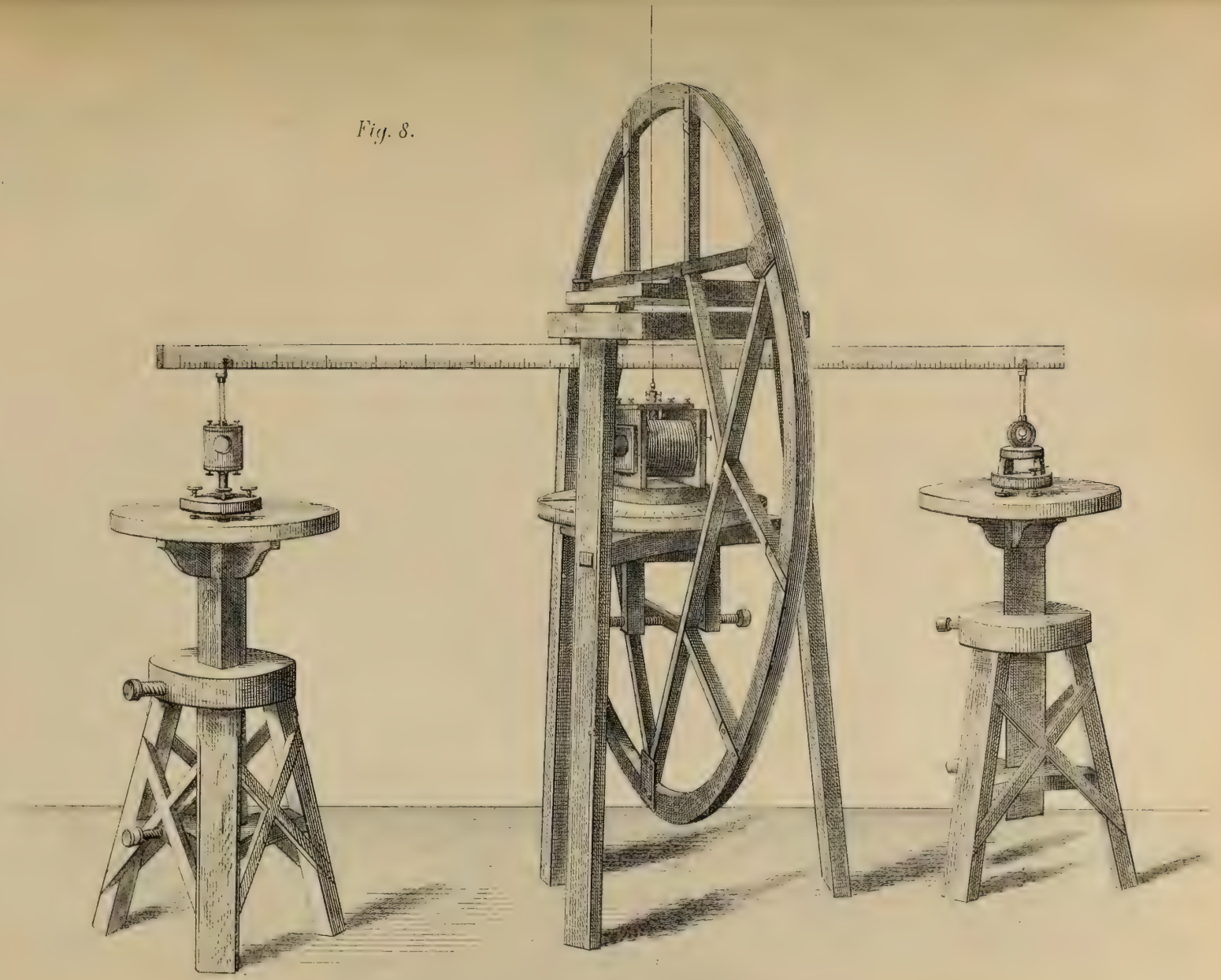
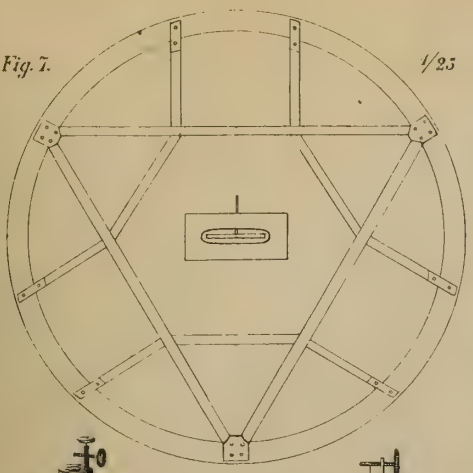


Fig. 7. 1/25



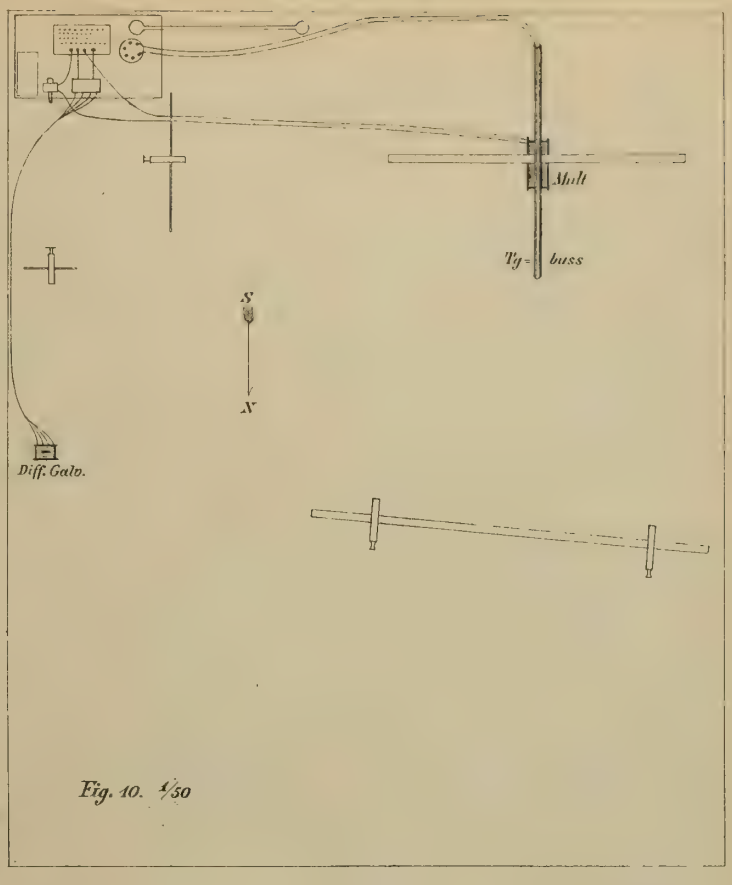


Fig. 10. 1/30

Fig. 9a 1/5

Fig. 9 b 1/5

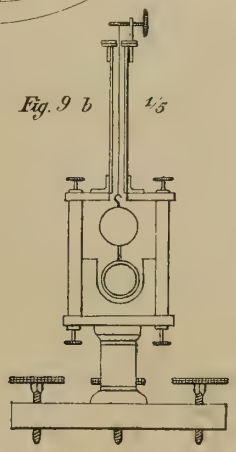


Fig. 11 1/5

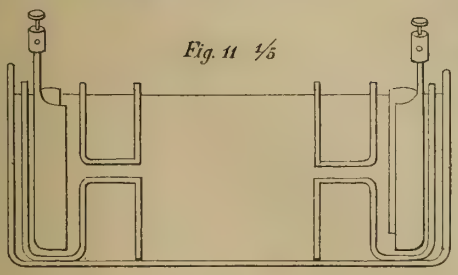


Fig. 12. 1/2

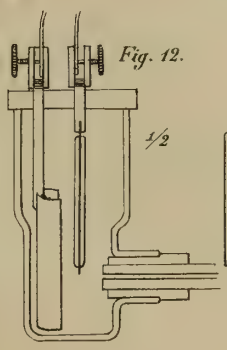


Fig. 13.

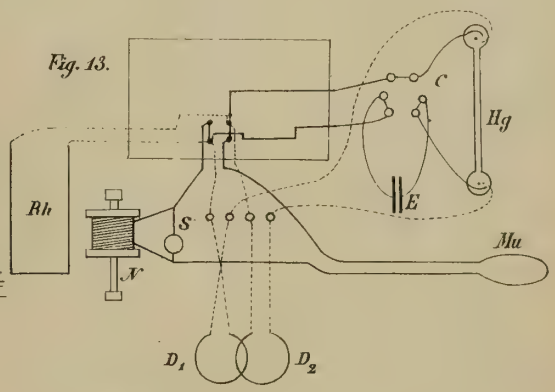
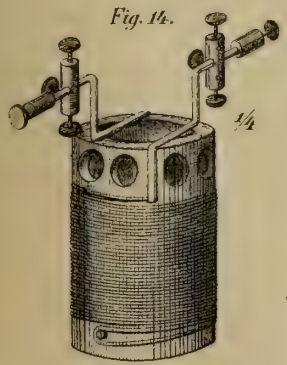
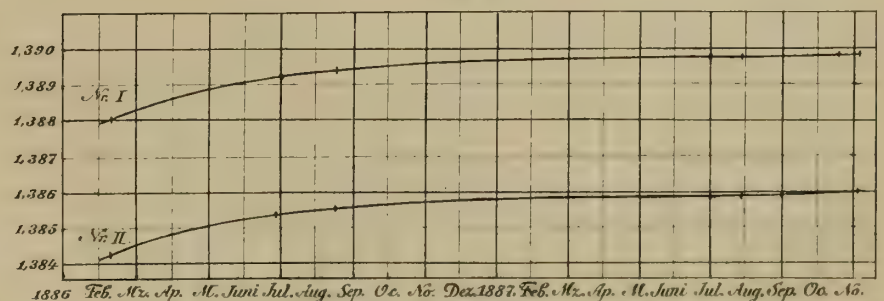


Fig. 14.



1/4

Fig. 15.



BRITISH MUSEUM

Inhalt.

Seite

Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion von *Carl Max von Bauernfeind*. Dritte Mitteilung, enthaltend einen Rückblick auf frühere Mitteilungen, Darstellung der Beobachtungen des Jahres 1885 und Schlussbetrachtungen über die Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Mit einer Steindrucktafel 517

Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Von *Andreas Miller* 569

Ueber den absoluten elektrischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Von *Friedrich Kohlrausch*. Mit 3 Tafeln 627

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.